Lehrbuch

der

Mechanik

in

elementarer Darstellung

mit

Uebungen und Anwendungen

auf

Maschinen- und Bau-Constructionen.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Lehrbuch

der

Mechanik

in

elementarer Darstellung

mit

Uebungen und Anwendungen

auf

Maschinen- und Bau-Constructionen.

Für

den Unterricht an Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Privatstudium für angehende Maschinenbauer und Architekten bearbeitet

von

Ad. Wernicke,

Königlichem Gewerbeschul-Director zu Gleiwitz, ord. Lehrer für Mathematik, Mechanik und Maschinenlehre, Ehrenmitglied der Gewerbevereine zu Görlitz und Schweidnitz.

In zwei Theilen.

Erster Theil.

Mechanik fester Körper.

Mit 405 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Braunschweig,

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1871.

Aus der Vorrede zur ersten Auflage.

Bei den Vorträgen über Mechanik an der hiesigen Provinzial-Gewerbeschule ist mir der Mangel eines geeigneten Lehrbuches, das von den Schülern zur Repetition sowie zum weiteren Studium benutzt werden könnte, von Jahr zu Jahr fühlbarer geworden. Das Nachschreiben des Vortrages von Seiten der Schüler sowie das Dictiren der nothwendigen Uebungs-Aufgaben nimmt so viel Zeit in Anspruch, daß ich in jedem Jahre ein oder das andere wichtige Capitel aus der Mechanik und Maschinenlehre weglassen mußte, um den Cursus im Allgemeinen zu beendigen. Ein Lehrbuch, welches die Gesetze der Mechanik in gedrängter Kürze und deren Anwendung auf die Berechnung der hauptsächlichsten Maschinentheile enthält, ist mir nicht bekannt, weshalb ich einem allgemeinen Bedürfnisse zu genügen glaube, wenn ich das seit längerer Zeit gesammelte Material hiermit in Form eines Lehrbuches der Oeffentlichkeit übergebe.

Bei Abfassung des vorliegenden Lehrbuches lag es in meinem Plane, die Grenzen im Allgemeinen innezuhalten, die durch das Ministerial-Rescript vom 15. Juni 1850 für den Unterricht an den preußischen Gewerbeschulen bestimmt sind, und die, meiner Ansicht nach, auch an außerpreußischen Gewerbeschulen erreicht werden müssen, wenn die Schüler zur gewerblichen Laufbahn oder zum Besuche einer höheren polytechnischen Anstalt gehörig vorbereitet werden sollen.

Die Durchführung des Buches ist eine mathematische, und es ist dabei die Kenntniß der ebenen Geometrie und Trigonometrie, der Stereometrie, der allgemeinen Zahlenlehre, der Gleichungen bis zum zweiten

Grade mit mehreren Unbekannten einschließlich, der arithmetischen Reihen, der geometrischen Reihe und der Elemente der Coordinaten-Geometrie vorausgesetzt. Die Behandlung des Stoffes in dem vorliegenden Lehrbuche ist hiernach eine elementare, wenn auch die Benutzung eines Coordinatensystems streng genommen nicht mehr in die elementare Mathematik gehört. Ich habe jedoch keinen Augenblick Bedenken getragen, von diesem wichtigen Hülfsmittel Gebrauch zu machen, da sich dasselbe bereits bei der Inhaltsbestimmung in der ebenen Geometrie und bei der Lehre von den trigonometrischen Functionen mit Nutzen in Anwendung bringen läßt.

Das Lehrbuch soll aus zwei Abtheilungen bestehen, von denen die vorliegende erste die Mechanik der festen Körper enthält; die bereits in Angriff genommene zweite Abtheilung wird in ähnlicher Weise die Mechanik der flüssigen Körper behandeln.

Um das Buch für den Schulgebrauch geeignet zu machen, habe ich das, was sich für den Vortrag in der Classe eignet, und das, was zu häuslichen Arbeiten für die Schüler benutzt werden kann, von einander getrennt, so daß hiernach jede Abtheilung in einen theoretischen und praktischen Theil zerfällt. Der theoretische Theil der vorliegenden ersten Abtheilung enthält in neun Capiteln die Statik und Dynamik der festen Körper. Der praktische Theil besteht aus den jedem Capitel folgenden Uebungen und dem Anhange.

Bei Abfassung des theoretischen Theils habe ich mich an die Behandlungsweise, wie sie in den Lehrbüchern über analytische Mechanik gebräuchlich ist, angeschlossen. Kräfte und Kräftepaare dienen als Hülfsmittel für die verschiedenartigen Untersuchungen, indem die ersteren bei beabsichtigter oder wirklich erfolgter geradliniger Bewegung, die letzteren bei drehender Bewegung herangezogen werden. Diejenigen Resultate, welche sich nur mit Hülfe höherer Mathematik herleiten lassen, habe ich ohne Entwickelung hingestellt, wie sich dies z. B. bei den Trägheitsmomenten findet, und nur in einigen Fällen ist eine auszuführende Integration durch eine elementare Summation ersetzt worden.

Der befolgte Gang gewährt auf eine einfache Weise eine richtige Einsicht in die mechanischen Gesetze, und ist besonders für diejenigen Schüler, welche ihre Studien auf einer höheren polytechnischen Schule fortsetzen, von großem Nutzen, indem der spätere Vortrag über analytische Mechanik zu einer Repetition und Ergänzung des Früheren wird.

Die mit Nummern versehenen Formeln kommen bei den Rechnungen häufig zur Anwendung und sind deshalb besonders zu beachten.

Der praktische Theil des Buches besteht, wie schon angegeben, aus den jedem Capitel folgenden Uebungen. Die Aufgaben hierzu sind vielfach aus der Maschinen- und Bauconstructionslehre entlehnt, und werden entweder zur Befestigung der vorgetragenen Lehren oder zur zweckmäßigen Erweiterung derselben benutzt. Die Reihenfolge der Aufgaben ist durch das in dem zugehörigen Capitel Vorgetragene bedingt. Bei vielen Aufgaben habe ich die vollständige Auflösung, bei einigen mehrere Auflösungen gegeben, um den Schülern die verschiedenartigen Hülfsmittel in vergleichender Weise zu zeigen, so daß sich das vorliegende Buch auch für den Selbstunterricht eignet, und besonders von den Studirenden an höheren polytechnischen Lehranstalten mit Erfolg benutzt werden kann.

Der Anhang handelt von den Maschinen im Allgemeinen und kann als eine Einleitung in die Maschinenlehre angesehen werden. Hierdurch ist zugleich die Aufnahme der Arbeitgrößen für Wasser, Luft und Dampf, sowie die Angabe der Nutzeffecte bei Wasserrädern und Dampfmaschinen gerechtfertigt.

Während der Bearbeitung des Lehrbuches standen mir folgende Werke zu Gebote, aus denen ich das benutzt habe, was mir für meine Zwecke brauchbar schien:

Brix, Elementar-Lehrbuch der dynamischen Wissenschaften; Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik; Navier, Resumé des leçons de mécanique; Navier, Resumé des leçons sur l'application de mécanique; Poncelet, Traité de mécanique, appliquée aux machines; Salzenberg, Vorträge über Maschinenbau; Unger, Uebungen aus der angewandten Mathematik; Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik; Wiebe, Die Lehre von den einfachen Maschinentheilen.

Die Verlagshandlung ist meinen Bestrebungen durch die Art der Ausstattung des Werkes wesentlich nützlich gewesen.

Schließlich ersuche ich alle Sachverständigen, besonders aber meine Herren Collegen, das Buch in ihrem Kreise zur Benutzung zu empfehlen und mich auf etwa vorkommende Mängel gefälligst aufmerksam zu machen, indem ich die Versicherung gebe, derartige Bemerkungen jederzeit mit vielem Danke aufnehmen zu wollen.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Das hiermit in verbesserter Auflage erscheinende Lehrbuch der Elementar-Mechanik stimmt in der Behandlung des Gegenstandes mit der in der ersten Auflage überein, dagegen bin ich durch den langjährigen Gebrauch veranlaßt worden, in der Anordnung des Stoffes Aenderungen vorzunehmen. Es empfiehlt sich beim Unterrichte an unseren technischen Schulen, wo, vor Behandlung der Mechanik, in der Physik bereits mechanische Probleme vorgeführt werden, mit der Bewegungslehre zu beginnen, und nachdem dieselbe auf den materiellen Punkt Ausdehnung gefunden, die Lehre vom Gleichgewicht folgen zu lassen. Dieser von allen bedeutenderen Verfassern derartiger Lehrbücher eingeschlagene Gang hat den besonderen Vortheil, das Einfache dem Schwierigeren voranzustellen und zugleich die für die Praxis nothwendigen Begriffe, wie Masse, Arbeitgröße, Arbeitstärke, virtuelles Moment, schon frühzeitig zum Bewußtsein zu bringen. An das Capitel von der Vereinigung und Zerlegung der Kräfte, in welchem die einfacheren Probleme der Ebene in den Vordergrund gestellt wurden, reiht sich die Lehre vom Schwerpunkt sowie die Heranziehung der einer Bewegung sich entgegenstellenden Hindernisse. Die Bewegung der Körper hat durch eine rein geometrische Behandlung dieses Gegenstandes eine zweckmäßige Einleitung erfahren, welche mit Benutzung der im zweiten Abschnitte für den materiellen Punkt entwickelten Bewegungsgesetze in den meisten Fällen der praktischen Anwendung ausreichen dürfte. Die beiden Anwendungen der Statik und Dynamik auf Körper, wie sie uns die Natur in Wirklichkeit liefert, die Lehre von der Elasticität und Festigkeit sowie die Lehre vom Stoß machen den Beschluß dieses ersten Theils.

Das in der ersten Auflage aufgenommene Capitel „Bewegung auf vorgeschriebener Bahn, wenn die Schwere allein wirksam ist“ und der Anhang „Von den Maschinen“ sind in dieser Auflage an passender Stelle eingereiht worden. Die mathematische Einleitung wurde ganz fortgelassen, da dieselbe viel ausführlicher hätte gegeben werden müssen, wenn sie ein Lehrbuch der höheren Geometrie ersetzen sollte. Den Rechnungen ist das

Kilogramm und das Meter zu Grunde gelegt, entgegen der ersten Auflage, in welcher Pfund und Fuß als Einheiten dienten. Rechtfertigen diese Andeutungen die Behauptung hinlänglich, diese neue Auflage als eine vollständig umgearbeitete zu bezeichnen, so werden Sachkenner bei näherer Durchsicht mir das Zeugniß nicht versagen, daß ich bemüht gewesen bin, Vereinfachungen und Verbesserungen, dem heutigen Stande der Wissenschaft gemäß, in allen Capiteln vorzunehmen, und daß die bedeutenderen Werke von Redtenbacher, Weisbach, Holtzmann, Delaunay, Laißle und Schübeler in der für ein Schulbuch geeigneten Weise gehörig zu Rathe gezogen worden sind. Bei der Umarbeitung des Capitels über Elasticität und Festigkeit insbesondere bin ich, soweit der Gegenstand einer elementaren Darstellung fähig war, dem classischen Werke „Die Festigkeitslehre von Grashof" gefolgt, und kann das in diesem Capitel und den dazu gehörigen Uebungen niedergelegte Material bei den Vorträgen über Maschinenlehre und Bauconstruction, an den reorganisirten Provinzial-Gewerbeschulen, vielfach als Ausgangspunkt für die Rechnungen genommen werden.

Die Verlagshandlung hat in bekannter rühmlicher Weise für eine sorgfältige Ausstattung des Werkes Sorge getragen. Die Figuren sind sämmtlich neu gestochen worden, wobei einzelne derselben aus dem größeren, in demselben Verlage erschienenen Werke von Weisbach zur Benutzung überlassen werden konnten.

Indem ich allen Denen, welche durch Zuschriften mich in die Möglichkeit gesetzt haben, zweckmäßige Aenderungen und Verbesserungen der ersten Auflage vorzunehmen, hiermit meinen ganz ergebensten Dank ausspreche, fühle ich mich noch zu besonderem Danke gegen meinen Collegen an hiesiger Schule, Herrn Dr. Keßler, verpflichtet, welcher die zweite Lesung der Correctur bereitwillig übernommen und dadurch zur Correctheit dieser neuen Auflage wesentlich beigetragen hat.

Gleiwitz, im März 1871.

Ad. Wernicke.

Kilogramm und das Meter zu Grunde gelegt, entgegen der ersten Auflage, in welcher Pfund und Zoll als Einheiten dienten. [illegible] die Ab-änderungen die Behandlung hinlänglich, diese neue Auflage als eine vollständig umgearbeitete zu bezeichnen, so [illegible] Sachkenner bei näherer Durchsicht mir das Zeugniß nicht versagen, daß ich bemüht gewesen bin, Vereinfachungen und Verbesserungen dem heutigen Stande der Wissenschaft gemäß in allen Kapiteln vorzunehmen, und daß die bewährtesten Werke von Redtenbacher, Weisbach, [illegible] und [illegible] in der für ein Lehrbuch geeigneten Weise gehörig zu Rathe gezogen worden sind. Bei der Umarbeitung des Capitels über [illegible] und Festigkeit insbesondere bin ich, soweit [illegible] einer elementaren Entwickelung fähig war, dem classischen Werke: „Die Festigkeitslehre von Grashof" gefolgt, und kann das in diesem Capitel und dem dazu gehörigen Uebungen niedergelegte Material bei den Vorträgen über Maschinenlehre und Bauconstruction, an den [illegible] füglich vielfach als Anhaltspunkt für die Rechnungen benutzt werden.

Die Verlagshandlung hat in bekannter rühmlicher Weise für eine sorgfältige Ausstattung des Werkes Sorge getragen. Die Figuren sind sämmtlich neu gezeichnet worden, wobei einzelne derselben aus dem [illegible] in demselben Verlage erschienenen Buche von Weisbach: der Ingenieur entnommen werden konnten.

Indem ich allen Denen, welche durch Zuschriften mich auf die [illegible] gelenkt haben, [illegible] und Berichtigungen der ersten Auflage [illegible] hiermit meinen herzlichsten Dank ausspreche, halte ich mich noch zu besonderem Danke gegen meinen Collegen an hiesiger Schule, Herrn Dr. Richter, verpflichtet, welcher die ganze Lösung der Aufgaben sorgfältig nachgerechnet und dadurch zur Reinheit dieser neuen Auflage wesentlich beigetragen hat.

[illegible], im März 1872.

Al. Wernicke.

Inhalt.

Dritter Abschnitt.

Mechanik fester Körper.

Erstes Capitel (S. 92 bis 145).

Von der Vereinigung und Zerlegung der Kräfte.

Zweites Capitel (S. 146 bis 215).

Vom Schwerpunkte.

Drittes Capitel (S. 216 bis 282).

Von der Reibung und Steifigkeit.

Viertes Capitel (S. 283 bis 362).

Von der Bewegung eines festen Körpers.

Fünftes Capitel (S. 363 bis 474).

Von der Elasticität und Festigkeit.

Sechstes Capitel (S. 475 bis 526).

Stoß fester Körper.

Einleitung.

Die allgemeine Eigenschaft der Körper, die Undurchdringlichkeit, ist 1
die Ursache, daß von uns die Dinge der Außenwelt erkannt und unterschieden werden, da dieselben einen Raum in der Weise ausfüllen, daß kein zweites Ding derselben Art dort bestehen kann. Das den Raum Anfüllende heißt Materie.

Bestimmt man die Lage eines Körpers im Raum zu anderen Körpern, 2
so giebt man dadurch seinen Ort an. Der Körper kann sich zu seinem Orte auf zweifache Weise verhalten, entweder behauptet er denselben oder er verändert ihn. Im ersten Falle ist der Körper in Ruhe, im zweiten in Bewegung. Körper, die gegenseitig ihren Ort nicht ändern, bilden ein festes System. Ist ein Körper in Bewegung, so beschreibt jeder Punkt desselben eine Linie, die Bahn; die Länge der Bahn heißt Weg. Als Längeneinheit dient das Meter oder der Stab mit seinen decimalen Vielfachen und Unterabtheilungen (1 Meter = 3,1862 Fuß preußisch).

Ein in Bewegung befindlicher Körper verändert in jedem Augenblicke 3
seinen Ort, die Zeit ändert in jedem Augenblicke ihre Größe, sodaß die Zeit zur Beurtheilung einer Bewegung benutzt und ebenso umgekehrt die Zeit durch Bewegungen gemessen werden kann. Als Zeiteinheit dient für gewöhnlich die Secunde mittlerer Zeit, von denen $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ einen mittleren Sonnentag ausmachen. Der kleinste denkbare Theil einer Secunde wird Zeitmoment genannt.

Eine Bewegung ist gleichförmig, wenn die von dem Körper in auf- 4
einander folgenden Zeitmomenten zurückgelegten Wege gleiche Größe haben, im entgegengesetzten Falle heißt die Bewegung ungleichförmig.

Bei der gleichförmigen Bewegung, nennt man den in der Secunde 5
zurückgelegten Weg die Geschwindigkeit. Bei der ungleichförmigen Bewegung sind die in aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten beschriebenen Wege ungleich, weshalb man hier von der Geschwindigkeit im Allgemeinen nicht reden, sondern nur die Geschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit oder an einer bestimmten Stelle der Bahn angeben kann. Unter der Geschwindigkeit einer

ungleichförmigen Bewegung, am Ende der Zeitdauer von t Secunden, versteht man die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung, in welche die ungleichförmige übergehen würde, wenn plötzlich Alles das fortgenommen wird, was die Ungleichförmigkeit in der Bewegung bedingt.

6 Die ungleichförmige Bewegung heißt gleichmäßig verändert, wenn die Geschwindigkeit in jedem Zeitmoment um gleich viel zu- oder abnimmt, im entgegengesetzten Falle nennt man die Bewegung eine ungleichmäßig veränderte.

7 Bei der gleichmäßig veränderten Bewegung wird die während einer Secunde erfolgende Geschwindigkeits-Zu- oder Abnahme, Beschleunigung, Acceleration, genannt, die also mit einem positiven oder negativen Zeichen in Rechnung zu bringen ist. Bei der ungleichmäßig veränderten Bewegung kann von der Beschleunigung im Allgemeinen nicht die Rede sein, vielmehr wird man hier die Beschleunigung zu einer bestimmten Zeit in Betracht ziehen müssen. Unter der Beschleunigung einer ungleichmäßig veränderten Bewegung, am Ende der Zeitdauer von t Secunden, versteht man die Beschleunigung derjenigen gleichmäßig veränderten Bewegung, in welche die ungleichmäßig veränderte übergehen würde, wenn plötzlich Alles das fortgenommen wird, was die ungleichmäßige Geschwindigkeitsänderung bewirkt.

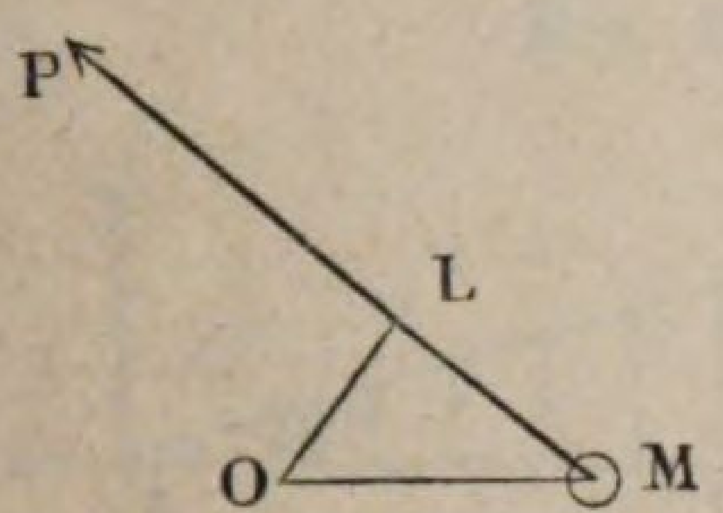
8 Grundsätze. 1) Die Körper sind unvermögend, den Zustand der Ruhe oder der Bewegung, in dem sie sich befinden, durch sich selbst aufzuheben. Hiernach ist eine Ursache anzunehmen für eine erfolgte Bewegung, sowie auch für das Verhindern einer beabsichtigten Bewegung. Diese Ursache heißt Kraft. Hat eine Kraft eine Zeit lang auf einen Körper bewegend gewirkt und hört die Wirkung plötzlich auf, so bewegt sich der Körper nach der Richtung, die er zuletzt verfolgte und mit der zu dieser Zeit erlangten Endgeschwindigkeit gleichförmig weiter.

2) Jede Bewegungsänderung ist der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in der Richtung der geraden Linie, nach welcher die betreffende Kraft wirkt. Die Bewegung wird durch die Geschwindigkeit gemessen, die der Körper infolge der Krafteinwirkung annimmt, weshalb die Geschwindigkeit als Maß für die Kräfte benutzt werden kann. Wird die durch eine Kraft bezweckte Bewegung gehindert, so ist die Kraft dadurch nicht aufgehoben, sondern dieselbe übt gegen das Hinderniß eine Pressung, einen Druck aus, der mit der Richtung der Kraftwirkung übereinstimmt und ebenfalls als Maß für die Kräfte dienen kann. Der von der Schwerkraft der Erde, die im Mittelpunkt ihren Sitz hat, hervorgerufene Druck heißt das Gewicht oder genauer das absolute Gewicht des Körpers. Dasselbe ist in einer nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Linie, der lothrechten oder senkrechten Linie, wirksam zu denken, in welcher sich der Körper, bei vollkommener Freiheit, durch die Einwirkung der Schwerkraft bewegen würde. Diese Bewegung heißt der freie Fall. Als Druckeinheit dient das Kilogramm (k) mit seinen decimalen Vielfachen und Unterabtheilungen, d. i. das Gewicht von einem Cubikdecimeter (Liter, Kanne) Wasser bei der Temperatur der größten Dichtigkeit (4° C.).

Kräfte stellen wir in der Folge durch Linien dar (Fig. 1), ihre Richtung geben

wir durch eine Pfeilspitze zu erkennen. Auf diesen Linien schneidet man Stücke wie ML ab, die proportional sind entweder dem durch die Kraft ausgeübten Drucke, oder der durch die Kraft erzeugten Geschwindigkeit.

Fig. 1.



3) Wirken auf einen Körper gleichzeitig mehrere Kräfte, so muß er denselben gleichzeitig Genüge leisten. Hierbei ändert der Körper entweder seinen ursprünglichen Zustand oder er verharrt in demselben. Im letzteren Falle waren die wirksamen Kräfte unter sich im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht kann das der Ruhe oder das der Bewegung sein, je nachdem der ursprüngliche Zustand des Körpers ein ruhender oder ein bewegter war.

4) Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich und entgegengesetzt.

Die Wissenschaft, welche sich mit den Kräften und deren Wirkungen be- 9
schäftigt, heißt Mechanik. Die Bewegung eines Körpers kann nur dann als genau bestimmt angesehen werden, wenn man die Bewegung jedes einzelnen seiner Punkte anzugeben vermag. Hieraus folgt, daß man vor der Bewegung ganzer Körper die von Punkten behandeln muß. Sieht man die letzteren als mathematische Punkte an, so ist von den Kräften dabei zu abstrahiren und die Bewegung als Erscheinung aufzufassen. Den ersten Abschnitt der Mechanik bildet hiernach die rein mathematische Bewegungslehre, die Phoronomie. Werden die Kräfte dagegen zu den Untersuchungen herangezogen, so muß man dieselben an materiellen Punkten, das sind die kleinsten denkbaren Theile eines Körpers, wirken lassen, woraus sich als zweiter Abschnitt der Mechanik die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung eines materiellen Punktes ergiebt. Den dritten Abschnitt bildet endlich die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung materieller Systeme, wobei wir je nach dem Aggregatszustande derselben drei Unterabtheilungen zu unterscheiden haben, nämlich:

Mechanik fester Körper,
Mechanik tropfbarflüssiger Körper,
Mechanik luftförmiger Körper.

Jede dieser Unterabtheilungen kann endlich wieder in zwei Abschnitte, nämlich in die Lehre vom Gleichgewicht, Statik, und in die Lehre von der Bewegung, Dynamik, gebracht werden. Benutzen wir beide Eintheilungen zu gleicher Zeit, so hat man bei dem dritten Abschnitt zu unterscheiden:

Geostatik und Geodynamik, für feste Körper,
Hydrostatik und Hydrodynamik, für tropfbarflüssige Körper,
Aerostatik und Aerodynamik, für luftförmige Körper.

1*

Erster Abschnitt.

Phoronomie. Bewegung eines mathematischen Punktes.

10 Die Bewegung eines freien Punktes erfolgt entweder in einer *geraden* oder *krummen Linie*, jederzeit ist aber die Bahn *ununterbrochen*, weil das Bewegliche von einem Punkt nur zu einem unmittelbar darauf folgenden übergehen kann. Wir beginnen mit der geradlinigen Bewegung und behandeln der Reihe nach die gleichförmige, die gleichmäßig und die ungleichmäßig veränderte Bewegung.

11 Die von dem Punkte in gleichförmiger Bewegung geradlinig durchlaufene Strecke betrage s^m (Meter), die Geschwindigkeit der Bewegung sei c^m und die Zeitdauer der Bewegung belaufe sich auf t Secunden. Dann ist dem Begriff der Geschwindigkeit gemäß

$$c = \frac{s}{t} \text{ und daraus} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

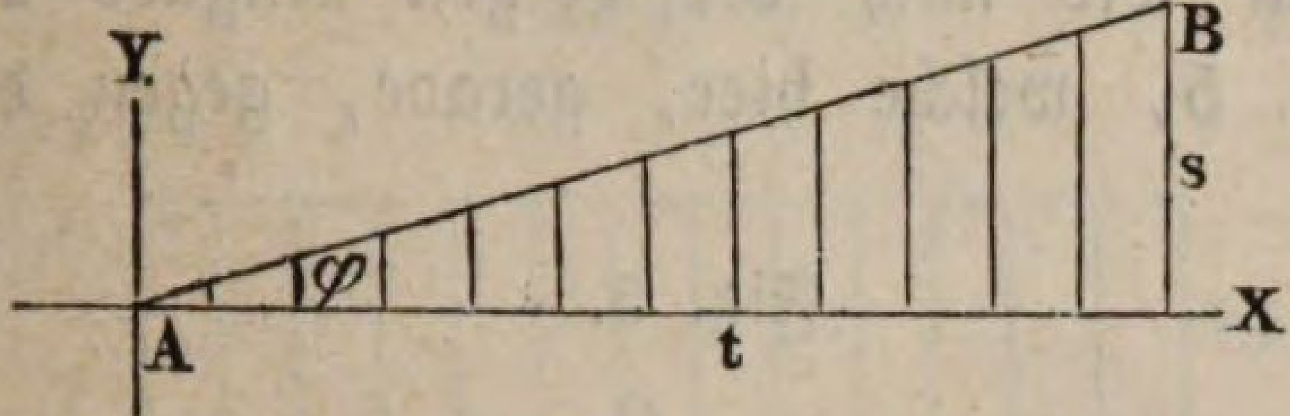
$$s = c \, . \, t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Man nehme ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, trage die Zeitdauer t der Bewegung auf die X-Achse, errichte in den einzelnen Punkten Normalen, deren Länge gleich der diesem Augenblicke entsprechenden Weglänge und Geschwindigkeit gemacht werde. Die Punkte liefern, wenn man unzählige solcher Normalen construirt denkt, zwei continuirliche Linien, von denen die erste (Fig. 2) die *Wegcurve*, die zweite (Fig. 3) die *Geschwindigkeitscurve* heißen soll. Beide sind bei dieser einfachsten Bewegung gerade Linien, und zwar läuft die Geschwindigkeitscurve mit der X-Achse parallel und bestimmt ein Rechteck von den Seiten c und t, dessen Inhalt $c\,.\,t$ dem Maß nach mit dem in der Zeit t zurückgelegten Wege s übereinstimmt. Das hierdurch gefundene Gesetz heißt also: *der durchlaufene Weg wird durch die Fläche der Geschwindigkeitscurve gemessen.*

Die Wegcurve bildet hier eine unter dem Winkel φ gegen die X-Achse geneigte gerade Linie AB, und es ist in dieser geometrischen Darstellung die Geschwindigkeit $\qquad c = tang\ \varphi \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

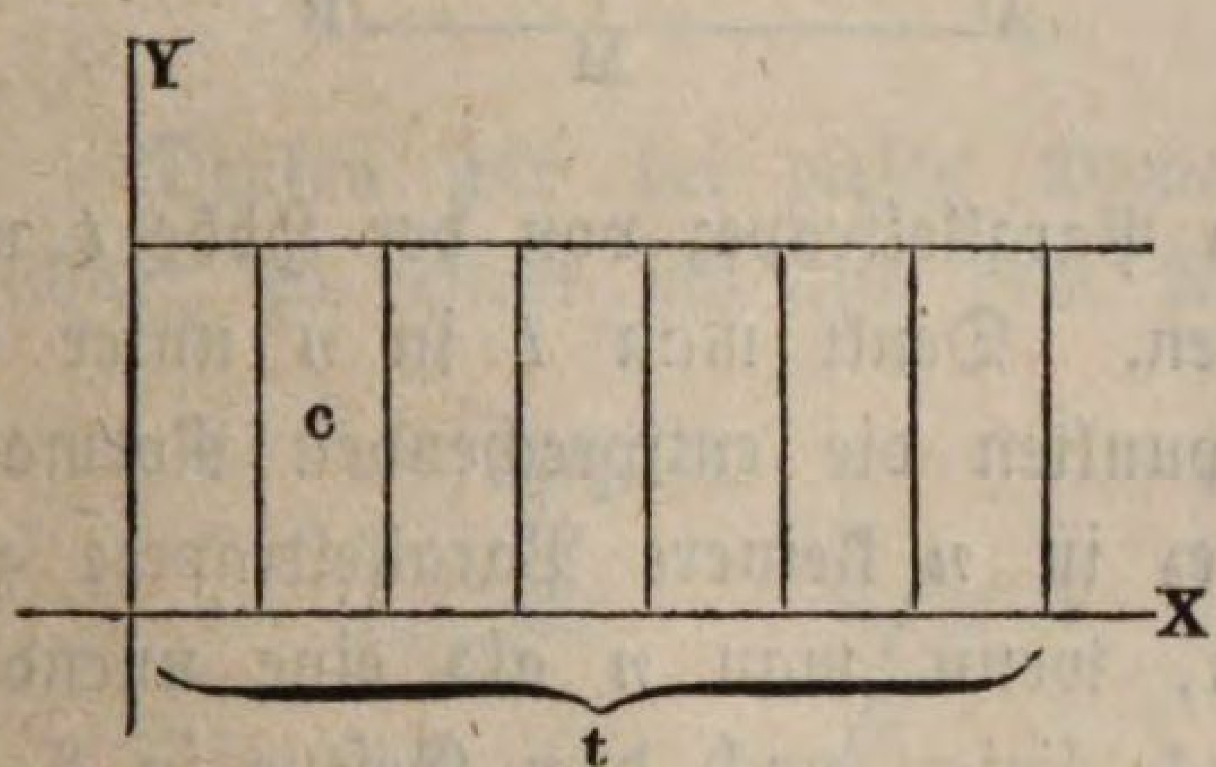
Das größere oder kleinere Steigungsverhältniß der Linie AB giebt also die größere oder kleinere Geschwindigkeit für die zu beobachtende Bewegung, was bei der Zusammenstellung von mehreren Bewegungen in derselben Figur behufs Vergleichung ihrer Geschwindigkeiten von großem Vortheil ist.

Fig. 2.



Je kleiner der Winkel φ, je mehr nähert sich die Geschwindigkeitscurve der X-Achse und für $\varphi = 0$ fällt diese in die X-Achse selbst, während die Wegcurve mit der X-Achse parallel läuft, d. h. der Punkt befindet sich während der Zeit t in Ruhe. Je größer der Winkel φ wird, je mehr entfernt sich die Geschwindigkeitscurve von der X-Achse und für $\varphi = 90°$ verschwindet sie vollständig, während die Wegcurve der Y-Achse parallel wird, d. h. dieser Bewegung würde eine unendlich große Geschwindigkeit entsprechen.

Fig. 3.



Besitzt der Punkt zu gleicher Zeit die Geschwindigkeiten c_1 und c_2, und gehen die Bewegungen nach derselben Richtung vor sich, so ist der innerhalb t Secunden zurückgelegte Weg

$$s = c_1\, t + c_2\, t = (c_1 + c_2)\,.\,t.$$

Waren die Bewegungsrichtungen dagegen entgegengesetzt, so ist

$$s = c_1\, t - c_2\, t = (c_1 - c_2)\,.\,t.$$

Die durch beide Bewegungen dem Punkte beigebrachte Geschwindigkeit c, die resultirende Geschwindigkeit oder die Resultante der Geschwindigkeiten genannt, ist im ersten Falle $c_1 + c_2$, im zweiten $c_1 - c_2$, d. h. für beide Fälle gleich der algebraischen Summe der Geschwindigkeiten.

Das Gesetz ist in gleicher Weise anwendbar, wenn der Punkt beliebig viele Geschwindigkeiten $c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots$ theils nach derselben, theils nach der gerade entgegengesetzten Richtung besitzt, wobei die Geschwindigkeiten mit positiven oder negativen Zeichen behaftet sein müssen.

Es ist für diesen Fall $c = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$, welche algebraische Summe durch das Zeichen Σc_1 kürzer wiedergegeben werden soll. Wir haben hiernach

$$\left.\begin{aligned} c &= \Sigma c_1 \\ s &= t\,.\,\Sigma c_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ein Punkt besitze die Geschwindigkeit c^m und bewege sich t Secunden lang geradlinig und gleichmäßig verändert mit der Beschleunigung von j^m, 12

dann ist dem Begriff der Beschleunigung gemäß und mit Rücksicht auf §. 4 (Formel 4) die erlangte Endgeschwindigkeit

$$v = c \pm j \, . \, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dieser Gleichung gemäß construiren wir nach der obigen Angabe die Geschwindigkeitscurven Fig. 4 und Fig. 5, welche hier, gerade, gegen die

Fig. 4.

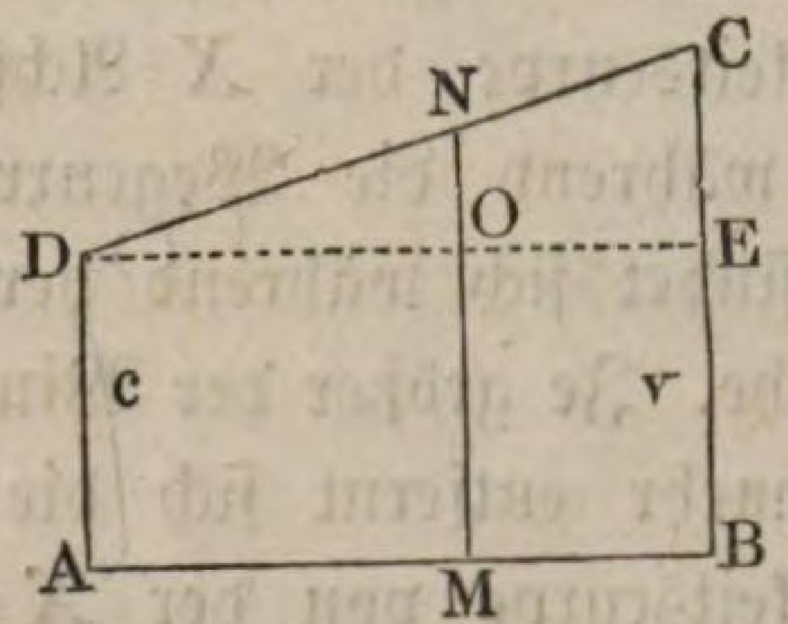
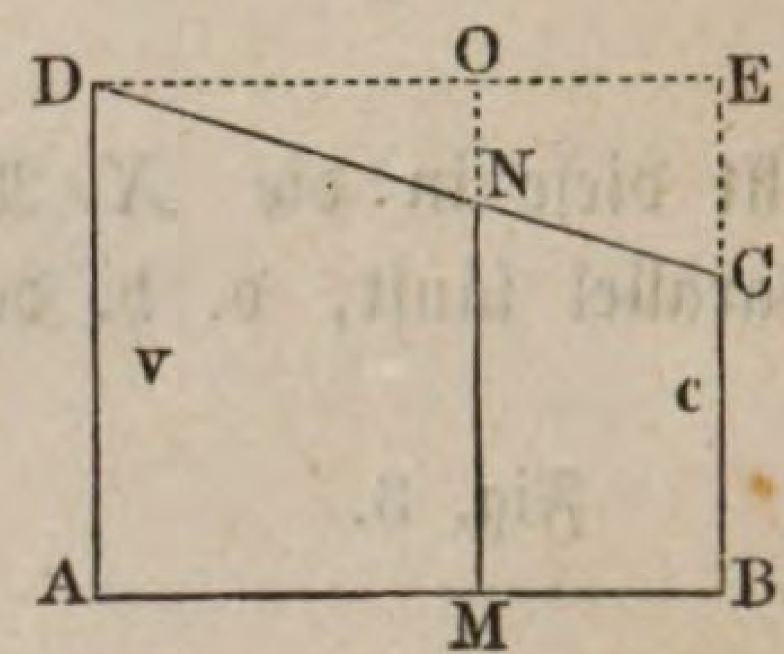


Fig. 5.



X-Achse geneigte Linien werden und ein Paralleltrapez von der Höhe t und den parallelen Seiten c und v bestimmen. Denkt man t in n unter sich gleiche Theile getheilt und in den Theilpunkten die entsprechenden Normalen errichtet, so wird ein solches Paralleltrapez in n kleinere Paralleltrapeze zerlegt, die schließlich zu Rechtecken werden, wenn man n als eine unendlich große Zahl ansieht. Jedes dieser Rechtecke liefert nach dem Gesetze in §. 11 in seinem Inhalte den während der unendlich kleinen Zeit von dem Punkte gleichförmig durchlaufenen Weg, weshalb der ganze während der Zeit t durchlaufene Weg s in der Summe dieser unendlich vielen Rechtecke erhalten wird. Die Summe dieser Rechtecke stimmt aber mit dem Inhalte des Paralleltrapezes überein, sodaß wir auch hier das in §. 11 aufgestellte Gesetz erhalten: Der durchlaufene Weg wird durch die Fläche der Geschwindigkeitscurve gemessen.

Hiernach ist

$$s = \frac{v + c}{2} \, . \, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Eliminirt man aus 5 und 6 einmal v und andererseits t, so entsteht:

$$s = c \, . \, t \pm \tfrac{1}{2} j \, . \, t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

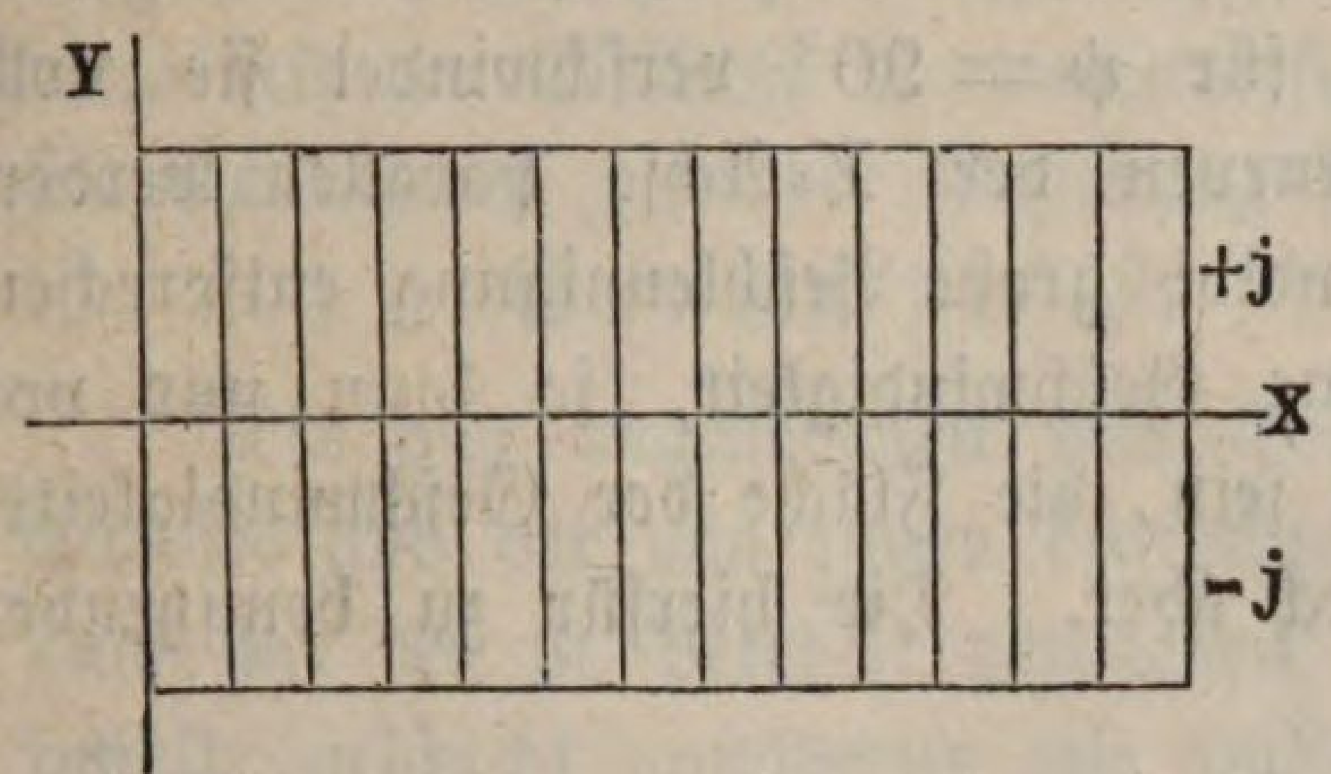
$$s = \frac{v^2 - c^2}{\pm 2 j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die Geschwindigkeitscurven, die Linien $D\,C$, mögen mit der X-Achse den Winkel ψ bilden, dann ergiebt sich aus dieser geometrischen Darstellung die Beschleunigung: $j = tang\,\psi$ . . . . (9)

Analog der oben angegebenen Construction für die Weg- und Geschwindigkeitscurven läßt sich bei dieser Bewegung noch die sogenannte Beschleunigungscurve construiren, indem man auf der X-Achse die Zeitdauer t der Bewegung und in den einzelnen Punkten Normalen gleich der jedesmaligen Beschleunigung aufträgt. Da diese in unserem Falle constant $= \pm j$

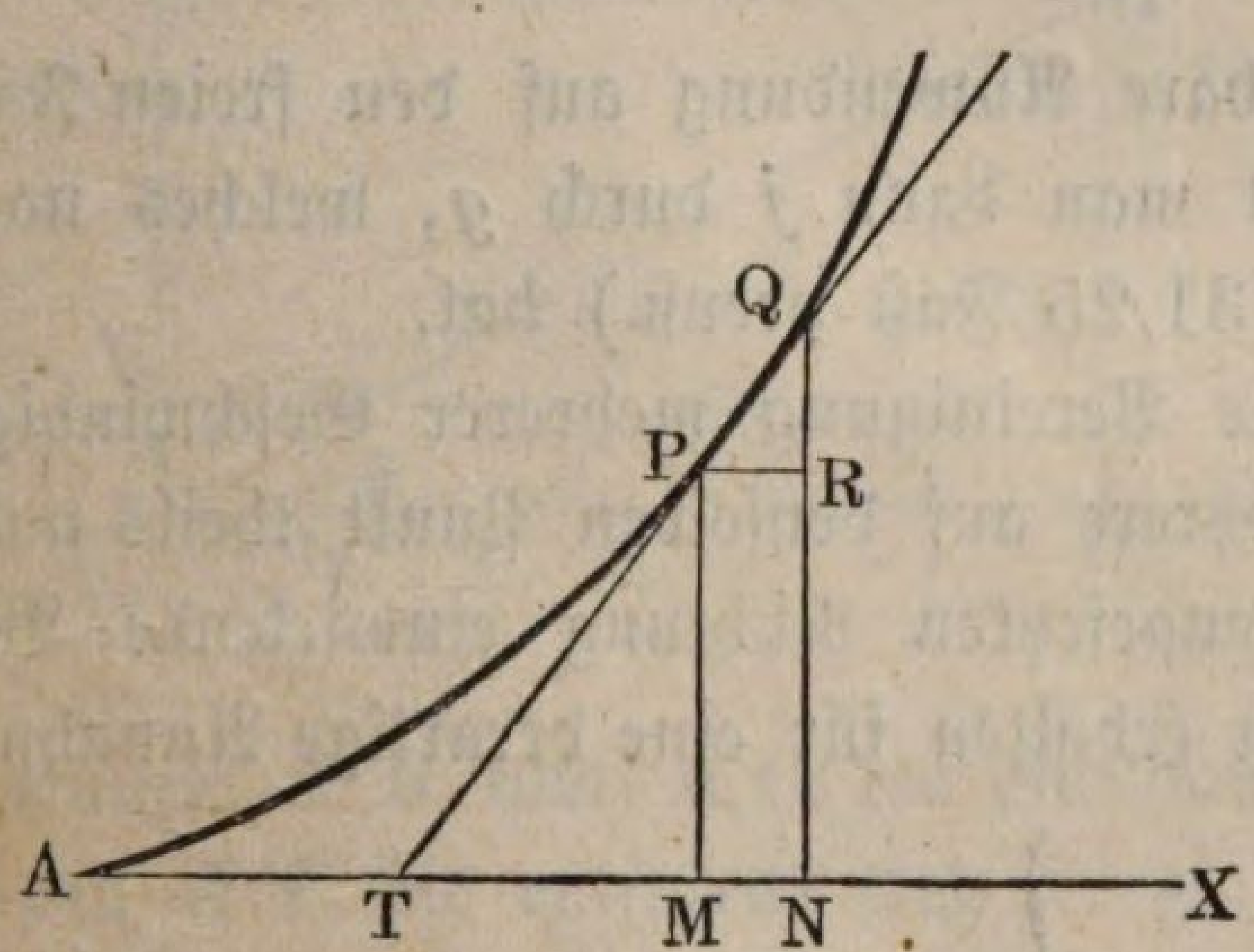
ist, so wird die Curve in jedem einzelnen Falle (Fig. 6) eine mit der X-Achse parallel laufende gerade Linie sein, die ein Rechteck von den Seiten j und t bestimmt, dessen Inhalt $j \cdot t$ dem Maß nach mit dem in der Zeit t erlangten Zuwachs CE (Fig. 4) an Geschwindigkeit übereinstimmt. Bei der verzögerten Bewegung, d. h. wenn $-j$ in Rechnung zu bringen, bedeutet CE natürlich die betreffende Abnahme der Geschwindigkeit (Fig. 5). Das hier gefundene Gesetz heißt: Die Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit wird durch die Fläche der Beschleunigungscurve gemessen.

Fig. 6.



Denken wir bei dieser Bewegung noch die Wegcurve (Fig. 7) verzeichnet, so ersieht sich aus dem Ausdruck $s = ct \pm \frac{1}{2} jt^2$, daß diese eine krumme Linie sein muß. So lange dieselbe eine gegen die X-Achse unter dem Winkel φ geneigte gerade Linie war, wurde durch sie eine gleichförmige Bewegung dargestellt und $tang\ \varphi$ war gleich der betreffenden Geschwindigkeit. Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit von Moment zu Moment, ebenso ändert sich die Richtung der Wegcurve gegen die X-Achse von Moment zu Moment und zwar wird diese Richtung durch die jedesmalige geometrische Tangente angegeben. Die Tangente stellt aber auch diejenige gleichförmige Wegcurve dar, in welche die ungleichförmige übergehen würde, wenn die Ursachen der Ungleichförmigkeit plötzlich aufgehoben würden, deshalb ist auch F. 3 auf jede ungleichförmige Bewegung anwendbar, wenn man unter φ den Winkel versteht, den die geometrische Tangente an einer beliebigen Stelle der Wegcurve mit der X-Achse bildet. Es ist hiernach

Fig. 7.



$$v = tang\ \varphi,$$

worin v und φ also im Allgemeinen veränderlich sind.

Das größere oder kleinere Steigungsverhältniß der Linie DC (Fig. 4) giebt die größere oder kleinere Beschleunigung für die zu betrachtende Bewegung. Je kleiner der Winkel ψ, desto mehr nähert sich die Beschleunigungscurve (Fig. 6) der X-Achse und für $\psi = 0$ fällt diese in die X-Achse, die Geschwindigkeitscurve wird eine zur X-Achse parallele Linie, die Wegcurve geht dagegen in eine zur X-Achse geneigte gerade Linie über, die gleich-

mäßig beschleunigte Bewegung ist zu einer gleichförmigen geworden. Läßt man den Winkel ψ noch weiter abnehmen, so geht die Beschleunigungscurve unter die X-Achse, die Geschwindigkeitscurve nimmt die in Fig. 5 gezeichnete Lage ein und die Wegcurve ist wieder eine krumme Linie. Je größer der Winkel ψ in absoluter Hinsicht wird, je mehr entfernt sich die Beschleunigungscurve von der X-Achse und für $\psi = 90^\circ$ verschwindet sie vollständig, während die Geschwindigkeitscurven der Y-Achse parallel werden, d. h. diesen Bewegungen würde eine unendlich große Beschleunigung entsprechen.

Hatte der Punkt ursprünglich keine Geschwindigkeit, so kann nur von einer beschleunigten Bewegung die Rede sein, die Fläche der Geschwindigkeitscurve (Fig. 4) geht dabei in ein Dreieck über. Die hierfür zu benutzenden Formeln heißen:

$$v = j\,.\,t\,. = tang\ \varphi \text{ und } j = tang\ \psi$$

$$s = \frac{v\,.\,t}{2}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,j t^2$$

$$s = \frac{v^2}{2j}.$$

Die letzten Formeln finden unmittelbare Anwendung auf den freien Fall im luftleeren Raum, und zwar bezeichnet man dann j durch g, welches nach Versuchen den Werth von 9,81 Meter (31,25 Fuß preuß.) hat.

In gleicher Weise, wie in §. 11 die Vereinigung mehrerer Geschwindigkeiten gezeigt worden, lassen sich auch mehrere auf denselben Punkt theils nach derselben, theils nach der gerade entgegengesetzten Richtung einwirkende Beschleunigungen algebraisch addiren, und wir erhalten für eine derartige Annahme

$$\left.\begin{aligned} j &= \Sigma j_1 \\ v &= \Sigma c_1 + t\,\Sigma j_1 \\ s &= t\,.\,\Sigma c_1 + \tfrac{1}{2} t^2\,\Sigma j_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

13 Ein Punkt bewege sich t Secunden geradlinig mit ungleichmäßig veränderter Bewegung, wobei das Gesetz der Beschleunigungsänderung gegeben sein muß. Man construire diesem Gesetze gemäß die Beschleunigungscurve, welche im Allgemeinen eine krumme Linie sein wird und bestimme den Inhalt der von der Beschleunigungscurve begrenzten Fläche. Indem man dieselbe wieder wie oben aus unzählig vielen schmalen Rechtecken zusammengesetzt denkt, ergiebt sich: 1) Die Geschwindigkeits-Zu- oder Abnahme während der Zeit t wird durch die Fläche der Beschleunigungscurve gemessen.

Nachdem diese Geschwindigkeitsänderung gefunden, ist dieselbe mit der etwa schon vorhandenen Geschwindigkeit durch algebraische Addition zu verbinden und demnach die Geschwindigkeitscurve zu construiren. Die hierdurch begrenzte Fläche, wiederum aus unendlich vielen schmalen Rechtecken bestehend gedacht, läßt das in §. 11 benutzte Gesetz in Anwendung bringen und wir erhalten 2) der während der Zeit t durchlaufene Weg wird durch die Fläche der Geschwindigkeitscurve gemessen. Dem erhaltenen Werthe von s gemäß

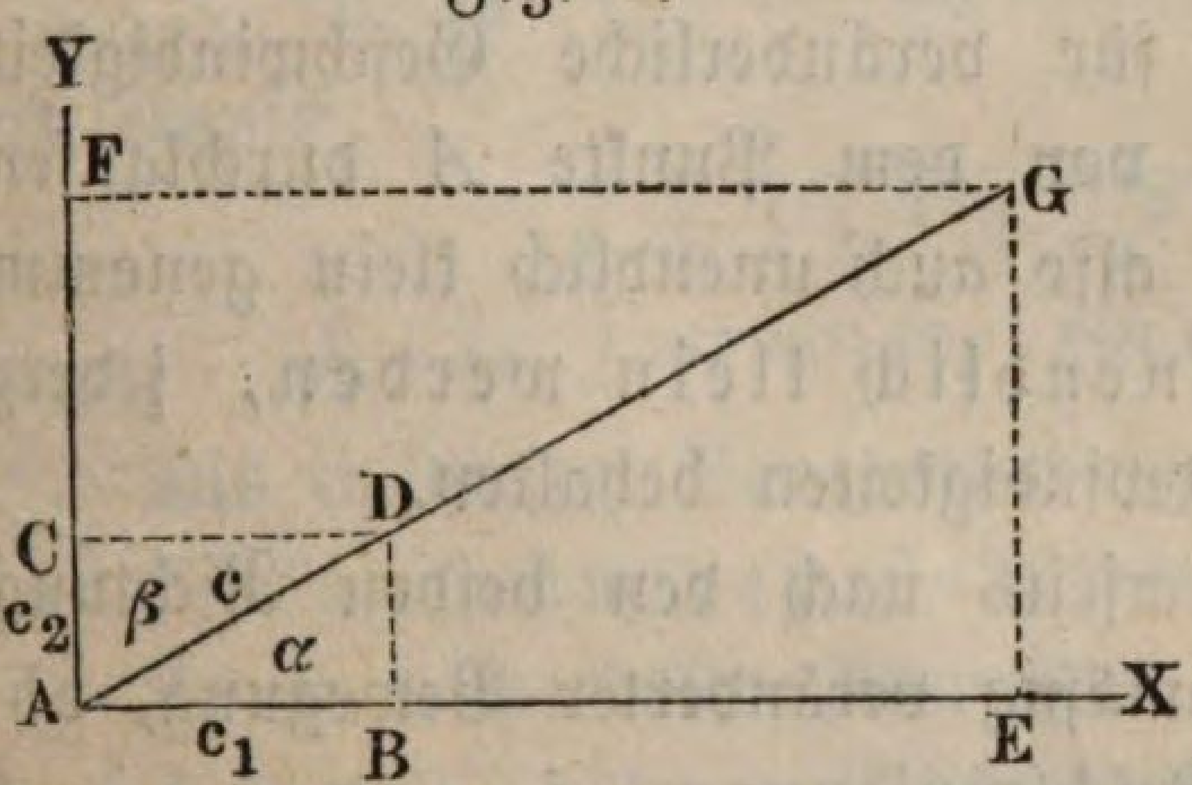
construire man die Wegcurve und in den einzelnen Punkten die geometrischen Tangenten. Diese bilden mit der X=Achse veränderliche Winkel φ, die zu der veränderlichen Geschwindigkeit v in der Beziehung stehen, daß für jeden Zeitmoment 3) $tang\,\varphi = v$ ist. Construirt man in gleicher Weise an den einzelnen Punkten der Geschwindigkeitscurve geometrische Tangenten, so bilden diese mit der X=Achse die veränderlichen Winkel ψ, die zu der veränderlichen Beschleunigung j in der Beziehung stehen, daß für jeden Zeitmoment

4) $tang\,\psi = j$ ist.

Die hier angegebenen vier Gesetze zeigen den Zusammenhang der drei Curven und der von ihnen begrenzten Flächenräume sowohl untereinander als auch mit der in Betracht gezogenen Bewegung. Die Berechnung der Flächeninhalte geschieht annähernd mit Hülfe der Simpson'schen Regel.

Ein Punkt A, der nach zwei aufeinander normalen Richtungen Ax und Ay 14
(Fig. 8) die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 besitzt, vermöge welcher er sich gleichförmig bewegen soll, kann weder die eine noch die andere Richtung einschlagen, muß vielmehr, um beiden Richtungen gleichzeitig zu genügen, eine dazwischen liegende Richtung verfolgen. Es seien D und G zwei Punkte der gesuchten Bahn, die der Punkt A resp. nach 1 und t Secunden erreichen mag. Von D und G fälle man Normalen auf die ursprünglichen Bewegungsrichtungen, so müssen AB und AC die entsprechenden Geschwindigkeiten c_1 und c_2, AE und AF die entsprechenden Wege nach t Secunden, nämlich gleich $c_1\,t$ und $c_2\,t$ sein. Aus der Figur folgt:

Fig. 8.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{BD} = \frac{c_1}{c_2} \text{ und } \frac{AE}{AF} = \frac{AE}{EG} = \frac{c_1\,t}{c_2\,t} = \frac{c_1}{c_2}$$

d. h. $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{EG}$ oder die drei Punkte A, D, G liegen in einer geraden Linie, welche in Richtung der Diagonale des aus den gegebenen Geschwindigkeiten construirten Rechtecks liegt. Es werde diese Linie ADG gezogen, so ist AG der von dem Punkte A nach t Secunden zurückgelegte Weg s. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke hat man nun

$$\frac{s}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{c_1\,.\,t}{c_1}$$
$$s = AD\,.\,t,$$

d. h. der von A in Richtung der Diagonale zurückgelegte Weg wächst mit der Zeit t, muß also gleichförmig durchlaufen werden, und AD, die Diagonale des aus den Geschwindigkeiten construirten Rechtecks, ist die resultirende

Geschwindigkeit c, der Größe und Richtung nach. Bezeichnen wir noch die Winkel, welche c mit c_1 und c_2 bildet, durch α und β, so haben wir:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = c \,.\, \cos \alpha \\ c_2 = c \,.\, \cos \beta \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Die gegebenen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 heißen in Bezug auf die Resultante c, Componenten oder Seitengeschwindigkeiten, und sind die Projectionen der von dem Punkte A erlangten resultirenden Geschwindigkeit c.

Es ist hiernach vollkommen gleichgiltig, ob man eine einzige Geschwindigkeit wirksam denkt, welche dem Punkt seine wahre Bewegung mittheilt, oder zwei Geschwindigkeiten, welche die projicirten Bewegungen hervorrufen, und man kann ohne Weiteres das Eine für das Andere substituiren. Die Aufgabe c, aus c_1 und c_2 zu finden, heißt Zusammensetzung, die dagegen aus c, die Componenten c_1 und c_2 zu bestimmen, Zerlegung der Geschwindigkeiten.

Das Gesetz gilt in gleicher Weise für veränderliche Geschwindigkeiten v_1, v_2, v, da die Zeitdauer t für die von dem Punkte A durchlaufenen Wege AE und AF beliebig groß war, also auch unendlich klein genommen werden darf, wodurch diese Wege selbst unendlich klein werden, jederzeit aber das Verhältniß der betreffenden Geschwindigkeiten behalten.

Der Punkt A (Fig. 8) besitze andererseits nach den beiden Richtungen Ax und Ay das Bestreben, sich in gleichmäßig veränderter Bewegung, ohne Anfangsgeschwindigkeit, mit den Beschleunigungen j_1 und j_2 zu bewegen und es seien D und G seine nach der Zeit 1 und t, in Folge dieser Bewegungen angenommenen Orte, so ist: $AB = \frac{1}{2} j_1$; $AC = \frac{1}{2} j_2$; $AE = \frac{1}{2} j_1 t^2$; $AF = \frac{1}{2} j_2 t^2$. Hieraus ergiebt sich wie oben, daß die drei Punkte A, D, G in gerader Linie liegen. Ferner ist $AG = AD \,.\, t^2$, d. h. die Strecke AG wird in gleichmäßig veränderter Bewegung zurückgelegt und AD ist gleich der halben resultirenden Beschleunigung, welche sich aus den gegebenen halben Beschleunigungen AB und AC in derselben Weise herstellt, wie wir es oben für die Geschwindigkeiten gefunden haben. Das für die Hälften gefundene Gesetz gilt ebenso für die Ganzen, woraus sich ergiebt, daß Beschleunigungen, ebenso wie Geschwindigkeiten, zusammengesetzt und zerlegt werden können. Es ist also:

$$j = \sqrt{j_1^2 + j_2^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

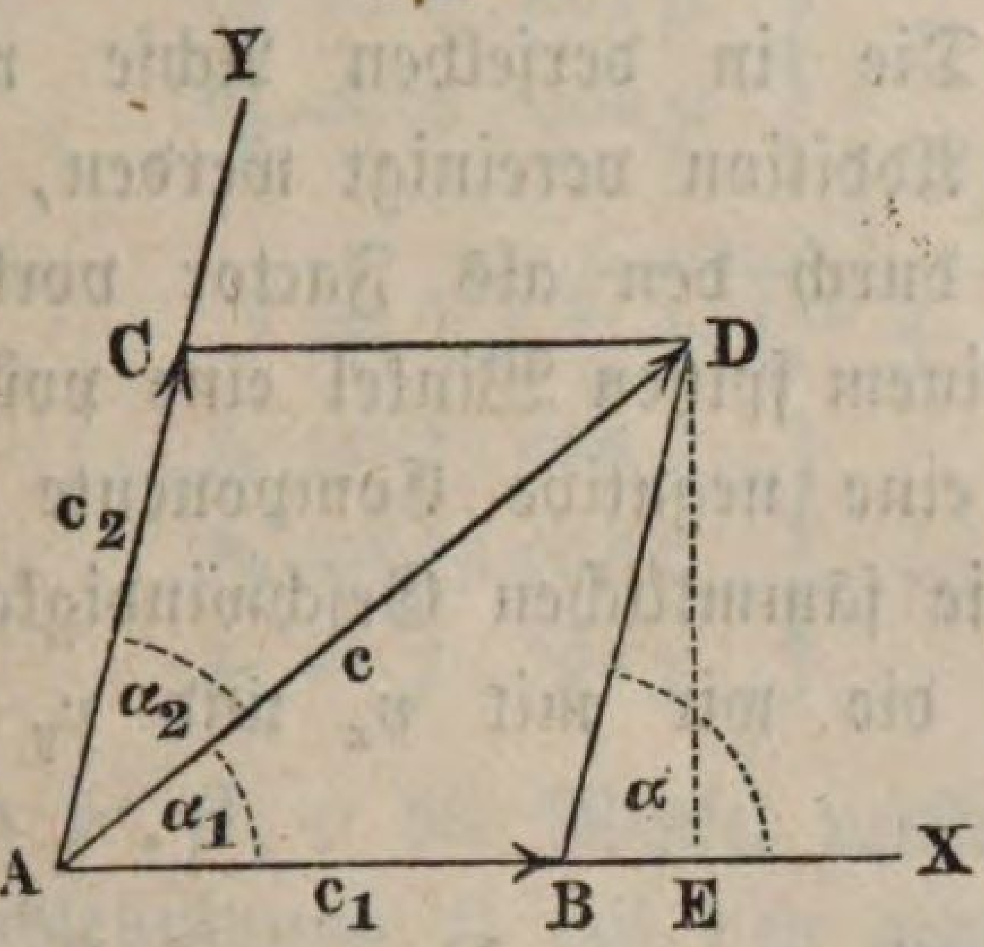
$$\left.\begin{array}{l} j_1 = j \,.\, \cos \alpha \\ j_2 = j \,.\, \cos \beta \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Das Gesetz erleidet keine Aenderung, wenn wir veränderliche Beschleunigungen in Rechnung zu bringen haben.

Bilden die beiden dem Punkte A anhaftenden Geschwindigkeiten c_1 und c_2 (Beschleunigungen j_1 und j_2) keinen rechten Winkel, sondern einen beliebigen Winkel α, so stelle man das dadurch bestimmte Parallelogramm (Fig. 9)

dar, nehme die Diagonale AD als X_1-Achse, die in A zu AD errichtete Normale als Y_1-Achse an und zerlege die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 (Beschleunigungen) nach Richtung dieser Achsen. Die Componenten in der Y_1-Achse werden sich, da sie gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, aufheben, und die Summe der Componenten in der X_1-Achse liefert die resultirende Geschwindigkeit c (Beschleunigung). Dieselbe ist hiernach der Richtung und Größe nach gleich der Diagonale des aus den Geschwindigkeiten (Beschleunigungen) construirten Parallelogramms. Es ist also:

Fig. 9.



$$\left. \begin{array}{r} c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\, c_1\, c_2 \cos\alpha} \\ c_1 : c_2 : c = \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 : \sin\alpha \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

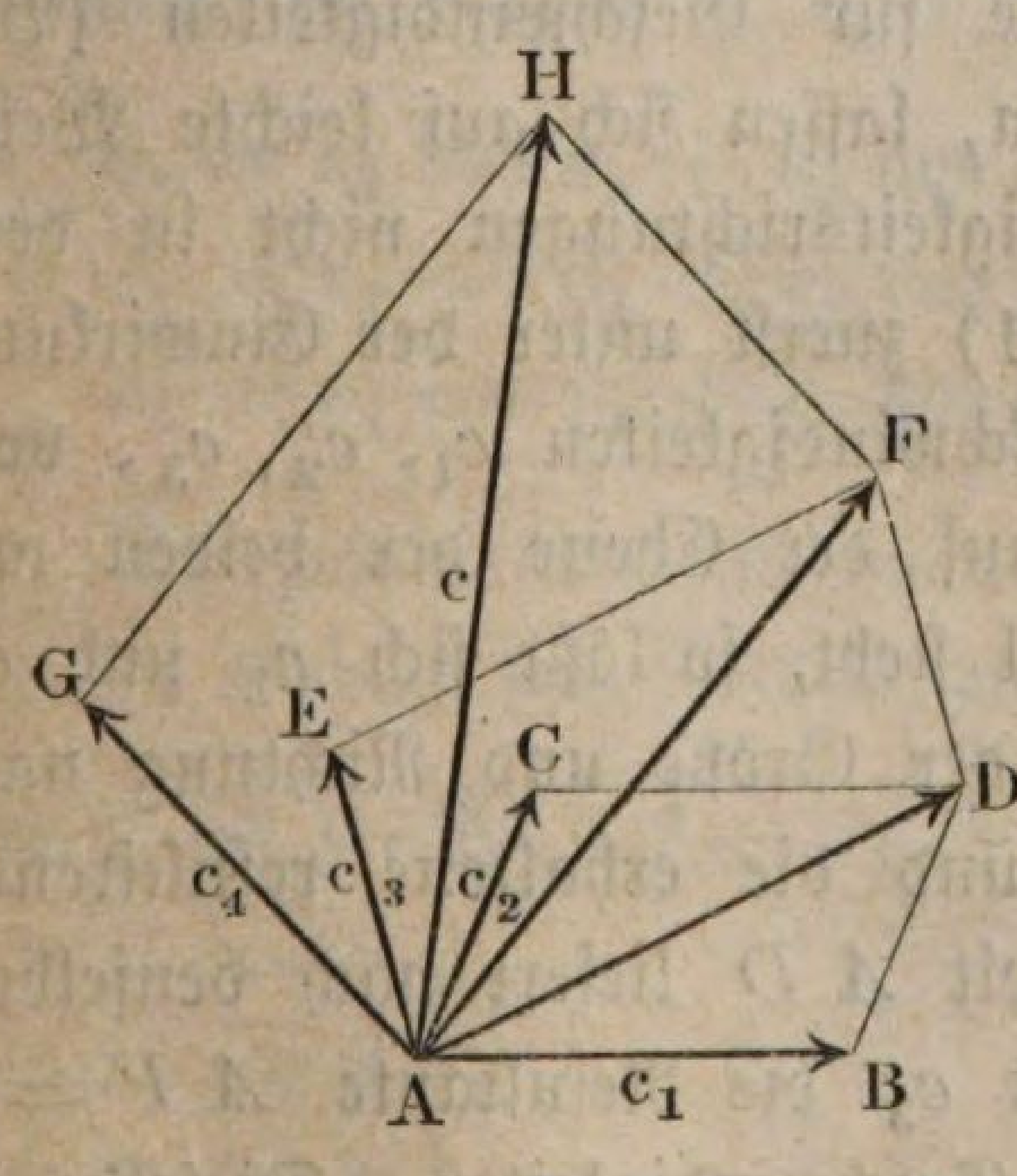
und ebenso

$$\left. \begin{array}{r} j = \sqrt{j_1^2 + j_2^2 + 2\, j_1\, j_2 \cos\alpha} \\ j_1 : j_2 : j = \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 : \sin\alpha \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15a)$$

Die in diesem Paragraphen vorgetragenen Lehren bilden das Gesetz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten oder der Beschleunigungen.

Durch wiederholte Anwendung der letzten Form des Gesetzes läßt sich 15
jede beliebige Anzahl von Geschwindigkeiten (Beschleunigungen), die ein Punkt A (Fig. 10) besitzt, in eine resultirende Geschwindigkeit (Beschleunigung) verwandeln. AD ist die Resultante aus c_1 und c_2; AF die Resultante aus AD und c_3 also aus c_1, c_2 und c_3, und AH endlich die Resultante aus AF und c_4, d. h. aus c_1, c_2, c_3 und c_4.

Fig. 10.



Zur Erzielung eines übersichtlichen und auf alle Fälle anwendbaren Resultats denke man die dem Punkte A eigenen Geschwindigkeiten außer der Größe auch der Richtung nach durch die Winkel α und β gegeben, welche die Geschwindigkeiten mit den Achsen AX und AY eines in A beliebig angenommenen Coordinatensystems bilden. Dabei mögen die Winkel von der Geschwindigkeitsrichtung aus bis zum positiven Theil der Achsen auf dem kürzesten Wege gemessen werden, sodaß keiner dieser Winkel größer als 180 Grad werden kann. Die Geschwindigkeiten seien $v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots$, deren Winkel mit der X-Achse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$ und mit der Y-Achse $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \ldots$ Sämmtliche Geschwindigkeiten werden nach Richtung der Achsen zerlegt, und

statt der gegebenen Geschwindigkeiten diese Componenten in Rechnung gebracht. Die Componenten in Richtung der X-Achse heißen: $v_1 \cos \alpha_1$, $v_2 \cos \alpha_2$, $v_3 \cos \alpha_3, \ldots$ und die in Richtung der Y-Achse: $v_1 \cos \beta_1$, $v_2 \cos \beta_2$, $v_3 \cos \beta_3, \ldots$. Die in derselben Achse wirksamen Componenten können durch algebraische Addition vereinigt werden, wobei die Richtung jeder einzelnen Componente durch den als Factor vorkommenden Cosinus vollständig bestimmt ist, da einem spitzen Winkel eine positive Componente, einem stumpfen Winkel dagegen eine negative Componente entspricht. Durch diese Addition reduciren sich die sämmtlichen Geschwindigkeiten auf zwei in Richtung der Achsen wirksame, die wir mit v_x und v_y bezeichnen wollen. Es ist hiernach

$$v_x = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + v_3 \cos \alpha_3 + \cdots = \Sigma v_1 \cos \alpha_1$$
$$v_y = v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2 + v_3 \cos \beta_3 + \cdots = \Sigma v_1 \cos \beta_1.$$

Die resultirende Geschwindigkeit werde mit v bezeichnet und die Winkel ihrer Richtung mit den Achsen mögen α und β heißen, dann ist nach F. 11 u. 12

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(\Sigma v_1 \cos \alpha_1)^2 + (\Sigma v_1 \cos \beta_1)^2} \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v \cdot \cos \alpha \\ v_y = v \cdot \cos \beta \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

wodurch die resultirende Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach vollständig bestimmt ist.

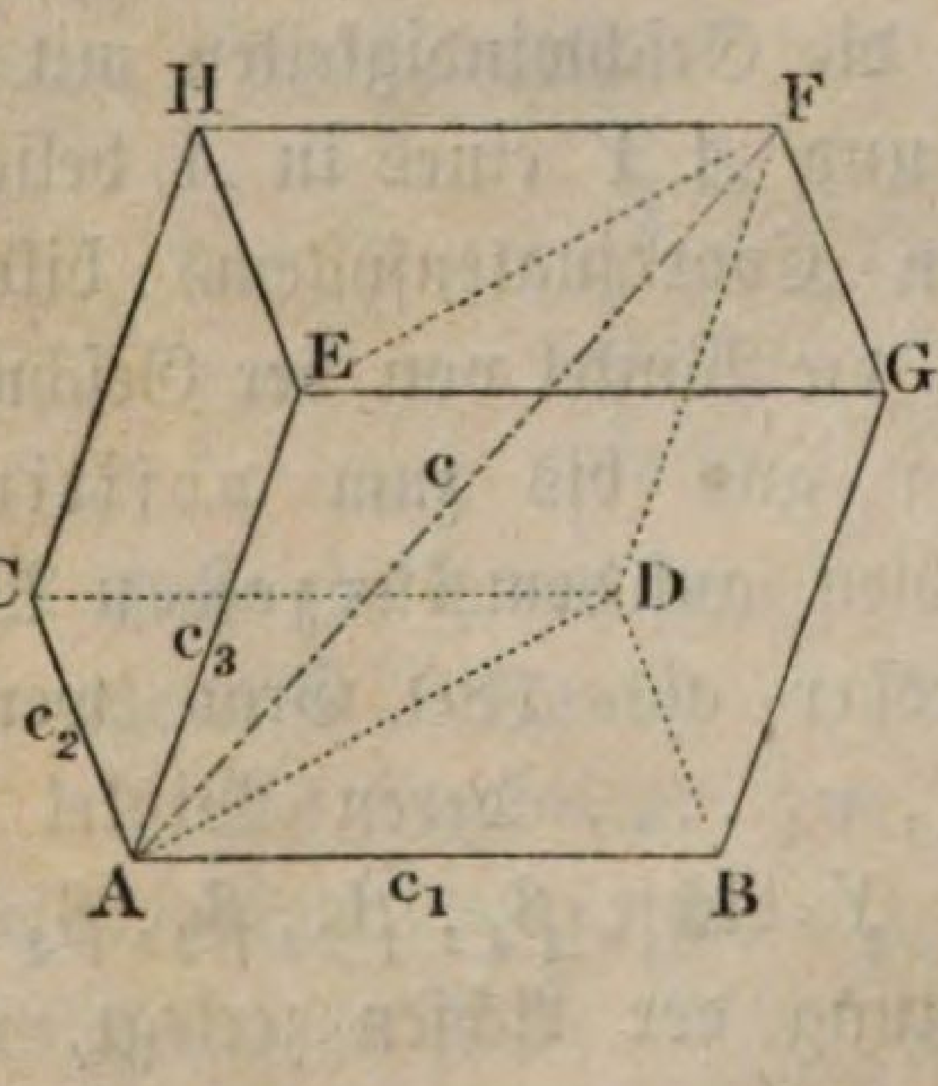
In derselben Weise würden wir erhalten:

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{(\Sigma j_1 \cos \alpha_1)^2 + (\Sigma j_1 \cos \beta_1)^2} \quad . \quad . \quad (16a)$$

$$\left. \begin{array}{l} j_x = j \cdot \cos \alpha \\ j_y = j \cdot \cos \beta \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17a)$$

16 Die in §. 14 und 15 entwickelten Gesetze für Geschwindigkeiten (Beschleunigungen), die sich in einer Ebene befinden, lassen sich auf leichte Weise auf den Fall ausdehnen, daß diese Geschwindigkeitsrichtungen nicht in derselben Ebene liegen. Ist der Punkt A (Fig. 11) zuerst unter der Einwirkung von drei Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3, von denen jede auf der Ebene der beiden anderen normal steht, so läßt sich c_1 und c_2 nach F. 11 der Größe und Richtung nach vereinigen, und die erhaltene resultirende Geschwindigkeit AD liefert nach denselben Formeln mit c_3 die Resultante $AF = c$ für alle drei Geschwindigkeiten. Dieselbe ist der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des aus den drei Geschwindigkeiten construirten Parallelepipedums dargestellt. Für diesen Fall ist demnach:

Fig. 11.



$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = c \,.\, \cos\alpha \\ c_2 = c \,.\, \cos\beta \\ c_3 = c \,.\, \cos\gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

oder

$$j = \sqrt{j_1^2 + j_2^2 + j_3^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18a)$$

$$\left.\begin{array}{l} j_1 = j \,.\, \cos\alpha \\ j_2 = j \,.\, \cos\beta \\ j_3 = j \,.\, \cos\gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19a)$$

unter α, β, γ die Winkel verstanden, welche die resultirende Geschwindigkeit c (Beschleunigung j) mit den gegebenen c_1, c_2, c_3 bildet. Werden die drei in F. 19 verzeichneten Gleichungen quadrirt und addirt, so entsteht mit Rücksicht auf F. 18:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Es läßt sich hiernach jede Geschwindigkeit (Beschleunigung) in drei auf einander normal stehende Componenten zerlegen, und es ist für den Erfolg gleichgiltig, ob man die Geschwindigkeit c oder deren Componenten c_1, c_2, c_3 in Rechnung bringt, das sind die Projectionen der von dem Punkt A erlangten resultirenden Geschwindigkeit.

Steht der Punkt A unter dem Einfluß von beliebig vielen Geschwindigkeiten (Beschleunigungen), welche nicht in derselben Ebene liegen, so denke man durch A ein dreiachsiges Coordinatensystem gelegt und die Geschwindigkeitsrichtungen gegen dasselbe durch die Winkel α, β, γ bestimmt. Jede der Geschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots$ zerlege man nach Richtung der drei Achsen und vereinige die in einer Achse gelegenen Componenten durch algebraische Addition, so entstehen drei auf einander normal stehende Geschwindigkeiten, die wir nach den Achsen v_x, v_y, v_z bezeichnen wollen. Es ist nun

$$\begin{array}{l} v_x = v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2 + v_3 \cos\alpha_3 + \cdots = \Sigma v_1 \cos\alpha_1 \\ v_y = v_1 \cos\beta_1 + v_2 \cos\beta_2 + v_3 \cos\beta_3 + \cdots = \Sigma v_1 \cos\beta_1 \\ v_z = v_1 \cos\gamma_1 + v_2 \cos\gamma_2 + v_3 \cos\gamma_3 + \cdots = \Sigma v_1 \cos\gamma_1. \end{array}$$

Die resultirende Geschwindigkeit v, mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildend, ergiebt sich hieraus wie folgt:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\Sigma v_1 \cos\alpha_1)^2 + (\Sigma v_1 \cos\beta_1)^2 + (\Sigma v_1 \cos\gamma_1)^2} \quad (21)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v \,.\, \cos\alpha \\ v_y = v \,.\, \cos\beta \\ v_z = v \,.\, \cos\gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Ganz gleiche Formeln lassen sich für die resultirende Beschleunigung j und deren Componenten j_x, j_y, j_z aufstellen:

$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21a)$$

$$\left.\begin{aligned} j_x &= j \,.\, cos\, \alpha \\ j_y &= j \,.\, cos\, \beta \\ j_z &= j \,.\, cos\, \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22a)$$

17 Aus dem Bisherigen ergiebt sich, die Bahn eines Punktes ist eine gerade Linie: 1) wenn der Punkt mit einer Geschwindigkeit behaftet ist, dieselbe mag constant oder veränderlich sein;

2) wenn theils nach derselben, theils nach der gerade entgegengesetzten Richtung sich beliebig viele Einflüsse geltend machen, den Punkt in verschiedenster Weise in Bewegung zu setzen;

3) wenn der Punkt nach den verschiedensten Richtungen auf Bewegung in Anspruch genommen ist und jede der einzelnen Bewegungen entweder gleichförmig oder gleichmäßig verändert, ohne beziehliche Anfangsgeschwindigkeit ist oder auch ganz ungleichförmig sein kann, sobald nur die in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege dasselbe constante Verhältniß haben.

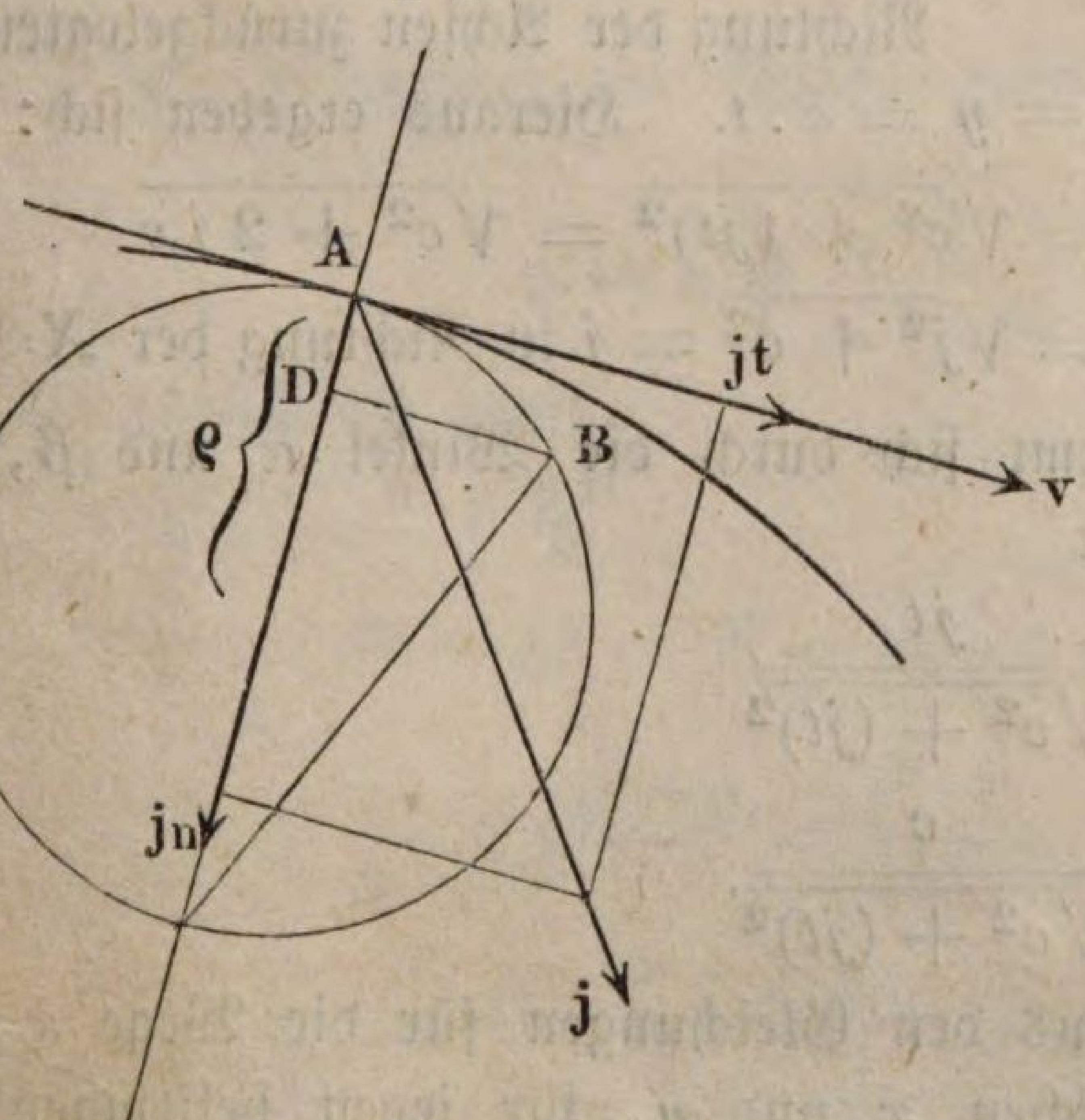
In allen anderen Fällen ist die Bahn des Punktes eine krumme Linie, die eine Curve von einfacher Krümmung heißt, sobald sämmtliche Punkte derselben in einer Ebene liegen, im entgegengesetzten Falle aber Curve doppelter Krümmung genannt wird. Wir nehmen den letzteren, als den allgemeineren Fall an und bestimmen die Lage des Punktes durch seine rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z. Die gerade stattfindende Geschwindigkeit sei v, die wir auf der in dem Punkte construirten Tangente abgetragen denken, welche mit den Achsen die Winkel α, β, γ bilden mag.

Die Geschwindigkeit werde auf die Achsen projicirt, so erhält man in den Projectionen $v_x = v \,.\, cos\, \alpha$; $v_y = v \,.\, cos\, \beta$; $v_z = v \,.\, cos\, \gamma$ die Geschwindigkeiten der Projectionen des bewegten Punktes, aus welchen umgekehrt die Geschwindigkeit v des Punktes selbst nach Größe und Richtung bestimmt ist. In derselben Weise kann man die in dem Zeitmomente gerade stattfindende Beschleunigung j, deren Richtung mit den drei Achsen die Winkel λ, μ, ν bilden mag, nach Richtung derselben in die drei Componenten $j_x = j \,.\, cos\, \lambda$; $j_y = j \,.\, cos\, \mu$; $j_z = j \,.\, cos\, \nu$ zerlegt denken. Diese sind die Beschleunigungen der Projectionen des bewegten Punktes, welche, wenn sie gegeben, zur Bestimmung von j der Größe und Richtung nach genügen. Hiernach führt man die krummlinige Bewegung des Punktes auf die geradlinigen Bewegungen seiner Projectionen zurück, wobei allein darauf zu achten ist, daß man nach jedem Zeitmoment der Bewegung aus den Geschwindigkeiten (Beschleunigungen) der Projectionen die resultirende Geschwindigkeit (Beschleunigung) des Punktes der Größe und Richtung nach bestimmen muß und dadurch allmälig zu der krummen Bahn des Punktes gelangt.

Ist die vom bewegten Punkte beschriebene Curve von einfacher Krümmung, liegt sie also z. B. in der XY-Ebene, so werden die dritten Componenten v_z und j_z Null, und die Bahn sowie die Bewegungsverhältnisse des Punktes finden sich aus den beiden übrig gebliebenen Componenten.

Anstatt die Beschleunigung j nach den drei Achsen in ihre Componenten zu zerlegen, und umgekehrt aus diesen die Berechnung von j vorzunehmen, kann man j nach tangentialer und normaler Richtung zerlegen und auf die Weise eine weitere Einsicht in die krummlinige Bewegung erlangen. Ein Punkt, welcher eine Curve von doppelter Krümmung beschreibt, verändert unter der Einwirkung der veränderlichen Beschleunigung j fortwährend seine Richtung sowie die Ebene seiner Bahn, sodaß im Allgemeinen nur zwei aufeinanderfolgende Wegelemente derselben in einer Ebene angenommen werden dürfen. Diese, die Osculationsebene der Bewegungscurve genannt, enthält auch jederzeit die augenblickliche Richtung der Beschleunigung j, da sie die Geschwindigkeit des vorhergehenden Zeitmoments, in Richtung des ersten Wegelements gelegen, in die Geschwindigkeit des nächstfolgenden umändern muß, welche aber in Richtung des zweiten Wegelements liegt. In der Osculationsebene denke man den Kreis verzeichnet, welcher die beiden Wegelemente, d. h. drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve, in seiner Peripherie enthält. Dieser Kreis heißt Krümmungskreis, sein Radius ϱ Krümmungshalbmesser. Man zerlege nun die Beschleunigung j in dieser Osculationsebene nach tangentialer und normaler Richtung in die beiden Componenten j_t und j_n (Fig. 12). Von diesen beiden kann nur die tangentiale Componente j_t auf die Veränderung der Geschwindigkeit v Einfluß ausüben, die normale Componente j_n dagegen bewirkt die Ueberführung des Punktes aus einer Tangente in die nächstfolgende ohne die Geschwindigkeit dabei zu verändern, j_t und v stehen also in derselben Beziehung zu einander, wie Beschleunigung und Geschwindigkeit bei der geradlinigen Bewegung, also z. B. wie j_x und v_x, j_y und v_y u. s. w. Zur Bestimmung

Fig. 12.



von j_n, in Richtung des Krümmungshalbmessers gelegen, ist AB der auf der Curve und dem Krümmungskreise innerhalb eines Zeitmomentes τ mit der Geschwindigkeit v gleichförmig zurückgelegte Weg, und AD der mit der Beschleunigung j_n in derselben Zeit in gleichmäßig veränderter Bewegung zurückgelegte Weg. Setzt man hierbei den Bogen AB statt der Sehne AB, was bei der Kleinheit des Weges zulässig, so ist

$$\overline{AB}^2 = AD \,.\, 2\,\varrho$$

$$(v \cdot \tau)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot j_n \cdot \tau^2 \cdot 2 \cdot \varrho \text{ und hieraus}$$

$$j_n = \frac{v^2}{\varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

welche Gleichung zugleich zur Berechnung des Krümmungsradius benutzt werden kann, wenn j_n und v gegeben. Zur Bestimmung der augenblicklich stattfindenden Beschleunigung j sind also die beiden folgenden Formeln zu benutzen:

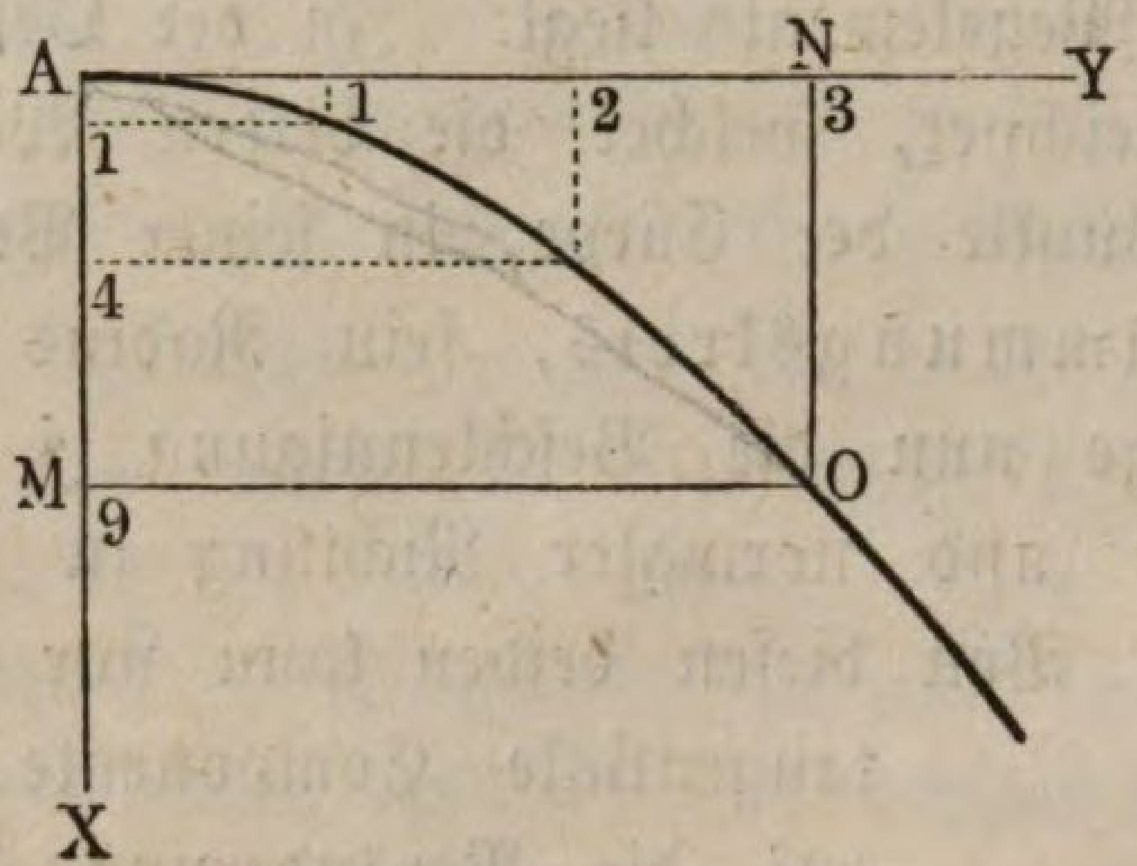
$$j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = \sqrt{j_t^2 + j_n^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

j_n wird die Normal- und j_t die Tangential-Beschleunigung der Bewegung genannt.

18 **Beispiele für krummlinige Bewegungen.**

1) Ein Punkt A (Fig. 13) habe das Bestreben, in der Richtung von $A\,Y$ sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit c zu bewegen, und in der darauf normal stehenden Richtung $A\,X$ dagegen eine gleichmäßig veränderte Bewegung mit der Beschleunigung j anzunehmen. Es sind die Bewegungsverhältnisse des Punktes zu bestimmen. Man nehme die Bewegungsrichtungen als Coordinatenachsen, den Punkt A selbst als Anfangspunkt, dann ist, nach einer beliebigen Zeitdauer von t Secunden, der Aufgabe gemäß $c_x = jt$; $c_y = c$; $j_x = j$; $j_y = 0$; und die in Richtung der Achsen zurückgelegten Wege sind: $A\,M = x = \frac{1}{2}\,jt^2$; $A\,N = y = c\,.\,t$. Hieraus ergeben sich:

Fig. 13.



die resultirende Geschwindigkeit $v = \sqrt{c^2 + (jt)^2} = \sqrt{c^2 + 2\,j\,x}$

die resultirende Beschleunigung $j = \sqrt{j^2 + o^2} = j$ in Richtung der X-Achse.

Die Richtung von v bestimmt sich durch die Winkel α und β, die v mit den Achsen bildet, und es ist

$$\cos\alpha = \frac{jt}{\sqrt{c^2 + (jt)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + (jt)^2}}.$$

Durch Elimination von t aus den Gleichungen für die Wege x und y erhält man die Beziehungen zwischen x und y, für jeden beliebigen Punkt der Bahn, nämlich: $y^2 = \frac{2\,c^2}{j} \cdot x$. Die hierdurch bestimmte krumme Bahn, Parabel genannt, läßt sich in einzelnen Punkten in der Weise bestimmen, daß auf der Y-Achse gleiche Stücke nach der Formel $c\,.\,t$, und auf der X-Achse Stücke nach der Formel $\frac{1}{2}\,jt^2$ abgetragen werden, welche letzteren sich wie die Zahlen 1, 4, 9, 16 ... verhalten müssen. Entsprechende Stücke auf beiden Achsen sind dann zusammengehörige Coordinaten der gesuchten Bahncurve. Um die Länge der Bahn, den von dem Punkte zurückgelegten Weg s zu finden, nehme man die Zeitdauer τ als sehr klein $= \frac{1}{n}$ einer Secunde an,

berechne für diese die Geschwindigkeit $= \sqrt{c^2 + (j\tau)^2}$ und sehe den mit dieser Geschwindigkeit während der Zeitdauer τ durchlaufenen Weg σ_1 als gleichförmig durchlaufen an. Es ist hiernach $\sigma_1 = \tau . \sqrt{c^2 + (j\tau)^2}$ und daraus ergiebt sich dann der Weg $s = \Sigma\sigma_1$, welche Summation um so genauere Resultate liefert, je kleiner τ oder je größer n angenommen wird.

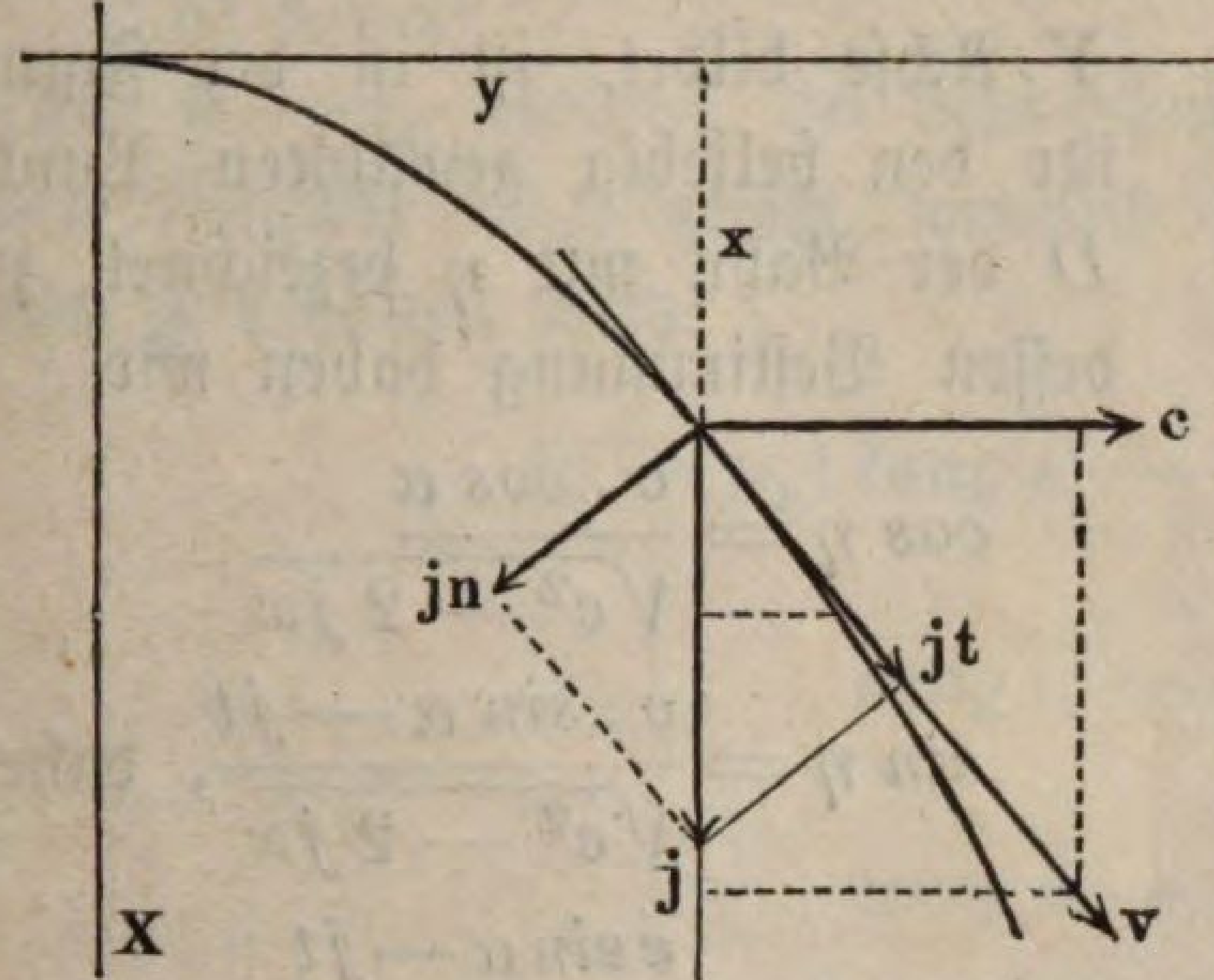
Weiter ist die Normalbeschleunigung:

$$j_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{c^2 + 2jx}{\varrho},$$

und da hier $j : j_n = v : c$, so ist andererseits

$$j_n = j \cdot \frac{c}{v}.$$

Fig. 14.



Hieraus ergiebt sich:

$$\varrho = \frac{(c^2+2jx) \cdot v}{cj} = \frac{\sqrt{(c^2+2jx)^3}}{jc}$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung der Bahn $y^2 = \frac{2\,c^2}{j} x$, worin $\frac{2\,c^2}{j}$ der Parameter der Parabel heißt und mit p bezeichnet wird

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(p + 4\,x)^3}{p}}.$$

Weiter findet sich nun:

$$j^2 = j_n^2 + j_t^2$$

$$j_t^2 = j^2 - j_n^2 = j^2 - \left(j\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{v^2 - c^2}{v^2} \cdot j^2$$

$$j_t = \frac{j}{v} \cdot \sqrt{v^2 - c^2} = \frac{j^2 . t}{v} = \frac{j^2 . t}{\sqrt{c^2 + (jt)^2}}.$$

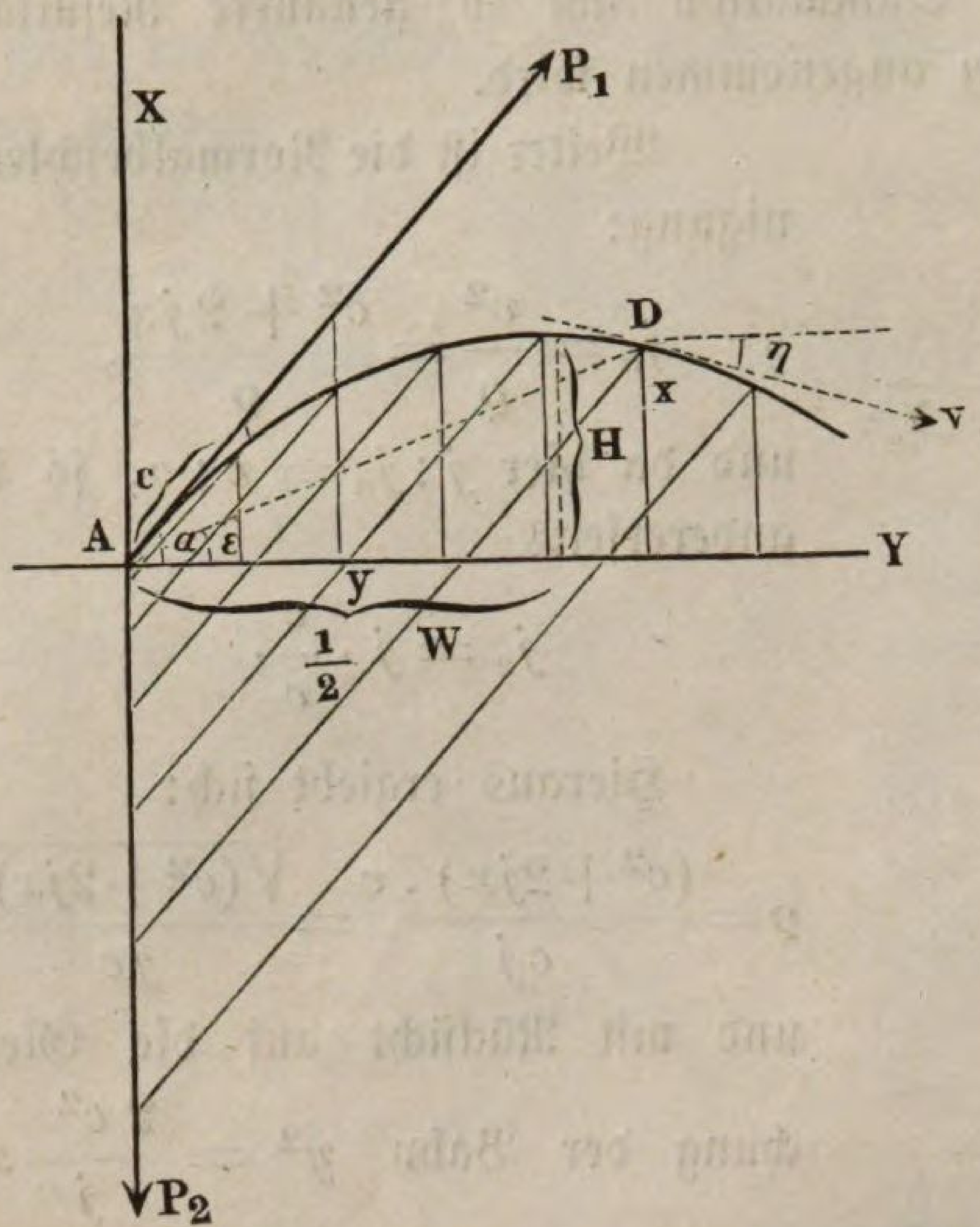
Setzt man in den hier entwickelten Formeln g statt j, so beziehen sich die Verhältnisse auf einen im luftleeren Raume horizontal geworfenen Punkt.

2. Ein Punkt A (Fig. 15 a. f. S.) habe nach der Richtung $A\,P_2$ das Bestreben, sich in gleichmäßig veränderter Bewegung mit der Beschleunigung j zu versetzen, und nach der Richtung $A\,P_1$, die mit $A\,P_2$ einen Winkel von $90 + \alpha$ Graden bildet, sei eine gleichförmige Bewegung von der Geschwindigkeit c möglich. Es sind die Bewegungsverhältnisse des Punktes zu bestimmen.

Wir erwählen $A\,P_2$ zur X-Achse, dabei die nach oben gerichtete Strecke als positiven Theil und nehmen eine in A zu $A\,P_2$ errichtete Normale zur Y-Achse, dann ist der Aufgabe gemäß, sobald die in $A\,P_1$ liegende Geschwindigkeit c nach Richtung der Achsen zerlegt wird, für eine, die beliebige Zeit von t Secunden, dauernde Bewegung: $v_x = c \sin\alpha - jt$; $v_y = c . \cos\alpha$;

$j_x = j;\ j_y = 0;\ x = c\,.\,t\,.\,sin\,\alpha - \frac{1}{2}\,jt^2;\ y = ct\ cos\,\alpha$. Die sich hieraus ergebenden resultirenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind:

Fig. 15.



$$v = \sqrt{(c\,sin\,\alpha - jt)^2 + (c\,.\,cos\,\alpha)^2}$$

oder mit Benutzung von x:

$$v = \sqrt{c^2 - 2\,jx}$$

$$j = \sqrt{j^2 + o^2} = j \text{ in Richtung}$$

der X-Achse.

Der Winkel, den v mit der Y-Achse bildet, ist in der Figur für den beliebig gewählten Punkt D der Bahn mit η bezeichnet, zu dessen Bestimmung haben wir

$$cos\,\eta = \frac{c\,.\,cos\,\alpha}{\sqrt{c^2 - 2\,jx}}$$

$$sin\,\eta = \frac{c\,.\,sin\,\alpha - jt}{\sqrt{c^2 - 2\,jx}}, \text{ daher}$$

$$tang\,\eta = \frac{c\,sin\,\alpha - jt}{c\,.\,cos\,\alpha} = tang\,\alpha - \frac{j}{c^2\,.\,cos\,\alpha^2}\,.\,y.$$

Wird der Winkel ε, den $A\,D$ mit der Y-Achse bildet, mit in die Rechnung aufgenommen, so ergiebt sich $tang\,\varepsilon = \frac{x}{y} = \frac{ct\,.\,sin\,\alpha - \frac{1}{2}jt^2}{ct\,.\,cos\,\alpha} = tang\,\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{j}{c^2\,cos\,\alpha^2}\,.\,y$ und hieraus

$$tang\,\eta = 2\ tang\,\varepsilon - tang\,\alpha.$$

Aus den beiden Gleichungen für die Wege x und y eliminire man t, so erhält man die Beziehung zwischen den Coordinaten x, y irgend eines Punktes der Bahn, d. h. ihre Gleichung

$$x = y\ tang\,\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{j}{c^2\,cos\,\alpha^2}\,.\,y^2.$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ und $y = \frac{c^2}{j}\,sin\,2\,\alpha$, d. h. die Curve schneidet die Y-Achse in zwei Punkten, von denen der Anfangspunkt A der Coordinaten der eine ist. Die Entfernung dieser beiden Punkte mag Wurfweite heißen und mit W bezeichnet werden:

$$W = \frac{c^2}{j}\,sin\,2\,\alpha.$$

Dieselbe wächst unter denselben Verhältnissen mit der Zunahme von $sin\,2\,\alpha$ und wird demnach ein Maximum, wenn $sin\,2\,\alpha = 1$, d. h. für $\alpha = 45^\circ$. Die Wurfweiten W_1 und W_2 sind für zwei Winkel α und β, die sich zu 90° ergänzen, gleich groß, denn $sin\,2\,\alpha = sin\,(180 - 2\,\alpha)$

$$= sin\,2\,(90 - \alpha)$$

$$= sin\,2\,\beta.$$

Daher in diesem Falle $\frac{c^2}{j} \sin 2\,\alpha = \frac{c^2}{j} \sin 2\,\beta$.

Den größten Werth von x wollen wir Wurfhöhe nennen und mit H bezeichnen. Um dieselbe zu finden ist der Werth von y zu bestimmen, für den $y \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} \frac{j}{c^2 \cos \alpha^2} \cdot y^2$ ein Maximum wird. Der benachbarte Werth dieses gesuchten y heiße y_1, so ist für diesen das entsprechende $x_1 = y_1 \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} \frac{j}{c^2 \cos \alpha^2} \cdot {y_1}^2$. Beide Ausdrücke werden von einander subtrahirt, dann durch $y - y_1$ dividirt, bei dem erhaltenen Quotienten $y = y_1$ genommen und das Resultat $= 0$ gesetzt, wodurch die betreffende Gleichung zur Bestimmung von y erhalten wird:

$$(y - y_1) \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} \frac{j}{c^2 \cos \alpha^2} (y^2 - {y_1}^2) = 0$$

$$\operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} \frac{j}{c^2 \cos \alpha^2} \cdot (y + y_1)$$

$$\operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} \frac{j}{c^2 \cos \alpha^2} \cdot 2\,y = 0$$

$$y = \frac{c^2}{j} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{c^2}{j} \cdot \sin 2\,\alpha,$$

d. h. dieser gesuchte Werth ist gleich der halben Wurfweite W. Substituirt man diesen Ausdruck in der obigen Gleichung für x, so entsteht

$$Max\ x = H = \frac{1}{2} \frac{c^2}{j} \cdot \sin \alpha^2.$$

Die Wurfhöhe H wächst mit der Zunahme von $\sin \alpha^2$ und wird deshalb für $\sin \alpha^2 = 1$, also für $\alpha = 90^\circ$ ein Maximum, was bedeutet, daß die anfänglich gleichförmige Bewegung des Punktes in Richtung von AX gelegen sein muß. Um die Form der krummen Bahn erkennen zu können, geben wir der Gleichung eine andere Gestalt, indem wir den höchsten Punkt der Bahn als Coordinaten-Anfangspunkt nehmen, die Achsen in ihren Richtungen beibehalten, für die X-Achse aber den nach unten gerichteten Theil als den positiven annehmen, dann ist

$x = H - x_1$ und
$y = \frac{1}{2} W + y_1$ zu setzen.

Nach Substitution dieser Werthe erhalten wir:

$$H - x_1 = (\tfrac{1}{2} W + y_1) \operatorname{tang} \alpha - \frac{1}{2} \frac{j}{c^2 . \cos \alpha^2} (\tfrac{1}{2} W + y_1)^2$$

und mit Benutzung der Ausdrücke für W und H entsteht

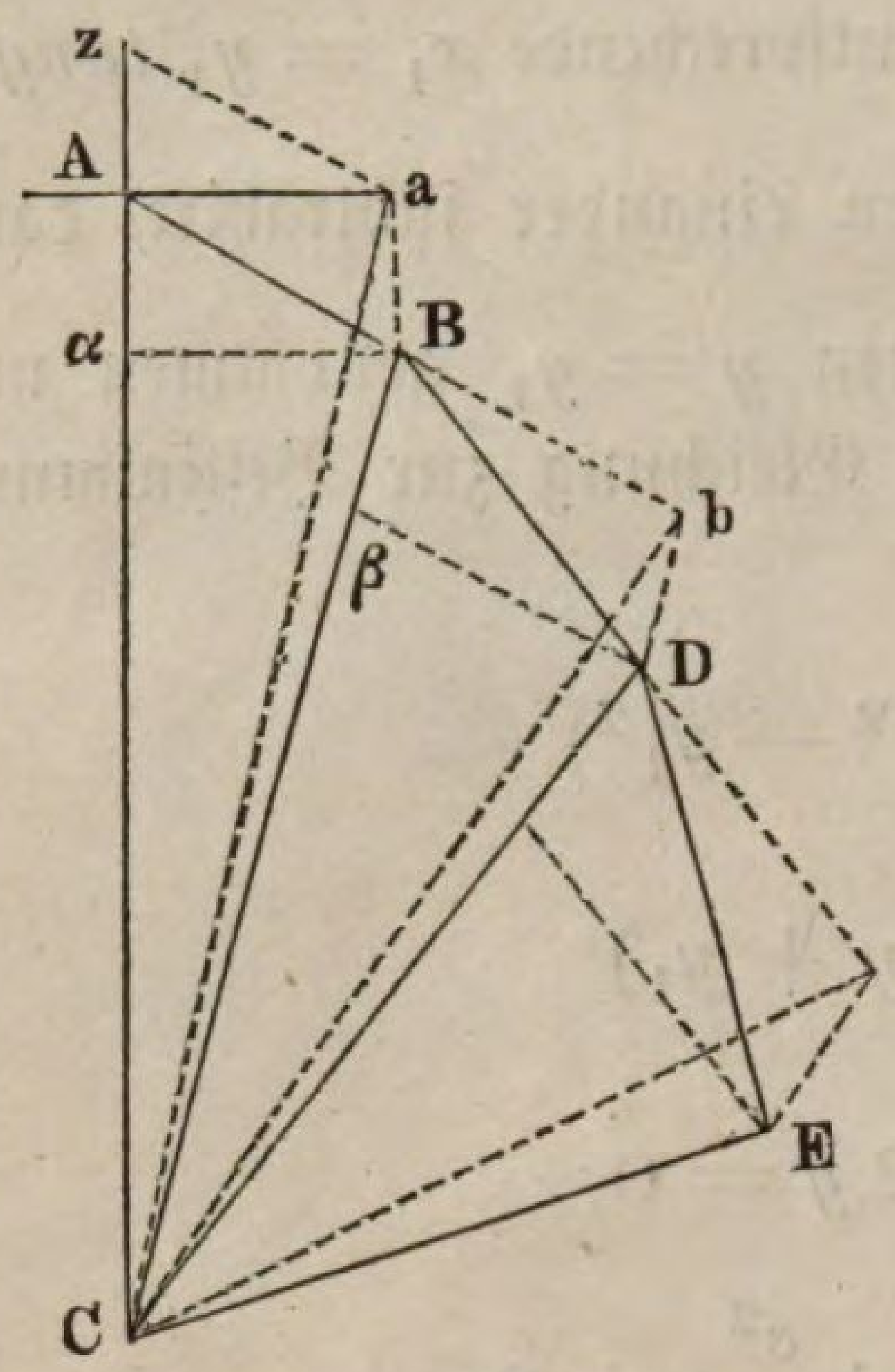
$${y_1}^2 = 2 \frac{c^2 . \cos \alpha^2}{j} \cdot x_1,$$

woraus ersichtlich, daß die Bahn des Punktes auch in diesem Falle eine

Parabel ist. Die entwickelten Formeln lassen sich als Ausgangspunkt für die Ballistik benutzen, wobei g statt j einzuführen ist.

19 Ein Punkt A (Fig. 16) besitze in Richtung von Aa eine Geschwindigkeit c, mit der er sich gleichförmig bewegen würde, zugleich erfahre A von dem Punkte C in jedem Zeitmoment die Anregung einer ungleichförmigen Bewegung mit der Beschleunigung j. Es sind die Bewegungsverhältnisse des Punktes zu entwickeln, unter der Voraussetzung, daß beide Bewegungen in derselben Ebene liegen.

Fig. 16.



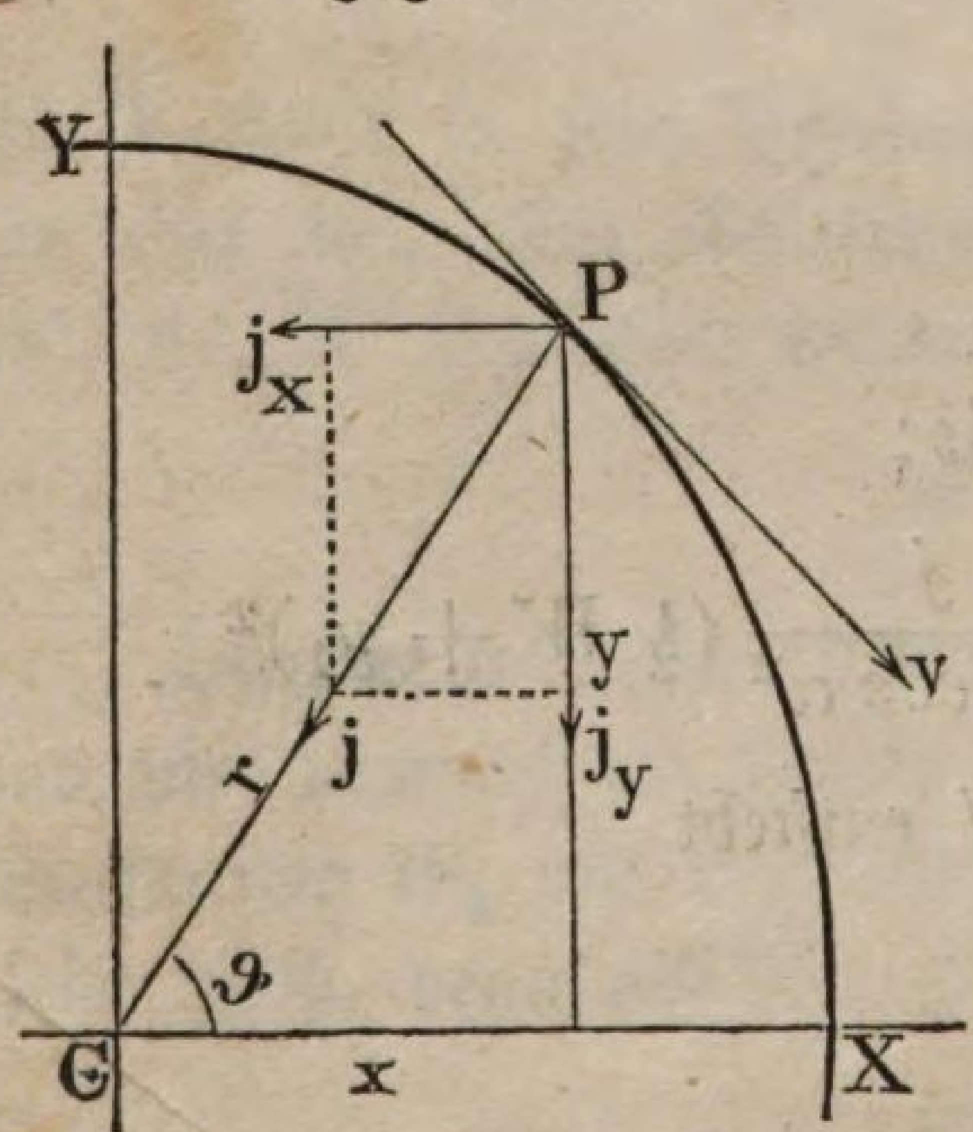
Es sei Aa der in einem Zeitmoment τ durch die Geschwindigkeit c und $A\alpha$ der in derselben Zeit durch die Beschleunigung j von C aus veranlaßte Weg, welchen beiden der Punkt dadurch genügt, daß er sich in derselben Zeit von A bis B bewegt. Könnte man die Wirkung von C außer Kraft treten lassen, so würde sich der Punkt mit der erlangten Geschwindigkeit in Richtung von AB gleichförmig weiter bewegen und am Ende des nächsten Zeitmoments nach b gelangen, wobei $AB = Bb$ sein müßte. Die Wirkung von C hindert dies jedoch, veranlaßt vielmehr ein Hinziehen des Punktes nach C um das Stück $B\beta$, aus welchen beiden Bewegungsrichtungen wieder der Weg BD resultirt. In derselben Weise setzt sich die Bewegung des Punktes fort, der also die gebrochene Linie $ABDE\ldots$ beschreiben wird. Nimmt man die Wirkung von C aus, wie es in der That ist, als ununterbrochen an, so wird sich als Bahn des Punktes eine krumme Linie ergeben, die ihre hohle Seite dem Punkte C, Centralpunkt oder Centrum genannt, zukehrt. Die Verbindungslinie irgend eines Punktes der krummen Bahn mit dem Centrum C heißt Leitstrahl, radius vector.

Man sieht leicht, daß die von dem Leitstrahle in derselben Zeit durchlaufenen Flächenräume einander gleich sind. Es ist nämlich $\triangle CAa = \triangle CAB = \triangle CBb = \triangle CBD$ $=$ u. s. w. und hieraus folgt

$$\triangle CAB = \triangle CBD = CDE = \text{u. s. w.},$$

wodurch die obige Behauptung bewiesen ist. Sind aber die in gleichen Zeiten von dem radius vector durchlaufenen Flächenräume gleich groß, so verhalten sie sich überhaupt wie die Zeiten. Dies hier bei der sogenannten **Centralbewegung** gefundene Gesetz ist bekannt unter dem Namen „**das Princip der Flächen**“.

Fig. 17.



Bei der wirklich stattfindenden krummlinigen Bewegung erscheinen die in einem Zeitmoment von dem Leitstrahl beschriebenen Flächen als Kreisausschnitte mit unendlich kleinem Mittelpunktswinkel. Bezeichnet daher (Fig. 17) für den beliebigen Punkt P der Bahn, r die Länge des Leitstrahls, der mit der X-Achse den Winkel ϑ bilden mag, wobei wir das Achsenkreuz durch das Centrum C gelegt denken, so ist der Inhalt dieser Fläche, unter ϑ_1 und ϑ_2 zwei aufeinanderfolgende Werthe dieser Winkel verstanden,

$$\tfrac{1}{2} r^2 . arc (\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

Ferner ist $j_x = j . cos\, \vartheta = j \frac{x}{r}$ und $j_y = j . sin\, \vartheta = j \cdot \frac{y}{r}$. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{j_x}{x} = \frac{j_y}{y} = \frac{j}{r} \text{ oder}$$

$$y . j_x = x . j_y$$

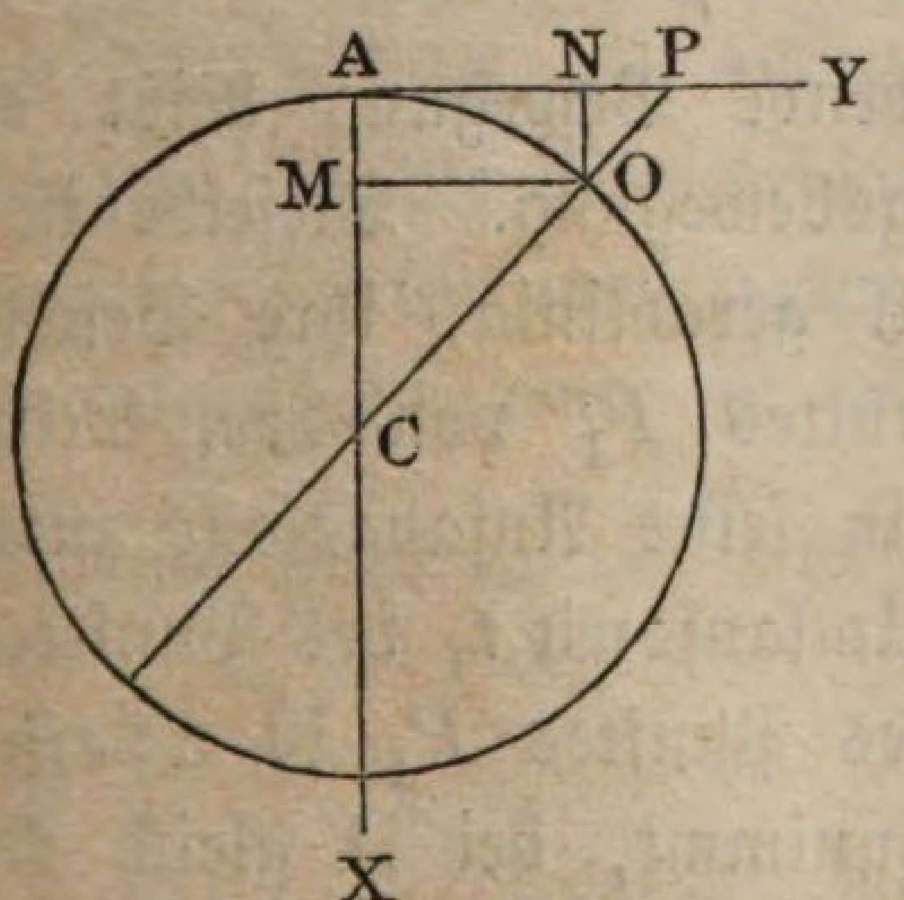
als Bedingung, daß die auf den bewegten Punkt einwirkende Beschleunigung jederzeit durch das Centrum geht, daß wir es also mit einer Centralbewegung zu thun haben.

Die Form der krummen Bahn, die sich mittels höherer Analysis in jedem einzelnen Falle bestimmt, ist abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit des Punktes, von dem Gesetze für die Beschleunigung und von der zu Anfang stattfindenden gegenseitigen Neigung der beiden Bewegungen.

Die bei der Centralbewegung erlangten Geschwindigkeiten sind den Längen AB, BD, DE... (Fig. 16) proportional und verhalten sich als Grundlinien flächengleicher Dreiecke, umgekehrt wie die Höhen derselben, d. h. umgekehrt wie die vom Centrum auf die Curve (Tangente) gefällten Normalen. Da dieselben im Allgemeinen ungleich sind, so wird auch die Bewegung des Punktes auf der Curve eine ungleichförmige sein müssen, die erst dann zu einer gleichförmigen werden kann, wenn die Bahn des Punktes ein Kreis ist. Die Bewegung eines Punktes auf einem Kreise kommt als drehende Bewegung um eine feste Achse sehr häufig zur praktischen Verwendung.

Es sei (Fig. 18) r der Halbmesser des Kreises, auf dessen Umfang der 20
Punkt A bei gleichförmiger Bewegung nach einer Secunde in O anlangt. Der Bogen AO ist dann die Geschwindigkeit c des Punktes. Der zu diesem Bogen gehörige Centriwinkel in Bogenmaß, mit ω bezeichnet, heißt die **Winkelgeschwindigkeit** der kreisförmigen Bewegung. Nach den Gesetzen für die gleichförmige Bewegung ist der nach t Secunden zurückgelegte Weg

Fig. 18.



$$s = c . t = r . \omega . t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Bei der drehenden Bewegung lassen sich die in einer gewissen Zeit gemachten Umläufe direct durch Beobachtung finden, aus denen sich dann durch eine einfache Rechnung

die Geschwindigkeit ergiebt. Man bezieht dabei allgemein die Anzahl der Umdrehungen auf die Zeitdauer von einer Minute, und bezeichnet diese mit u. Für diese Annahme ist

$$s = 2\pi r \,.\, u = c \,.\, 60 = r \,.\, \omega \,.\, 60 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Hieraus ergiebt sich

$$c = 0{,}1047\, r \,.\, u$$
$$\omega = 0{,}1047 \,.\, u$$
$$u = 9{,}5493 \frac{c}{r} = 9{,}5493 \,.\, \omega.$$

Die Beschleunigung j bei dieser Bewegung stimmt mit der Normalbeschleunigung j_n überein und ist n. F. 23, da hier $\varrho = r$ wird:

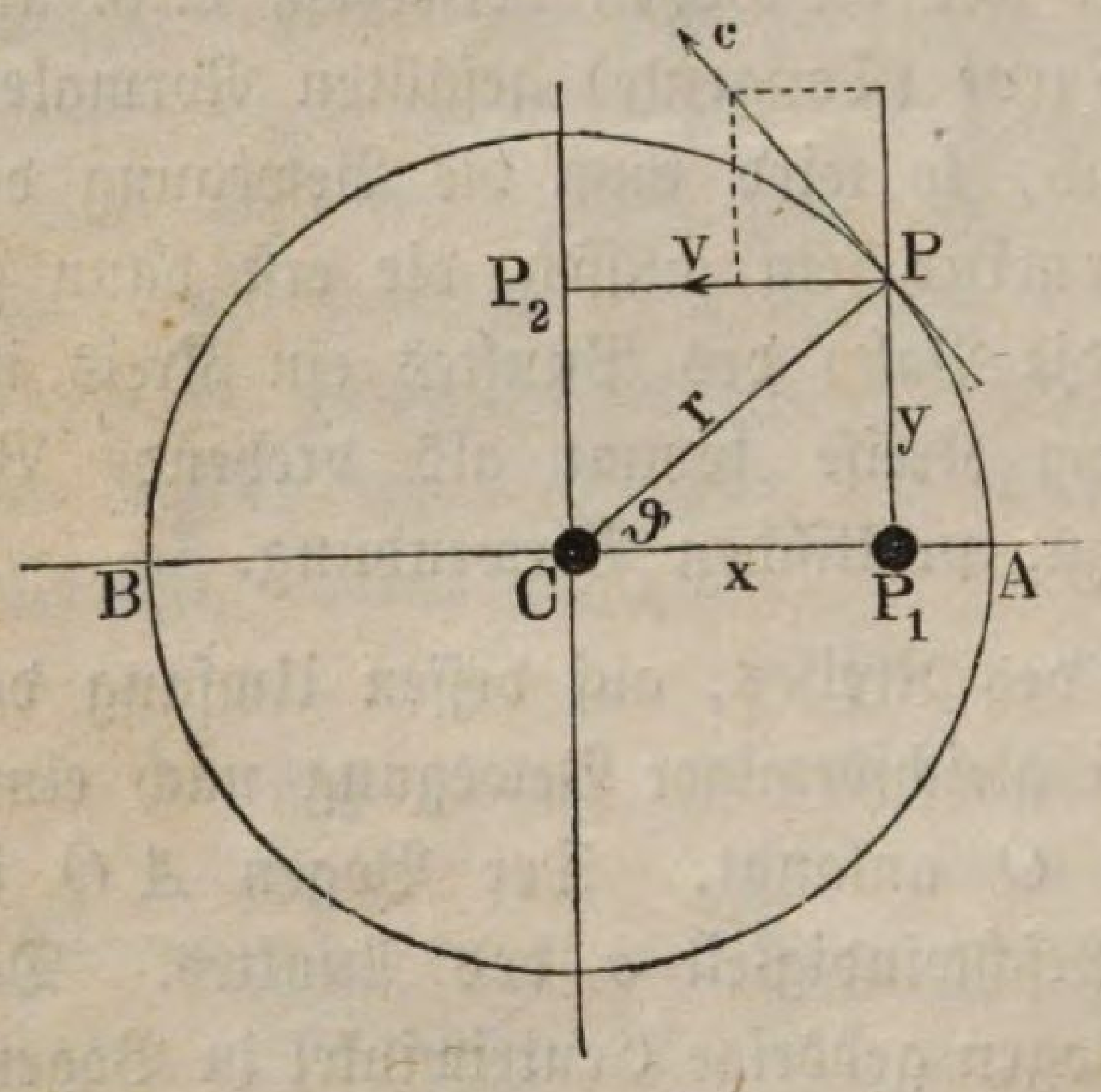
$$j = j_n = \frac{c^2}{r} = r \,.\, \omega^2.$$

Bezeichnet man noch die Zeitdauer eines Umlaufes mit t_1, so hat man

$$2\pi r = c\, t_1;\; c = \frac{2\pi r}{t_1};\; j = \frac{4\pi^2 \,.\, r}{t_1{}^2} \text{ und } t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{r}{j}}.$$

Für einen beliebigen Punkt P der Bahn bilde der Halbmesser r mit der X-Achse den Winkel ϑ (Fig. 19), wobei also das Achsenkreuz durch den Mittelpunkt C gelegt worden, dann ist $j_x = j \,.\, \cos\vartheta = j \cdot \frac{x}{r}\cdot$ Es ist dies zugleich die Beschleunigung der Projection P_1 des Punktes P auf der X-Achse während seiner Bewegung auf der letzteren. Bei einem vollen Umlauf des Punktes P auf dem Kreise mit derselben Geschwindigkeit c bewegt sich P_1 auf dem Durchmesser des Kreises hin und zurück mit der veränderlichen Beschleunigung $j \cdot \frac{x}{r}\cdot$ Eine derartige hin- und hergehende Bewegung heißt eine Schwingungsbewegung. Dieselbe ist in unserm Fall geradlinig, ihre Beschleunigung ist proportional der Entfernung des Punktes P_1 von dem Mittelpunkte C und die Zeit, welche P_1 gebraucht, um in seine Anfangslage zurückzukehren, die Schwingungszeit, stimmt mit der Umlaufszeit t_1 des Punktes P auf dem Kreise überein. Die Geschwindigkeit v des Punktes P_1 ist $c \,.\, \sin\vartheta$, welche also mit der Zunahme des Winkels ϑ zunimmt, bei A gleich Null, bei C gleich c und in B wieder gleich Null ist und für zwei Punkte, die sich in gleicher Entfernung von C befinden, gleiche Werthe annimmt. Um die

Fig. 19.



Schwingungsbewegung unabhängig von der Bewegung auf dem Kreise zu behandeln, führen wir die Beschleunigung ι in der Entfernung 1 vom Centrum ein, und nehmen an, daß dem Winkel ϑ die Zeit t entspreche, dann ist, da

$$\vartheta : 2\pi = t : t_1, \text{ also } \vartheta = 2\pi \frac{t}{t_1} \text{ und } \iota = \frac{j}{r}$$

die Schwingungszeit $t_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\iota}}$,

die halbe Schwingungsweite $r = c \cdot \frac{t_1}{2\pi} = \frac{c}{\sqrt{\iota}}$,

die Beschleunigung am Ende der Schwingung $j = r . \iota = c\sqrt{\iota}$,

die Entfernung des Punktes P_1 vom Schwingungscentrum nach t Secunden

$$x = r . \cos \vartheta = \frac{c}{\sqrt{\iota}} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{t_1}\right)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\iota}} \cdot \cos\left(t\sqrt{\iota}\right).$$

Die veränderliche Geschwindigkeit v des Punktes, die wir, da sie die Entfernung x verkleinert, negativ nehmen, ist

$$v = -c \cdot \sin \vartheta = -c \sin\left(t\sqrt{\iota}\right)$$

und endlich die veränderliche Beschleunigung j_x, ebenfalls negativ genommen

$$j_x = -\iota . x = -\iota . r . \cos \vartheta = -\iota \cdot \frac{c}{\sqrt{\iota}} \cdot \cos\left(t\sqrt{\iota}\right)$$

$$= -c\sqrt{\iota} \cos\left(t\sqrt{\iota}\right).$$

Da wir für die Projection P_2 des Punktes P auf der Y-Achse dieselben Gesetze nachweisen können, so läßt sich die gleichförmige Bewegung auf einem Kreise auch zusammengesetzt denken aus zwei aufeinander normalstehenden geradlinigen Schwingungen von gleicher Schwingungsweite mit einer der Entfernung vom Centrum proportionalen Beschleunigung, wobei die eine Bewegung von ihrem Centrum, die andere von der Schwingungsweite ausgeht.

Eine ungleichförmige Bewegung auf einem Kreise kann keine Centralbewegung sein, die hier auftretende Beschleunigung j liegt nicht in Richtung des Halbmessers, ist vielmehr nach tangentialer und normaler Richtung zu zerlegen in die Componenten j_t und j_n, von denen die erstere die Veränderung in der Geschwindigkeit v bewirkt, die andere den Uebergang des Punktes aus einer Tangente in die andere veranlaßt. Der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r}$ entspricht auch eine veränderliche Winkelbeschleunigung $\iota = \frac{j_t}{r}$.

Besitzt ein Punkt A für dasselbe Centrum C die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2, so sind seine Peripheriegeschwindigkeiten, die Entfernung AC

wieder gleich r angenommen, $r \,.\, \omega_1$ und $r \,.\, \omega_2$, die durch Addition oder Subtraction mit einander zu vereinigen sind, je nachdem der Sinn der Drehung für beide Bewegungen derselbe oder der gerade entgegengesetzte ist. Die algebraische Summe $\Sigma r \,.\, \omega_1$ giebt also in jedem Falle die resultirende Peripheriegeschwindigkeit, aus welcher sich durch Division mit r die betreffende resultirende Winkelgeschwindigkeit $\omega = \Sigma \omega_1$ ergiebt. Das Resultat ändert sich nicht, wenn der Punkt auch mehr als zwei gleichzeitige Winkelgeschwindigkeiten besitzt.

In gleicher Weise lassen sich die Beschleunigungen eines Punktes für mehrere kreisförmige Bewegungen, zu demselben Centrum gehörig, durch algebraische Addition vereinigen und daraus bestimmt sich dann die resultirende Winkelbeschleunigung ι.

Uebungen.

1. Ein Dampfwagen rollt mit einer Geschwindigkeit von 10^m; welchen Weg s wird er nach einer halben Stunde zurückgelegt haben?

$$s = 18000^m = 1800 \text{ Dekameter } (D^m)$$
$$= 180 \text{ Hectometer } (H^m)$$
$$= 18 \text{ Kilometer } (K^m)$$
$$= 1{,}8 \text{ Myriameter } (M^m).$$

2. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit eines Pferdes, das während 4 Stunden einen Weg von 24000^m zurücklegt?

$1{,}667^m = 1^m$ 6 Decimeter (dm) 6 Centimeter (cm) 7 Millimeter (mm).

3. Ein Bote, der sich mit einer Geschwindigkeit von $1{,}5^m$ bewegt, soll einen Weg von $300 D^m$ zurücklegen. In welcher Zeit kann er das ausführen?

$33\frac{1}{3}$ Minuten.

4. Ein Courier mache in a Stunden b Meilen. n Stunden nach seiner Abreise werde ihm ein zweiter nachgeschickt, der in c Stunden d Meilen macht. Der Ort, aus welchem der zweite Courier abgeht, liege um q Meilen gegen den ersten Ort zurück oder vor. In welcher Zeit erreicht der zweite Courier den ersten?

In $\dfrac{nb \pm aq}{ad - cb}\, c$ Stunden.

5. Für die vorige Aufgabe ist das bestimmte Resultat anzugeben, wenn:

$$a = 8, \quad c = 10,$$
$$b = 5\tfrac{1}{3}, \quad d = 8,$$
$$n = 6 \quad \text{und} \quad q = 12$$

gesetzt wird und der zweite Ort gegen den ersten zurück liegt.

In 120 Stunden.

6. Ein auf der Oberfläche eines Flusses schwimmender Körper legt während 3 Minuten einen Weg von 150^m zurück. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Körpers oder die Geschwindigkeit des fließenden Wassers an der Oberfläche?

$0{,}833^m = 8^{dm}\ 3^{cm}\ 3^{mm}$.

7. Ein Mensch bewege sich auf dem Verdecke eines Schiffes mit einer Geschwindigkeit von $1{,}5^m$ in Richtung der Bewegung, während das Schiff selbst eine Geschwindigkeit von 7^m hat. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Menschen für die als fest angenommene Erdoberfläche?

$$8{,}5^m.$$

8. Ein Körper bewege sich in t Secunden von A nach B. Die beiden Punkte liegen in einer Ebene und sind durch ihre Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben. Es ist hieraus die Geschwindigkeit des Körpers sowie die Richtung von AB gegen die X-Achse zu finden:

$$c = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{t}$$

$$tang\, \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

9. Ein Körper befinde sich 10 Secunden lang in gleichmäßig beschleunigter Bewegung mit der Beschleunigung 8^m. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Körpers nach dieser Zeit und wie groß ist der durchlaufene Weg?

$$v = j\,t \text{ und } s = \tfrac{1}{2} j\,t^2$$

$$v = 80;\ s = 400^m = 4\,H^m.$$

10. Ein Körper besitzt eine Geschwindigkeit von $7{,}7^m$ und wird in eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung versetzt, deren Acceleration $5{,}5^m$ ist. Nach welcher Zeit hat der Körper einen Weg von 2200^m zurückgelegt?

$$s = c\,.\,t + \tfrac{1}{2} j\,t^2$$

$$t = 26{,}9 \text{ Secunden.}$$

11. Ein Körper, der sich in gleichmäßig veränderter Bewegung befunden, habe bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 7^m eine Endgeschwindigkeit von 125^m erlangt und dabei einen Weg von 3250^m zurückgelegt. Wie groß war die für die Bewegung vorhandene Beschleunigung?

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2j},\ j = 2{,}4^m.$$

12. Ein Körper bewege sich bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 100^m und einer Acceleration von 1^m gleichmäßig verzögert und erlange eine Endgeschwindigkeit von 7^m. Wie viel Zeit ist dazu erforderlich und welchen Weg hat der Körper zurückgelegt?

$$v = c - j\,t$$

$$s = c\,t - \tfrac{1}{2} j\,t^2$$

$$93 \text{ Secunden; } 4975{,}5^m.$$

13. Eine Locomotive habe in einem bestimmten Augenblicke eine Geschwindigkeit von 13^m. Sie werde so gebremst, daß sie in jeder Secunde 2^m an Geschwindigkeit verliert.

a. Wie groß ist die Geschwindigkeit nach 6 Secunden, wie groß ist der zurückgelegte Weg?

b. Nach welcher Zeit steht die Locomotive still?

c. Wie groß muß die Geschwindigkeitsabnahme sein, damit die Locomotive nach 30 Secunden in Ruhe kommt?

a. 1^m; 42^m; b. 6,5 Secunden; c. $4{,}3^{dm}$.

14. Ein Körper ist im luftleeren Raume 4 Secunden frei gefallen. Wie groß ist die erlangte Endgeschwindigkeit, wie groß der durchfallene Weg?

$39{,}24^m$; $78{,}48^m$.

15. Ein im luftleeren Raume frei fallender Körper hat eine Endgeschwindigkeit von 250^m erhalten. Wie lange ist der Körper gefallen, welchen Weg hat er zurückgelegt?

25,48 Secunden; 3185^m.

16. Ein Körper hat im luftleeren Raume einen Weg von 85^m frei fallend zurückgelegt. Wie lange ist der Körper gefallen, welche Endgeschwindigkeit hat er erlangt?

4,1 Secunden; $40{,}22^m$.

17. Wie hoch steigt ein Körper, der mit einer Geschwindigkeit von 40^m senkrecht im luftleeren Raume in die Höhe geworfen wird, und welche Zeit gebraucht er dazu?

4,07 Secunden; $81{,}55^m$.

18. Ein Körper, der im luftleeren Raume senkrecht in die Höhe geworfen wurde, kam nach $18\frac{1}{2}$ Secunden zur Erde zurück. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers, wie hoch war er gestiegen?

$90{,}74^m$; $419{,}67^m$.

19. Welchen Raum durchfällt ein in einen Brunnen senkrecht hinabgeworfener Stein, den man nach t Secunden aufschlagen hört, wenn man den Luftwiderstand nicht berücksichtigt und die Geschwindigkeit des Schalls gleich a^m setzt?

$$a\,\frac{g\,t + a - \sqrt{2\,a\,g\,t + a^2}}{g}.$$

20. In Schweden giebt es Höhlen, für die t gleich 25 zu setzen ist. Wie tief sind dieselben, wenn die Geschwindigkeit des Schalls zu 340^m gerechnet wird?

1870^m.

21. Ein Körper, der im luftleeren Raume frei fällt, hat an einem gewissen Punkte seiner Bahn eine Geschwindigkeit von 17^m, an einem tiefer gelegenen dagegen eine Geschwindigkeit von 90^m. Wie groß ist die Entfernung der beiden Punkte; welche Zeit gebraucht der Körper, um dieselbe zurückzulegen?

$398{,}11^m$; 7,44 Secunden.

22. Ein Punkt hat nach zwei auf einander normalen Richtungen die Geschwindigkeiten (Beschleunigungen) von 35^m und 87^m. Es ist die resultirende Geschwindigkeit (Beschleunigung) der Größe und Richtung nach zu bestimmen.

$93{,}77^m$; $68^\circ\,5'$ mit der Geschwindigkeit von 35^m.

23. Man soll die einem Punkte eigene Geschwindigkeit von 120^m in zwei aufeinander rechtwinklige Geschwindigkeiten zerlegen, von denen

a) die eine gleich 75^m sein mag;

b) die eine einen Winkel von $34°7'3''$ mit der resultirenden Geschwindigkeit bilden soll.

a. $51°19'4''$ mit 75^m; $93{,}65^m$.

b. $99{,}343^m$ an dem gegebenen Winkel liegend; $67{,}306^m$.

24. Ein Punkt hat das Bestreben, sich nach drei aufeinander normalen Richtungen, die also nicht in einer Ebene liegen, in gleichmäßig veränderte Bewegung mit den Beschleunigungen 35^m, 67^m und 98^m zu versetzen. Es ist die Größe und Richtung der resultirenden Beschleunigung zu bestimmen.

$123{,}766^m$; $73°34'24''$, $57°13'30''$, $37°38'42''$.

25. Ein Punkt besitzt eine Geschwindigkeit von 550^m, die nach drei aufeinander normalen Richtungen zerlegt werden soll, wenn

a) zwei der Componenten 100^m und 230^m betragen;

b) eine der Componenten eine Größe von 120^m hat und die gegebene Geschwindigkeit mit einer zweiten Componente den Winkel $15°6'14''$ bildet;

c) die gegebene Geschwindigkeit mit zweien der Componenten die Winkel $87°13'12''$ und $54°17'8''$ bildet.

a. $489{,}49^m$; $73°31'27''$, $65°16'49''$, $27°7'43''$.

b. 120^m mit $77°23'51''$; $531{,}02^m$ mit $15°6'14''$; $78{,}2^m$ mit $81°49'32''$.

c. $445{,}7^m$; $321{,}06^m$; $26{,}676^m$; $36°23'48''$.

26. Ein Punkt besitze nach vier in einer Ebene liegenden Richtungen die Geschwindigkeiten (Beschleunigungen) 12^m, 24^m, 36^m, 48^m, die mit einer durch den Punkt gezogenen Linie, der X-Achse, nach der Reihe die Winkel $16°$, $29°$, $33°$, $75°$ bilden. Es ist die resultirende Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach zu bestimmen.

$v_x = 75{,}142$; $v_y = 80{,}915$; $v = 110{,}424$; $\alpha = 47°7'10''$; $\beta = 42°52'50''$.

27. Auf einem Flusse, der mit einer Geschwindigkeit von 1^m fließt, erhält ein Kahn durch Ruderer unter einem Winkel von $30°$ gegen den Strom eine Geschwindigkeit von $1{,}3^m$. Es ist die Größe und Richtung der resultirenden Geschwindigkeit zu bestimmen:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\, c_1\, c_2 \cos\alpha}$$

$$c_1 : c_2 : c = \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 : \sin\alpha$$

$$c = 0{,}66^m$$

$$\alpha_1 = 100°57'$$

$$\alpha_2 = 49°3'.$$

28. Zwei in einem Punkte wirksame Beschleunigungen von 115^m und 89^m bilden miteinander den Winkel $147°8'3''$.

a. Wie groß ist die resultirende Beschleunigung?

b. Wie groß ist der Winkel, den die gegebenen Beschleunigungen mit-

einander bilden, wenn die resultirende Beschleunigung gleich der kleineren oder gleich der größeren der gegebenen Beschleunigungen ist?

a. $62{,}865^m$ mit 89^m den Winkel $83^\circ 4'$ bildend.

b. $130^\circ 14' 44''$; $112^\circ 45' 54''$.

29. Die einem Punkt eigene Beschleunigung von $77{,}5^m$ soll in zwei Beschleunigungen zerlegt werden:

a. wenn die Componenten mit der gegebenen Beschleunigung die Winkel $35^\circ 7' 11''$ und $52^\circ 9' 8''$ bilden;

b. wenn eine der Componenten gleich $50{,}5^m$ ist und mit der gegebenen Beschleunigung einen Winkel von $36^\circ 8' 6''$ bildet;

c. wenn eine der Componenten gleich $60{,}0^m$ genommen wird und die andere noch zu bestimmende Componente mit der gegebenen Beschleunigung den Winkel $47^\circ 10' 11''$ bildet;

d. wenn die beiden Componenten der Größe nach gleich 46,2 und $35{,}0^m$ gegeben sind.

a. $61{,}265^m$, $44{,}634^m$.

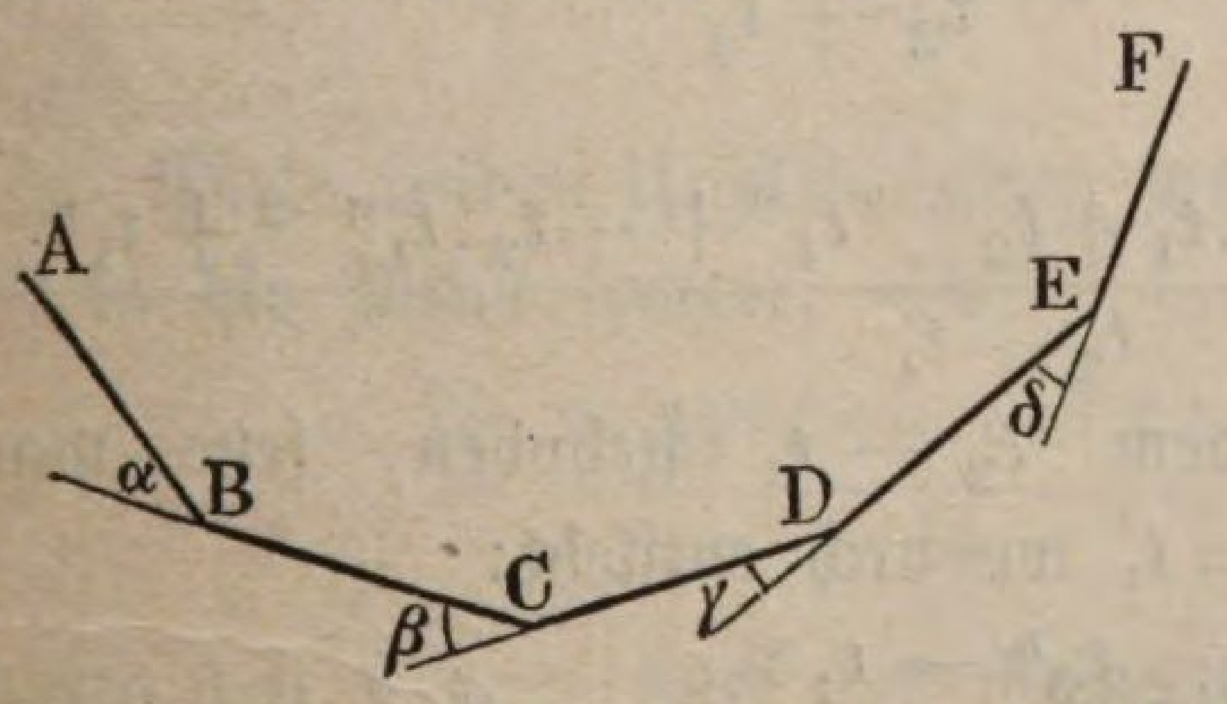
b. $47{,}27^m$, $39^\circ 2' 3''$.

c. $71{,}88^m$ oder $33{,}48^m$, $61^\circ 28' 17''$ oder $24^\circ 9' 4''$.

d. Beide Componenten bilden den Winkel $35^\circ 4'$ und die resultirende Beschleunigung schließt mit $46{,}2^m$ den Winkel $15^\circ 2' 18''$ ein.

30. Ein Körper bewege sich längs der gebrochenen Linie $ABCDEF$ (Fig. 20); α, β, γ, δ seien die Winkel, die die aufeinander folgenden Theile der Linie miteinander bilden. Der Körper habe zu Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit c gehabt. Mit welcher Geschwindigkeit v kommt der Körper nach F?

Fig. 20.



$$v = c \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \cos\delta.$$

31. Die Beschleunigung j, die Geschwindigkeit v und der Weg s sind bei jeder Bewegung von der Zeitdauer t abhängig, d. h. es lassen sich jederzeit Zahlenausdrücke angeben, welche t als die Veränderliche enthalten und den obigen Werthen j, v, s gleich sind. Diese Zahlenausdrücke wollen wir Functionen von t nennen und dies durch einen der Buchstaben f, F, $\mathfrak{F}$ anzeigen. Für jede Bewegung bestehen hiernach die drei Gleichungen $j = f_t$, $v = F_t$, $s = \mathfrak{F}_t$. Der Zusammenhang dieser drei Functionen ist in §. 13 dargethan und gezeigt worden, daß die Quadratur der Beschleunigungscurve (f_t) die Geschwindigkeit v und die Quadratur der Geschwindigkeitscurve (F_t) den durchlaufenen Weg s liefert. Bezeichnen wir die Quadratur der von einer Curve begrenzten Fläche, mit Q (das gewöhnlich benutzte Zeichen ist $\int$), so ist

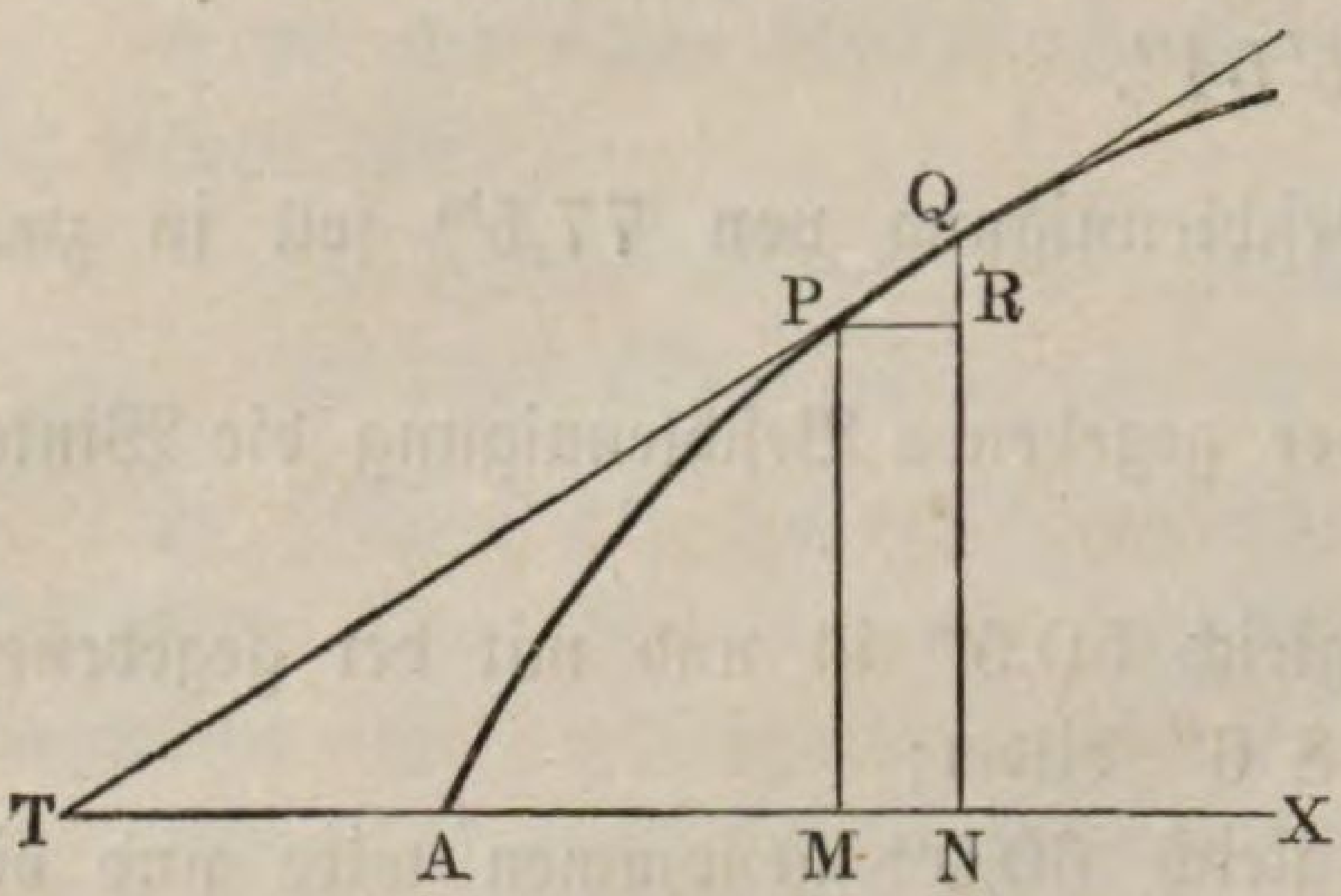
$$Qj = Qf_t = v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und

$$Qv = QF_t = s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Weiter ist nach §. 4 $tang\ \varphi = v$, unter φ den Winkel verstanden, den die geometrische Tangente irgend eines Punktes der Wegcurve ($\mathfrak{F}_t$) mit der X-Achse bildet und $tang\ \psi = j$, wenn ψ den Winkel vorstellt, den die geometrische Tangente irgend eines Punktes der Geschwindigkeitscurve (F_t) mit der X-Achse bildet. Es ist aber (Fig. 21) $tang\ \varphi = \frac{QR}{PR} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$, wenn s_2 und s_1, also auch t_2 und t_1 aufeinander folgende Werthe vorstellen, was wir durch Vorsetzung des Wortes „lim" (limes, Grenzwerth) bezeichnen wollen. Wir haben hiernach

Fig. 21.



$$tang\ \varphi = lim \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = lim \frac{\mathfrak{F}_{t2} - \mathfrak{F}_{t1}}{t_2 - t_1} = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und ebenso

$$tang\ \psi = lim \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = lim \frac{F_{t2} - F_{t1}}{t_2 - t_1} = j \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die uns vorkommenden Bewegungen sind durch algebraische Functionen von t ausdrückbar d. h. in diesen Functionen erscheinen nur Potenzen von t mit geraden Exponenten, so daß es sich bei Berechnung der obigen vier Gleichungen um Bestimmung der Werthe von $lim \frac{t_2^n - t_1^n}{t_2 - t_1}$ und Qt^n handelt.

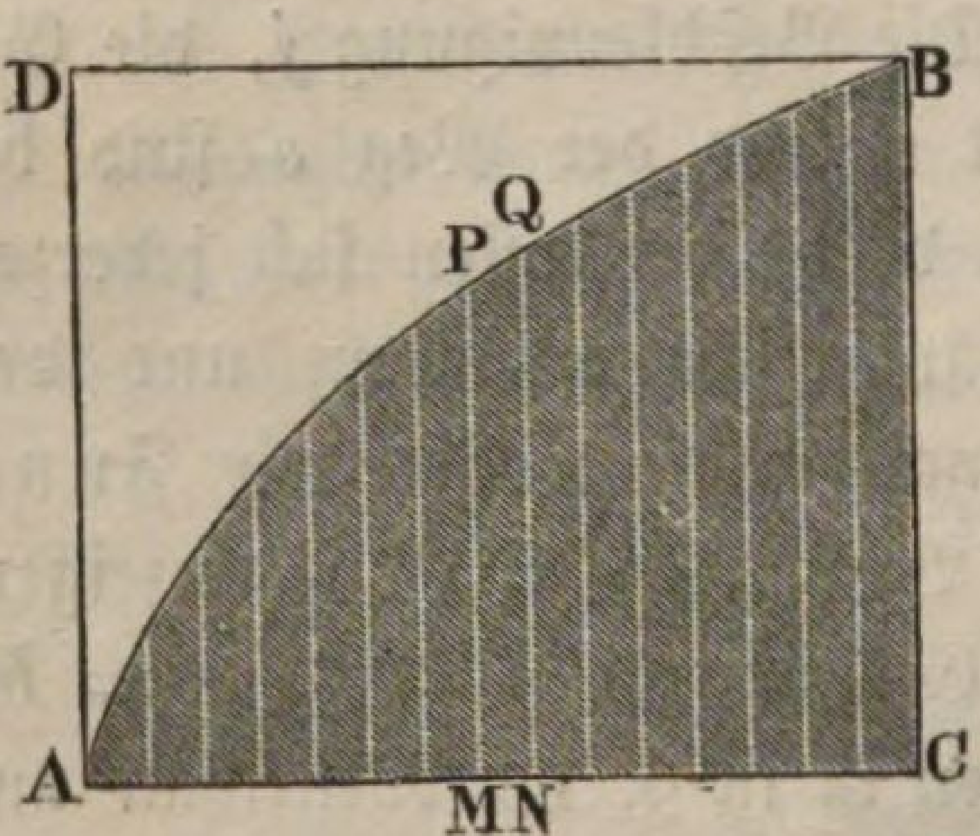
Es ist

$$lim \frac{t_2^n - t_1^n}{t_2 - t_1} = lim \frac{(t_2 - t_1)\,(t_2^{n-1} + t_2^{n-2}.t_1 + t_2^{n-3}t_1^2 + \cdots t_2.t_1^{n-2} + t_1^{n-1}}{t_2 - t_1}$$

Nachdem $t_2 - t_1$ gehoben, setze man $t_2 = t_1 = t$, wodurch entsteht:

$$lim \frac{t_2^n - t_1^n}{t_2 - t_1} = n \cdot t^{n-1}.$$

Fig. 22.



Zur Bestimmung von Qt^n denke man (Fig. 22) die zu berechnende Fläche in die elementaren Rechtecke zerlegt, deren eine Seite MN gleich $\frac{t}{m}$ ist und deren andere Seiten der Reihe nach $\left(\frac{t}{m}\right)^n$, $\left(\frac{2\,t}{m}\right)^n$, $\left(\frac{3\,t}{m}\right)^n$ bis $\left(\frac{m-1}{m}t\right)^n$ sind. Hiernach ist also:

$$Qt_n = lim \left\{\frac{t}{m}\left[o^n + \left(\frac{t}{m}\right)^n + \left(\frac{2\,t}{m}\right)^n + \left(\frac{3\,t}{m}\right)^n + \cdots \left(\frac{m-1}{m}\,t\right)^n\right]\right\}$$

$$= lim \left\{t^{n+1}.\frac{1^n + 2^n + 3^n + \cdots (m-1)^n}{m^{n+1}}\right\}$$

$$= t^{n+1} \cdot lim\left(\frac{1^n + 2^n + 3^n + \cdots (m-1)^n}{m^{n+1}}\right).$$

Zur Berechnung des Zählers vorstehenden Ausdrucks gehen wir von der algebraischen Formel aus:

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots ab^{n-1} + b^n.$$

Nehmen wir hier an, daß $a > b$, und setzen einmal in dem Ausdruck statt b überall a, so wird der Ausdruck rechts zu groß, wird dagegen anstatt a überall b gesetzt, so wird die rechts stehende Summe zu klein. Wir erhalten bei diesen Substitutionen die doppelte Ungleichheit:

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \begin{cases} < (n+1) \cdot a^n \\ > (n+1) \cdot b^n \end{cases}$$

In der ersten Ungleichheit setzen wir $a = x$ und $b = x - 1$, in der zweiten $a = x + 1$ und $b = x$, so entsteht:

$$x^{n+1} - (x-1)^{n+1} < (n+1) \cdot x^n \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oder

$$\frac{x^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{n+1} < x^n \text{ und}$$

$$(x+1)^{n+1} - x^{n+1} > (n+1) \cdot x^n \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

oder

$$\frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} > x^n.$$

Diese beiden Ungleichheiten werden derartig in eine zusammengefaßt, daß x^n in die Mitte kommt, also

$$\frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{n+1} > x^n > \frac{x^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{n+1},$$

worin wir für x, nach der Reihe 1, 2, 3, 4, bis $(m-1)$ setzen und dann die erhaltenen Ungleichheiten zusammenzählen.

$$\frac{2^{n+1} - 1^{n+1}}{n+1} > 1^n > \frac{1^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1} > 2^n > \frac{2^{n+1} - 1^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{4^{n+1} - 3^{n+1}}{n+1} > 3^n > \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$$

u. s. w. bis

$$\frac{m^{n+1} - (m-1)^{n+1}}{n+1} > (m-1)^n > \frac{(m-1)^{n+1} - (m-2)^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{m^{n+1} - 1}{n+1} > 1^n + 2^n + 3^n + \cdots (m-1)^n > \frac{(m-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Wird die negative 1 linker Hand noch weggelassen, so wird die Ungleichheit stärker und man hat nach einfacher Umformung

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1^n + 2^n + 3^n + \cdots (m-1)^n}{m^{n+1}} > \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Läßt man hierin m bis ins Unendliche wachsen, so nähert sich der Ausdruck rechts immer mehr und mehr dem Ausdruck links $= \frac{1}{n+1}$, weshalb der Grenzwerth des mittleren Ausdrucks gleich $\frac{1}{n+1}$ gesetzt werden muß und dadurch der zu entwickelnde Werth $Q\,t^n$ sich ergiebt zu

$$Q\,t^n = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

32. Es sind die Bewegungsverhältnisse eines Punktes zu bestimmen, für den gegeben ist

$c_x = o, j_x = 16;\ c_y = -32;\ j_y = 4t$, daher

$$j = \sqrt{16^2 + (4t)^2};\ cos\,\lambda = \frac{16}{\sqrt{16^2+(4t)^2}};\ cos\,\mu = \frac{4t}{\sqrt{16^2+(4t)^2}}$$

$$v_x = 16t;\ v_y = -32 + 2t^2$$

$$v = \sqrt{(16t)^2 + (2t^2-32)^2} = 2t^2 + 32;\ cos\,\alpha = \frac{8t}{t^2+16};\ cos\,\beta = \frac{t^2-16}{t^2+16}$$

$$j_t = 4t$$

$j_n = \sqrt{j^2 - j_t^2} = 16$ und da $\varrho = \frac{v^2}{j_n}$, so erhält man $\varrho = \frac{(2t^2+32)^2}{16}$.

Es ist weiter $x = 8t^2$

$$y = \tfrac{2}{3}t^3 - 32\,t$$

und durch Elimination von x ergiebt sich die Gleichung der Bahn

$$y = \tfrac{2}{3}\frac{x}{8}\sqrt{\frac{x}{8}} - 32\sqrt{\frac{x}{8}} = \sqrt{\frac{x}{8}}\left(\frac{x}{12} - 32\right).$$

Aus v erhält man noch den Weg $s = \frac{2}{3}t^3 + 32\,t$.

33. Die Bewegungsverhältnisse eines Punktes zu finden, für den gegeben ist: $c_x = 2,\ j_x = o;\ c_y = o,\ j_y = 3;\ c_z = 4,\ j_z = 5$.

$$j = \sqrt{o^2+3^2+5^2} = \sqrt{34};\ cos\,\lambda = \frac{o}{\sqrt{34}} = 0;\ cos\,\mu = \frac{3}{\sqrt{34}};\ cos\,\nu = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$v_x = 2;\ v_y = 3t;\ v_z = 4+5t;\ v = \sqrt{2^2+(3t)^2+(4+5t)^2} = \sqrt{34t^2+40t+20}$$

$$cos\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{34\,t^2+40\,t+20}};\ cos\,\beta = \frac{3\,t}{\sqrt{34\,t^2+40t+20}};$$

$$cos\,\gamma = \frac{4+5t}{\sqrt{34\,t^2+40\,t+20}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = \frac{3}{2}t^2 \\ z = 4t + \frac{5}{2}t^2 \end{array}\right\}$$

Aus je zweien dieser Gleichungen werde t eliminirt, so erhält man: $y = \frac{3}{8}x^2$

$$z = 2x + \frac{5}{8}x^2.$$

Diese Gleichungen sind die Projectionen der Bahn im Raume auf die XY- und XZ-Ebene, und die Durchschnittslinie der zu diesen Curven gehörigen projicirenden Flächen, ist die Bahn selbst.

34. Um wie viel ist eine in horizontaler Richtung abgeschossene Kugel nach $^1/_2$ Secunde gesunken?

$$y^2 = \frac{2\,c^2}{g}\,x$$

1,23^m.

35. Von einem Punkte, der 1,8^m über einer Horizontalebene liegt, wird ein Körper mit einer Geschwindigkeit von 10^m horizontal geworfen. Nach welcher Zeit erreicht er die feste Horizontalebene, welche Größe hat die Wurfweite?

0,6 Secunden; 6^m.

36. Unter einem Elevationswinkel von 30° soll ein Gebäude, das sich in einer horizontalen Entfernung von 1200^m befindet, beschossen werden.

a. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muß der Schuß geschehen?
b. Nach welcher Zeit schlägt die Kugel auf?
c. Wie groß ist die Wurfhöhe bei diesen Angaben?
d. Mit welcher Geschwindigkeit trifft die Kugel das Ziel?

$$x = y\,tang\,\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{g}{(c\,.\,cos\,\alpha)^2}\,y^2.$$

a. 116,6^m; b. fast 12 Secunden; c. 173,21^m; d. Anfangsgeschwindigkeit.

37. Ein Gebäude soll von einem Punkte, der 100^m tiefer gelegen ist und sich in einer horizontalen Entfernung von 1525^m befindet, mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 150^m beschossen werden:

a. Welcher Elevationswinkel muß dabei zur Anwendung kommen?
b. Mit welcher Geschwindigkeit trifft das Wurfgeschoß das Gebäude?
c. Wie viel Zeit ist zu einem Schusse erforderlich?

$$tang\,\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^4 - g\,(g\,y^2 + 2\,c^2\,x)}}{g\,y}.$$

a. $\left\{\begin{array}{l} 68°\,28'\,50'' \text{ für Bomben,} \\ 25°\,16' \text{ für scharfe Schüsse.} \end{array}\right.$

b. 143,3^m.

c. $\left\{\begin{array}{l} 27{,}72 \text{ Secunden für Bomben,} \\ 11{,}24 \quad\text{,,}\quad \text{für scharfe Schüsse.} \end{array}\right.$

38. Von einer Anhöhe soll ein Gebäude beschossen werden, das 70^m tiefer als die Anhöhe in einer horizontalen Entfernung von 800^m liegt. Das Geschütz ist für die größte Wurfweite gerichtet, der Elevationswinkel ist also 45°.

a. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muß die Kugel abgeschossen werden?
b. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit beim Aufschlagen?
c. Unter welchem Winkel trifft die Kugel das Gebäude?

a. 84,95^m; b. 92,6^m; c. 49° 33′.

39. Wie groß ist die Winkel- und Peripheriegeschwindigkeit eines Körpers, der einen Kreis von 4^m Halbmesser in 10 Secunden durchläuft?

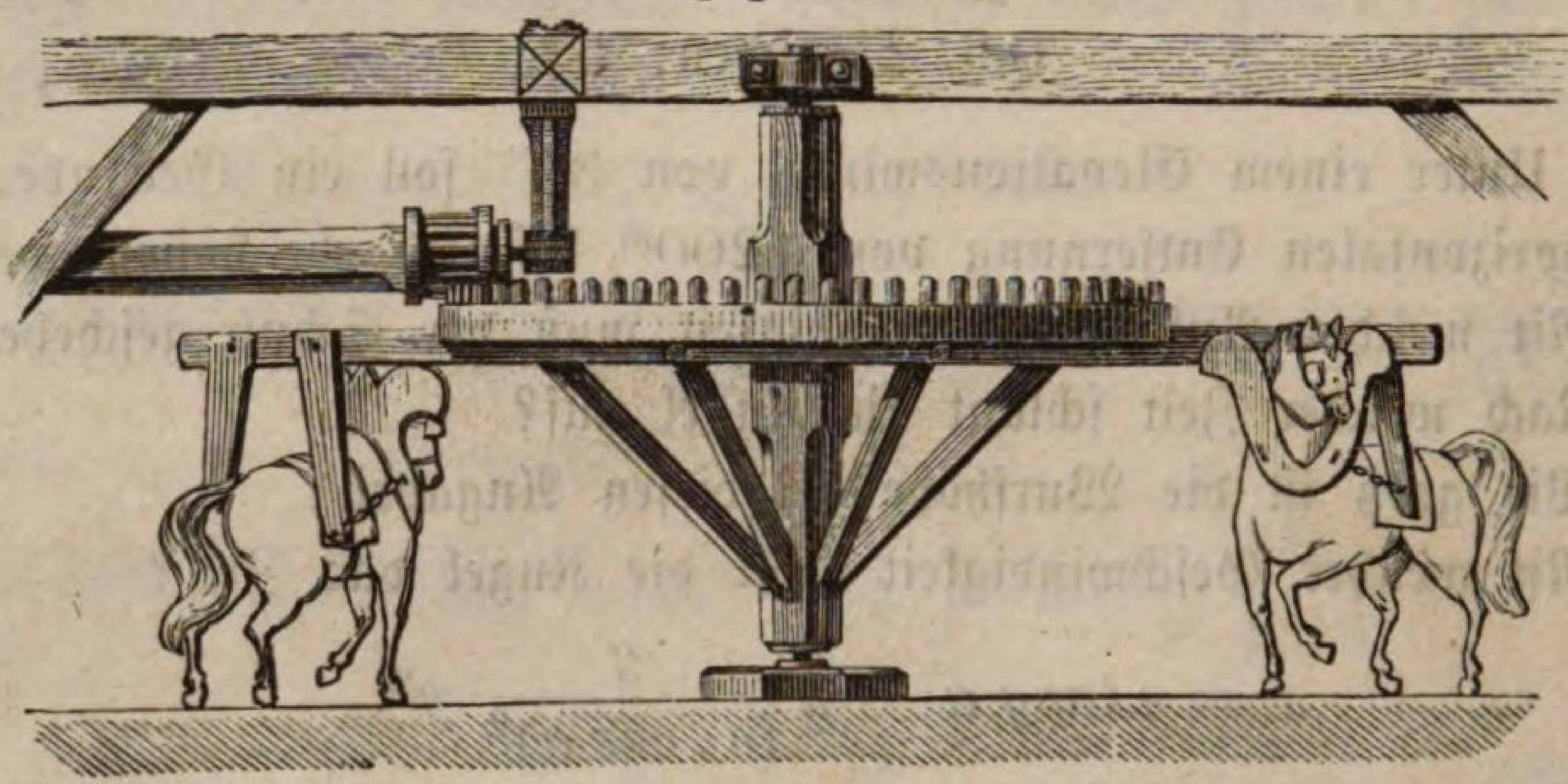
$$\omega = 0{,}628^m$$
$$c = 2{,}5^m.$$

40. Ein Mühlstein von 1,3^m Durchmesser macht 120 Umdrehungen in einer Minute. Welche Geschwindigkeit hat ein Punkt seines Mantels?

8,168^m.

41. An einem Göpel (Fig. 23) arbeiten zwei Pferde, an einem Zugarme von 5^m, mit einer Geschwindigkeit von 0,8^m.

Fig. 23.



a. Welche Winkelgeschwindigkeit hat die stehende Welle des Göpels?
b. Wie viel Umdrehungen werden in einer Minute gemacht?

a. 0,16; b. 1,53 Umdrehungen in einer Minute.

42. Eine Locomotive hat eine Geschwindigkeit von 11^m und die Triebräder machen 130 Umdrehungen in einer Minute. Welchen Durchmesser hat ein Triebrad? 1,6^m.

43. Wie groß ist die Normalacceleration eines Punktes, der sich in einem Kreise vom Halbmesser 4^m mit einer Geschwindigkeit von 8^m bewegt?

16^m.

44. Ein Punkt bewegt sich in einem Kreise, dessen Halbmesser 18^m beträgt. Die Normalacceleration des Punktes mag 5^m sein, wie groß ist die Geschwindigkeit desselben? 9,5^m.

45. Ein Punkt, der eine Geschwindigkeit von 10^m besitzt, wird durch eine Normalkraft, deren Acceleration 2^m beträgt, in eine kreisförmige Bewegung versetzt. Wie groß ist der Halbmesser der Bahn?

50^m.

46. Zwei Punkte haben die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 und sind

vermöge einer Centralkraft in kreisförmige Bewegungen versetzt worden. Die Wirkungen der Centralkraft seien dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional, und der eine der Punkte habe eine Entfernung r_1 vom Sitze der Centralkraft. Wie groß ist die Entfernung des zweiten Punktes vom Centrum?

$$\frac{v_1^2}{r_1} : \frac{v_2^2}{x} = x^2 : r_1^2,$$

$$x = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 r_1.$$

47. Wie groß ist das Verhältniß zwischen den Entfernungen r_1 und r_2 der Punkte vom Sitze der Centralkraft und den Zeiten t_1 und t_2 eines vollen Umlaufes, wenn dasselbe Gesetz der Anziehung zu Grunde gelegt wird?

$$\frac{\left(\frac{2\,\pi\, r_1}{t_1}\right)^2}{r_1} : \frac{\left(\frac{2\,\pi\, r_2}{t_2}\right)^2}{r_2} = r_2^2 : r_1^2,$$

$$t_1^2 : t_2^2 = r_1^3 : r_2^3.$$

48. Zahnräder oder Riemscheiben, welche sich auf derselben Welle befinden, machen, wenn diese in drehende Bewegung versetzt wird, in derselben Zeit eine gleiche Anzahl von Umdrehungen, sie haben also gleiche Winkelgeschwindigkeiten. Zahnräder, die mit einander im Eingriffe, oder Scheiben, die durch Riemen verbunden sind, haben bei gehöriger Uebertragung gleiche Peripheriegeschwindigkeiten. Bei einem solchen Betriebe heißt die Welle, auf welche die mechanische Kraft zunächst wirkt, die Kraftwelle, die dagegen, welche mit der zu leistenden Arbeit unmittelbar in Verbindung steht, die Lastwelle. Die dazwischen liegenden Wellen, welche zur Uebertragung der Bewegung nothwendig sind, heißen Vorgelegewellen; diese tragen zwei Zahnräder (zwei Riemscheiben), ein getriebenes und ein treibendes, während sich auf der Kraftwelle nur ein treibendes, auf der Lastwelle ein getriebenes Rad befindet. Unter dem Umsetzungsverhältniß φ zweier miteinander arbeitender Zahnräder oder Riemscheiben versteht man die Winkelgeschwindigkeit ω' des getriebenen Rades dividirt durch die Winkelgeschwindigkeit ω des treibenden Rades. Es ist also:

$$\varphi = \frac{\omega'}{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Werden die entsprechenden Halbmesser mit r' und r bezeichnet und dabei berücksichtigt, daß beide Scheiben gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben, daß also $r'\,\omega' = r\,\omega$, so ist

$$\varphi = \frac{r}{r'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Bezeichnen wir weiter die entsprechenden Umdrehungen der Scheiben pro Minute mit u' und u, so ist die Umfangsgeschwindigkeit $\frac{2\,\pi\, r'\, u'}{60}$ und $\frac{2\,\pi\, r\, u}{60}$, daher

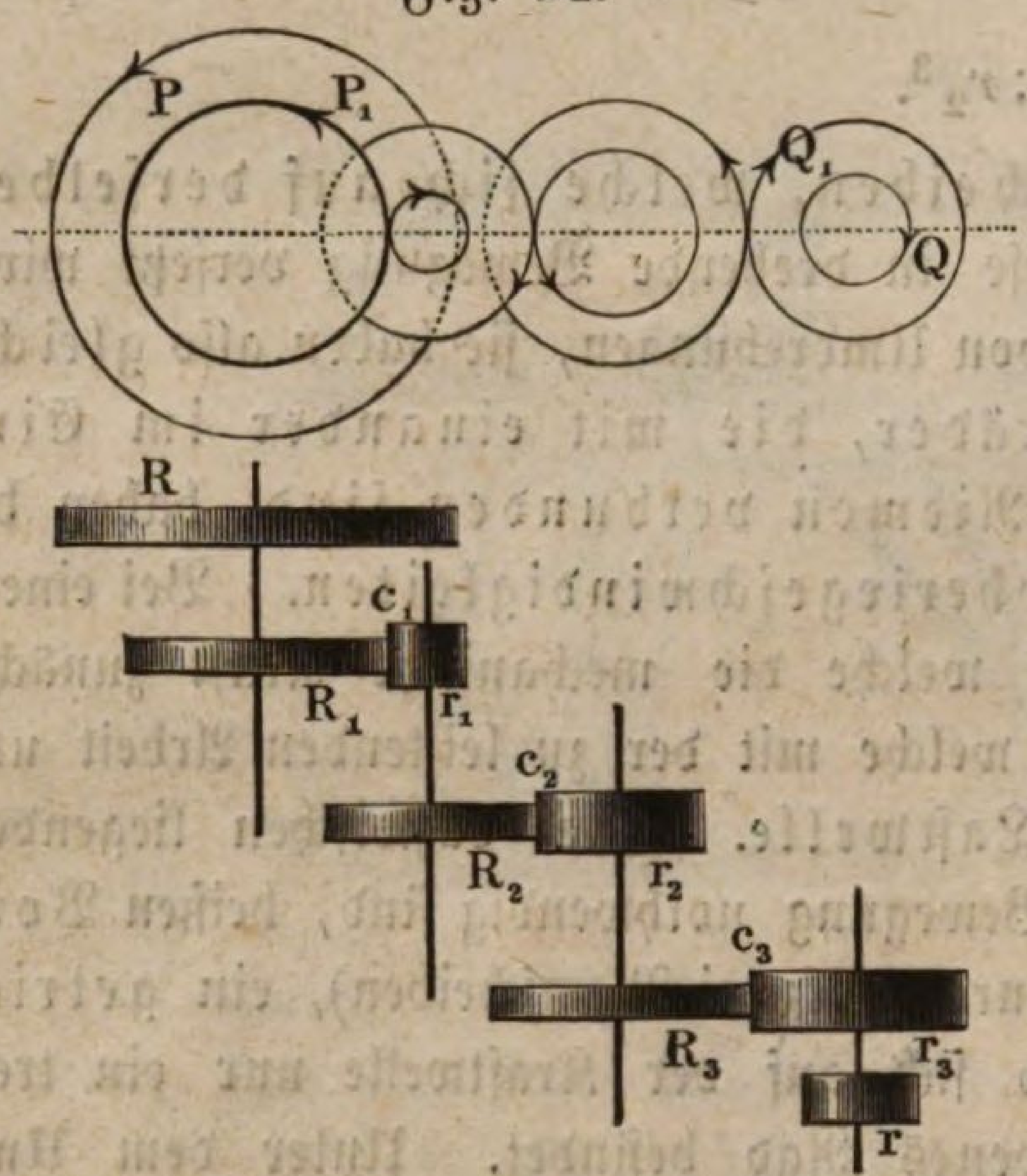
$$\varphi = \frac{u'}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wird hierin $u = 1$ gesetzt, so ist $\varphi = u'$, d. h. das Umsetzungsverhältniß drückt die Anzahl Umdrehungen des getriebenen Rades aus, für die Zeit, in welcher sich das treibende einmal umgedreht hat. Bei Zahnrädern, die miteinander arbeiten, ist die Länge des Bogens zwischen den Mitten zweier aufeinander folgender Zähne, die Theilung genannt, gleich groß. Bezeichnen wir die Zähnezahlen in beiden Rädern mit Z' und Z, so ist diese Theilung gleich $\frac{2\pi r'}{Z'}$ und $\frac{2\pi r}{Z}$, daher

$$\varphi = \frac{Z}{Z'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

49. Ein Zahnräder- oder Riemscheibenbetrieb (Fig. 24) bestehe aus m Wellen, die Halbmesser der treibenden Räder seien $R_1, R_2, R_3 \ldots R_{m-1}$; die der getriebenen $r_1, r_2, r_3 \ldots r_{m-1}$; die in einer Minute von den Wellen gemachten Umdrehungen seien $u_1, u_2, u_3 \ldots u_m$, und die Zähnezahlen wollen wir mit $Z_1, Z_2, Z_3 \ldots Z_{m-1}$ und mit $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{m-1}$ bezeichnen. Dann ist das Umsetzungsverhältniß des ersten Scheibenpaares

Fig. 24.



$$\varphi_1 = \frac{R_1}{r_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{Z_1}{z_1}.$$

In gleicher Weise stelle man die Umsetzungsverhältnisse für die übrigen Scheibenpaare auf, nämlich:

$$\varphi_2 = \frac{R_2}{r_2} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{Z_2}{z_2}$$

$$\varphi_3 = \frac{R_3}{r_3} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{Z_3}{z_3} \quad \text{u. s. w. bis}$$

$$\varphi_{m-1} = \frac{R_{m-1}}{r_{m-1}} = \frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{Z_{m-1}}{z_{m-1}}.$$

Die Multiplication dieser Gleichungen liefert das Umsetzungsverhältniß φ zwischen der ersten und letzten Welle:

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdots \varphi_{m-1} = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{R_3}{r_3} \cdots \frac{R_{m-1}}{r_{m-1}}$$

$$= \frac{u_m}{u_1}$$

$$= \frac{Z_1}{z_1} \cdot \frac{Z_2}{z_2} \cdot \frac{Z_3}{z_3} \cdots \frac{Z_{m-1}}{z_{m-1}}.$$

Benutzen wir noch die erste und letzte Peripheriegeschwindigkeit, der miteinander arbeitenden Zahnräder (verbundenen Riemscheiben),

d. i. c_1 und c_{m-1}, so ist $c_1 = \frac{2\pi R_1 u_1}{60}$ und $c_{m-1} = \frac{2\pi r_{m-1} u_m}{60}$, daher

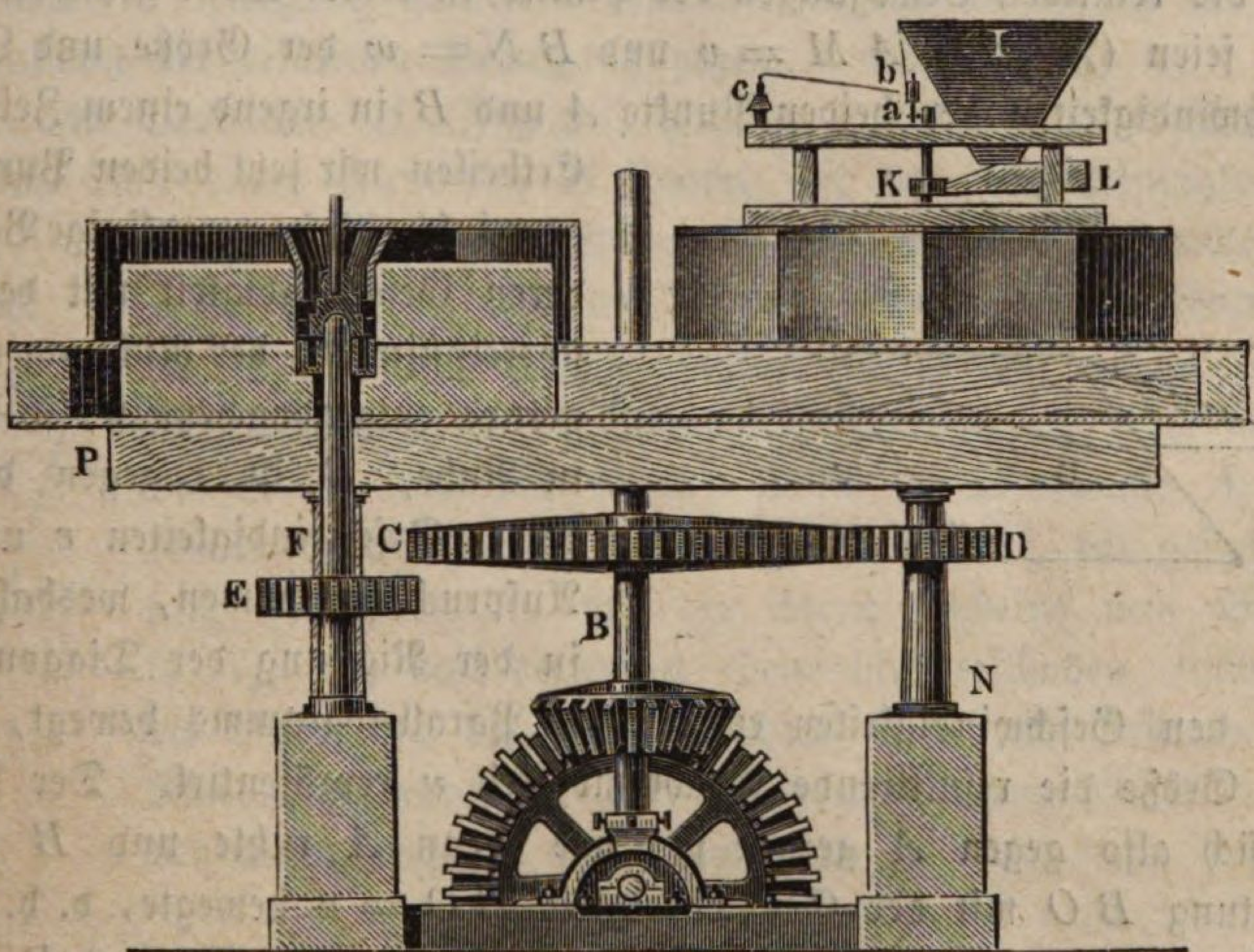
$$\varphi = \frac{u_m}{u_1} = \frac{c_{m-1} \cdot R_1}{c_1 \cdot r_{m-1}}.$$

Denkt man in dem letzten Quotienten die Divisionen in gehöriger Weise ausgeführt, so entsteht wieder:

$$\varphi = \frac{u_m}{u_1} = \frac{c_{m-1} : r_{m-1}}{c_1 : R_1} = \frac{\text{Winkelgeschwindigkeit der Lastwelle}}{\text{Winkelgeschwindigkeit der Kraftwelle}}.$$

50. Ein Wasserrad, das sechs Umdrehungen in einer Minute macht, soll einen Mahlgang (Fig. 25) treiben, dessen Läufer 140 Umdrehungen in der Minute machen soll.

Fig. 25.



Das Umsetzungsverhältniß φ ist hier $\frac{140}{6}$. Dasselbe ist größer als 6, weshalb zwischen der Wasserradwelle und dem Mühleisen wenigstens eine Vorgelegewelle anzubringen ist. Hiernach setzen wir

$$\varphi = \frac{140}{6} = \frac{R_1}{r_1} \cdot \frac{R_2}{r_2},$$

wenn R_1 den Radhalbmesser auf der Wasserradwelle, r_2 den des Rades D auf dem Mühleisen, r_1 und R_2 dagegen die Halbmesser der Räder auf der Vorgelegewelle bezeichnen. Ueber die gegenseitige Größe von $\frac{R_1}{r_1}$ und $\frac{R_2}{r_2}$

liegt keine Bedingung vor. Wählen wir die beiden Verhältnisse gleich, so ist

$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2} = \sqrt{\frac{140}{6}} = 4{,}83,$$

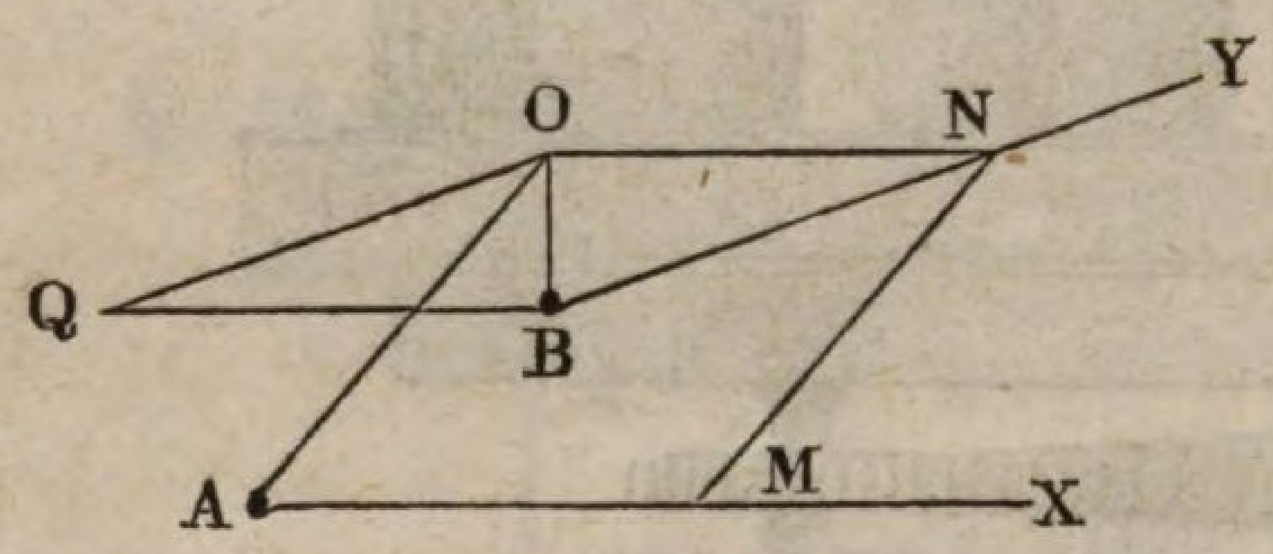
daher $R_1 = 4{,}83 \,.\, r_1$ und ebenso $R_2 = 4{,}83 \,.\, r_2$. Nimmt man $R_1 = 5\,r_1$, so ergiebt sich $R_2 = \frac{14}{3}\,r_2$.

In ähnlicher Weise kann man mit den Verhältnissen der Halbmesser beliebig variiren, wenn nur das Product der beiden Quotienten annähernd oder genau gleich $\frac{140}{6}$ bleibt.

51. Bei zwei ganz unabhängig von einander in Bewegung befindlichen Punkten kann es von Interesse sein, die Ortsveränderung des einen Punktes zu dem andern während der Bewegung zu bestimmen, d. h. seine relative Bewegung aufzusuchen. Zu dem Ende gebe man beiden Punkten noch eine derartige gemeinschaftliche Bewegung, daß einer derselben in Ruhe kommt, wodurch die relativen Bewegungen der Punkte in keiner Weise geändert werden.

Es seien (Fig. 26) $A\,M = v$ und $B\,N = w$ der Größe und Lage nach die Geschwindigkeiten der beiden Punkte A und B in irgend einem Zeitmoment.

Fig. 26.



Ertheilen wir jetzt beiden Punkten eine gemeinschaftliche geradlinige Bewegung, deren Geschwindigkeit mit der von A übereinstimmt, der Richtung nach aber gerade entgegengesetzt ist, so kommt A in Ruhe, B ist dagegen durch die beiden Geschwindigkeiten v und w in Anspruch genommen, weshalb er sich in der Richtung der Diagonale $B\,O$ des aus den Geschwindigkeiten construirten Parallelogramms bewegt, die auch in ihrer Größe die resultirende Geschwindigkeit u repräsentirt. Der Punkt B bewegt sich also gegen A gerade so, wie wenn A ruhte und B sich nach der Richtung $B\,O$ mit der Geschwindigkeit $B\,O = u$ bewegte, d. h. $B\,O$ ist der Größe und Richtung nach die relative Bewegung des Punktes B gegen A. Es ist, wenn wir den Winkel der ursprünglichen Geschwindigkeitsrichtungen mit δ bezeichnen,

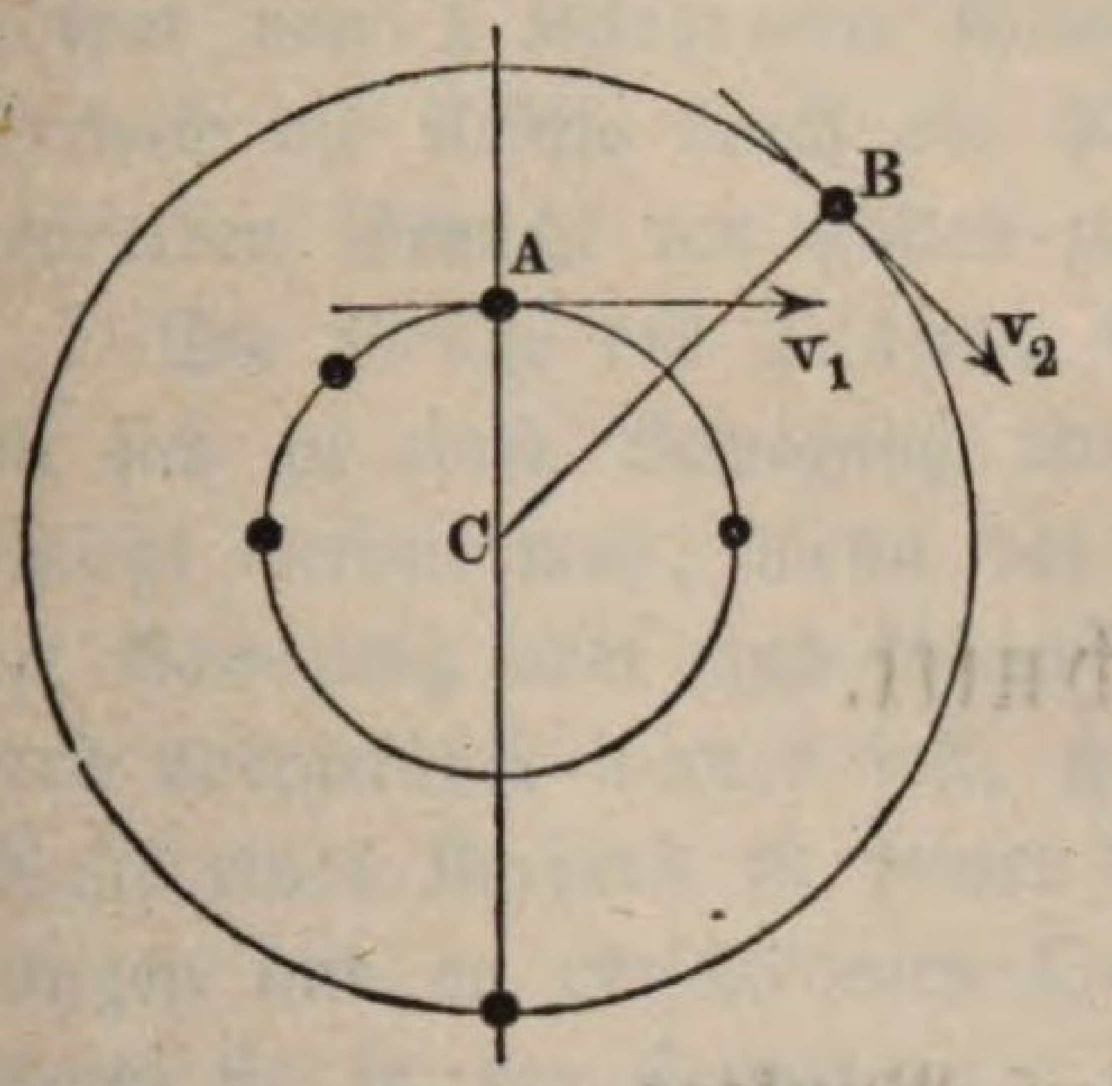
$$u = \sqrt{v^2 + w^2 - 2\,v w \cos \delta}.$$

Fallen die beiden Geschwindigkeiten v und w in dieselbe Linie, so sind für gleiche Richtungen, ($\delta = 0$), $u = v - w$, für entgegengesetzte Richtungen dagegen, ($\delta = 180^\circ$) $u = v + w$ die relativen Bewegungen von B gegen A. In gleicher Weise läßt sich die relative Bewegung von A gegen B bestimmen. Dieselbe ist bei denselben Werthen von v, w, δ natürlich wieder gleich u, hat nur die gerade entgegengesetzte Richtung der ersten relativen Bewegung.

Bewegen sich zwei von einander unabhängige Punkte A und B (Fig. 27) mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 nach derselben Richtung um

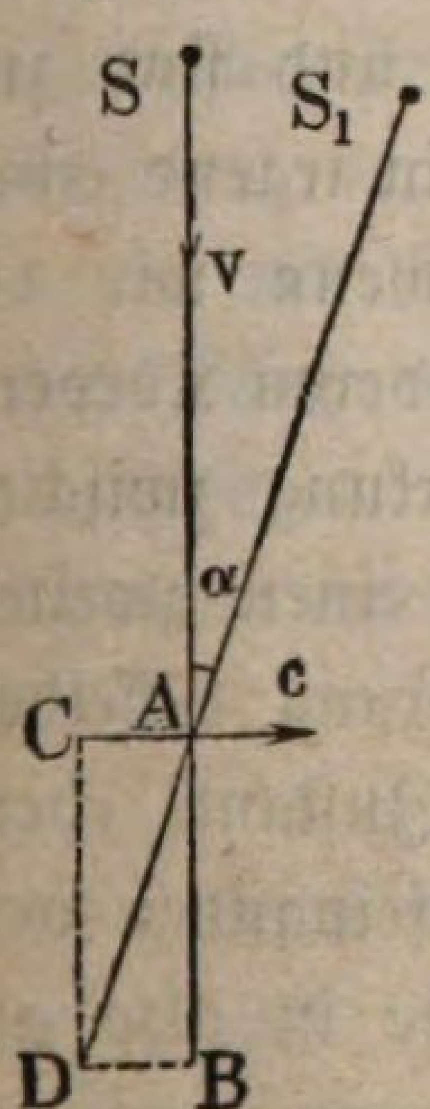
denselben Punkt C und ist $\omega_1 < \omega_2$, so erfolgt die Bewegung von B gegen A gerade so, wie wenn A ruhte und B sich mit der Geschwindigkeit $\omega_2 - \omega_1$ nach rechts drehte; dagegen ist die relative Bewegung von A gegen B eine Drehung nach links mit derselben Geschwindigkeit $\omega_2 - \omega_1$. Waren die beiden Bewegungsrichtungen entgegengesetzt, so ist die relative Geschwindigkeit in beiden Fällen $\omega_1 + \omega_2$ und die Richtung stimmt mit der von B überein, wenn man die relative Bewegung von B gegen A zu bestimmen unternommen hat, dagegen ist die relative Bewegungsrichtung die von A, bei der Untersuchung der Bewegung von A gegen B. Eine **scheinbare Bewegung** ist eine relative Bewegung, welche auf einen Beobachter den Eindruck einer absoluten Bewegung macht, so daß die scheinbare Bewegung aus der wahren Bewegung gerade so bestimmt werden kann, wie es oben bei der Auffindung der relativen Bewegung gezeigt worden ist.

Fig. 27.



52. Ein Beobachter A (Fig. 28) hat mit der Erde die Geschwindigkeit c, und das Licht eines Fixsternes S kommt mit der Geschwindigkeit v auf die Erde, welche Richtung ist dem in A angebrachten Fernrohre zu geben, um den Stern S beobachten zu können? Es sei $A\,B =$ der Geschwindigkeit v, normal zu $A\,B$ in A, entgegengesetzt zur Geschwindigkeitsrichtung c, trage man diese der Größe nach bis C ab, so ist die Diagonale $A\,D$, aus den Geschwindigkeiten v und $-c$ construirt, die gesuchte Richtung des Fernrohrs und der Stern erscheint dem Beobachter in S_1, also nach derjenigen Seite hin verschoben, nach welcher die Bewegung der Erde gerichtet ist. Zur Bestimmung der Abweichungsrichtung, der **Aberration** des Lichts, in Folge der Bewegung der Erde, hat man

Fig. 28.



$$tg\,\alpha = \frac{c}{v}$$

und bei Benutzung der durch Versuche festgestellten Werthe für die betreffenden Geschwindigkeiten, nämlich $c = 42\,000$ und $v = 4$ Meilen

$$tang\,\alpha = \frac{4}{42\,000} = 0{,}0001,$$

d. h. $\alpha = 20$ Secunden circa.

Es beschreibt hiernach ein Stern in der Nähe des Ekliptikpols, im Laufe eines Jahres, scheinbar einen kleinen Kreis von 20 Secunden Halbmesser um seinen wahren Ort. Bei Sternen in der Ebene der Erdbahn gehen diese kleinen Kreise in eine gerade Linie über, und bei den übrigen Sternen werden diese scheinbaren Bewegungen zu Ellipsen.

Zweiter Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes.

21 Das Wesen der Materie (Stoff, Substanz) ist uns nicht vollständig bekannt; wir wissen nur, daß sie im Raume existirt, mit unseren Sinnen wahrgenommen werden, und daß sie sich in Ruhe oder Bewegung befinden kann. Eine bestimmte räumlich begrenzte Menge der Materie heißt ein **physischer Körper**. Die Körper besitzen **Beharrungsvermögen**, d. h. sie haben die Fähigkeit, durch sich selbst und ohne alle äußere Einwirkung in dem ihnen eigenthümlichen Zustande der Ruhe oder Bewegung zu verharren und sind zugleich unfähig, durch sich selbst den einmal vorhandenen Zustand in irgend einer Weise zu verändern. Anders gestaltet sich die Sache jedoch, wenn wir die Körper nicht nur für sich allein, sondern auch in Beziehung zu anderen Körpern in Betracht ziehen. Da zeigt sich, daß eine gewisse Wechselwirkung zwischen den Körpern stattfindet, daß der bewegte Körper bewegend auf einen zweiten ruhenden einwirken, oder daß er die bereits vorhandene Bewegung desselben entsprechend umändern kann, wobei sein eigener ursprünglicher Zustand ebenfalls eine Veränderung erleidet. Diese Fähigkeit der Körper aufeinander verändernd einzuwirken, bezeichnet man mit dem Namen **Kraft**; sie ist also als die eigentliche Ursache einer Bewegung oder einer Veränderung in dem ursprünglichen Zustande eines Körpers anzusehen und haftet zugleich an dem Körper, an der Materie.

Das Wesen der Kräfte läßt sich nicht erklären, ihr Vorhandensein wird uns durch die mannigfaltigen Wirkungen, welche sie hervorbringen und insbesondere durch das Gefühl und Bewußtsein unserer eigenen physischen Kraft bestätigt. Menschen und Thiere können ihre Kräfte nur durch **Zug** oder **Druck** bemerkbar machen und dadurch bei anhaltender Thätigkeit Bewegungen oder Bewegungsveränderungen hervorrufen. Hieraus schließen wir, daß die **unmittelbare** Wirkung einer jeden Kraft in einem Druck oder Zug besteht und daß jede Bewegung oder Bewegungsänderung nur die Folge einer Zug- oder Druckäußerung irgend einer Kraft ist. Ein Zug, welcher ohne sichtbare

Verbindung, in einer Entfernung ausgeübt wird, heißt Anziehung oder Attraction und ein in dieser Weise wirksamer Druck wird Abstoßung oder Repulsion genannt. Als Einheit der Kräfte läßt sich jeder beliebige Zug oder Druck benutzen. Wir nehmen denjenigen als Einheit an, den ein Körper von 1 Kilogramm Gewicht auf eine Unterlage ausübt, und messen hiernach die Kräfte durch die Anzahl Kilogramme, welche einen Körper von demselben Gewicht am Fallen zu verhindern im Stande ist.

Die Menge des Trägen in einem Körper, d. h. die Menge dessen, das für sich zu einer Bewegung oder Bewegungsänderung unfähig ist, was also bewegt werden muß, wenn der Körper aus dem Zustand der Ruhe in den der Bewegung oder aus einem vorhandenen Bewegungszustand in einen andern übergeführt werden soll, wird die Masse des Körpers genannt. Die Masse eines Körpers ist keiner Veränderung fähig, sie bleibt bei Formänderungen und an verschiedenen Orten der Erde dieselbe, bei Zertheilungen erscheint sie in der Summe der Massen der einzelnen Theile wieder. Durch diese Unveränderlichkeit unterscheidet sich die Masse eines Körpers ganz besonders von dem Gewicht desselben, das am Aequator kleiner als am Pol ist, sich überhaupt mit dem Ort auf der Erdoberfläche, nach dem der Körper gebracht wird, ändert. Zwei Massen sind gleich groß, wenn zwei gleich große und in gleicher Weise wirkende Kräfte ganz dieselben Bewegungen an ihnen hervorrufen.

Werden 2, 3, ... n Körper von gleicher Masse vereinigt, so erhält man eine Gesammtmasse, die 2, 3, ... n mal so groß ist als die Masse jedes einzelnen der vereinigten Körper, und nimmt man die Masse eines dieser Körper als Masseneinheit an, so würde das Maß der Gesammtmasse 2, 3, ... n sein. Auf diese Weise ließe sich zwar ein Messen der Masse ermöglichen, jedoch sehen wir wegen der Schwierigkeit der praktischen Ausführung davon ab, und werden in der Folge durch das Gewicht des Körpers in Verbindung mit der Beschleunigung g der Schwerkraft den Werth der Masse berechnen.

Eine Masse werde durch eine der Richtung und Größe nach unveränderlich wirkende Kraft in der Weise getrieben, daß alle Punkte der Masse 22
gerade und parallele Linien beschreiben, die in ihrer Richtung mit der der Kraft übereinstimmen. In diesem Falle können wir die ganze Masse des Körpers in einem Punkt zusammengedrängt (verdichtet) denken und die Bewegung dieses materiellen Punktes näher ins Auge fassen. Bei dieser Voraussetzung ist es also nicht nothwendig, den materiellen Punkt als den kleinsten denkbaren Körper aufzufassen, vielmehr kann der Körper eine beliebige Größe haben.

Der materielle Punkt habe die Masse m in sich concentrirt, erleide in jedem Augenblick während t Secunden einen der Größe und Richtung nach unveränderlichen Druck P. Hierdurch kommt der ursprünglich ruhend angenommene Körper allmälig in Bewegung und erlangt endlich die Geschwindigkeit v, d. h. mit dieser würde sich der Körper vermöge der Trägheit gleichförmig fortbewegen, wenn man die Kraft nach dieser Zeit beseitigte.

Ist die Kraft P auch noch so klein und die Masse m dabei sehr groß, so wird die Bewegung dennoch bereits nach dem ersten Zeitmoment der Krafteinwirkung beginnen, d. h. es wird in der Masse m schon nach diesem Zeitmoment eine gewisse, allerdings sehr kleine Geschwindigkeit vorhanden sein, mit welcher sich also die Masse m gleichförmig weiter bewegen würde, wenn die Kraft jetzt zu wirken aufhörte. Da aber die Kraft nicht beseitigt wird, so erhält die Masse in jedem Zeitmoment einen weiteren Zuwachs an Geschwindigkeit, und der Körper wird deshalb allmälig die Geschwindigkeit v erlangen. Um die Beziehung zwischen P, m, v und t zu finden, nehmen wir zwei derartige constant wirkende Kräfte P_1 und P_2, welche t_1 und t_2 Secunden lang auf die Massen m_1 und m_2 in der angegebenen Weise einwirken und denselben in diesen Zeiten die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 beibringen. Dann sind der Erfahrung gemäß die Geschwindigkeiten um so größer, je größer die auf die Massen einwirkenden Kräfte sind und je länger die Einwirkungen gedauert haben, dagegen nehmen die Geschwindigkeiten mit der Zunahme des Trägen in dem Körper, d. i. mit dem Wachsthum der Massen ab. Wir haben hiernach

$$v_1 : v_2 = \left\{\begin{matrix} P_1 : P_2 \\ t_1 : t_2 \\ m_2 : m_1 \end{matrix}\right\} = P_1\, t_1\, m_2 : P_2\, t_2\, m_1$$

oder $\frac{m_1 v_1}{P_1 t_1} = \frac{m_2 v_2}{P_2 t_2}$, d. h. für alle constant wirkenden Kräfte hat der in dieser Weise gebildete Quotient einen unveränderlichen Werth, den wir mit K bezeichnen wollen. Es ist also die gesuchte Beziehung zwischen m, P, v und t ausgedrückt durch:

$$\frac{m v}{P t} = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Entwickeln wir hieraus die Endgeschwindigkeit

$$v = K \frac{P}{m} t,$$

so ergiebt sich, daß die durch eine constant wirkende Kraft hervorgerufene Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte ist und daß für $P = 1$, $m = 1$ und $t = 1$

$$v = K$$

wird, d. h. unter K ist die Geschwindigkeit zu verstehen, welche die Krafteinheit (1 Kilogramm) in der Zeiteinheit (1 Secunde) der Masseneinheit beizubringen vermag. Die Fallbewegung im luftleeren Raum ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, weshalb die obige Formel hierauf in Anwendung gebracht werden kann. Die constant wirkende Kraft P ist hierbei das Gewicht G des Körpers, und die durch Versuche bestimmte Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde beträgt 9,81 Meter und wird mit g bezeichnet. Es ist demnach

$$m \frac{g}{G} = K \text{ und}$$

$$v = g \frac{P}{G} t.$$

Aus dem ersten dieser beiden Resultate ergiebt sich ein Werth zur Berechnung der Masse, nämlich:

$$m = K\frac{G}{g},$$

d. h. m ist ein Vielfaches des Quotienten $\frac{G}{g}$, welcher die Eigenschaft hat, für einen und denselben Ort proportional mit dem Körpergewicht zu wachsen, dagegen aber für einen und denselben Körper an verschiedenen Orten denselben Werth zu behalten, da g, die Geschwindigkeitszunahme in jeder Secunde beim freien Fall, vollkommen genau dem Gewichte des Körpers proportional ist. Es ist gebräuchlich, $K = 1$ zu setzen, wodurch sich ergiebt:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{\text{Gewicht in Kilogrammen}}{\text{Beschleunigung der Schwere in Metern}} \quad . \quad . \quad (28)$$

In diesem Falle dient als Einheit der Massen die Masse eines Körpers, dessen Gewicht gleich der Geschwindigkeitszunahme in der Secunde beim freien Fall ist. Für eine der Beschleunigung der Schwerkraft von 9,81 Meter entsprechende geographische Breite ist also als Masseneinheit ein Körper zu benutzen, welcher 9,81 Kilogramm wiegt. Bei Benutzung dieser Annahme erhalten wir n. F. 28 für den bewegenden Druck

$$P = m\frac{v}{t} = mj = G\frac{j}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

und für die Beschleunigung der Bewegung

$$j = \frac{P}{m} = \frac{\text{bewegender Druck}}{\text{bewegte Masse}} = g\frac{P}{G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Die für die Bewegung eines mathematischen Punktes entwickelten Gesetze lassen sich bei Benutzung des erhaltenen Werthes für die Beschleunigung j auf die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse m übertragen:

a) für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit

$$v = \frac{P}{m}t \text{ und } s = \tfrac{1}{2}\frac{P}{m}t^2;$$

b) für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit c

$$v = c + \frac{P}{m}t \text{ und } s = ct + \tfrac{1}{2}\frac{P}{m}t^2;$$

c) für die gleichmäßig verzögerte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit c

$$v = c - \frac{P}{m}t \text{ und } s = ct - \tfrac{1}{2}\frac{P}{m}t^2.$$

Aus Formel (29) ergiebt sich noch

$$Pt = mv.$$

Das Product aus der Masse des Körpers in die Geschwindigkeit nennt man **Größe der Bewegung** und das Product Pt soll der **Antrieb** der Kraft P in der Zeit t genannt werden. Besaß der Körper in dem Augenblick, als die Kraft P zu wirken anfing, bereits die Geschwindigkeit c, enthielt also die Masse bereits die Größe der Bewegung mc, so ist

$$Pt = mv - mc \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

d. h. die **Zunahme der Größe der Bewegung** in einer Zeit t ist gleich **dem Antriebe der Kraft** in dieser Zeit.

Die für constant wirkende Kräfte gefundene Beziehung, $P = mj$ läßt sich bei veränderlichen Kräften nur für so kleine Zeitintervalle in Anwendung bringen, innerhalb welcher sich diese Kräfte nicht bedeutend ändern, also z. B. für die Zeit von $\frac{1}{n}$ Secunde, wenn n eine sehr große Zahl bedeutet. Unter dieser Annahme wird aus

$$P = mj \text{ oder } Pt = mv$$

$$P\frac{1}{n} = mv$$

$$P = m \cdot nv.$$

Hierin ist v die nach $\frac{1}{n}$ Secunde erlangte Geschwindigkeit, für nv ist also die in **einer** Secunde der Masse m beizubringende Geschwindigkeit zu setzen, unter der Voraussetzung, daß P constant bliebe; nv ist demnach die in dem betrachteten Moment stattfindende Beschleunigung und es ist deshalb auch für veränderliche Kräfte die höchst wichtige Formel

$$P = mj,$$

in jedem Zeitmoment anwendbar, als richtig gefunden worden.

Nennen wir die Geschwindigkeit des Punktes zu Anfang der Bewegung c, zu Ende derselben aber v, und bezeichnen die in den einzelnen dazwischen liegenden Zeitmomenten stattfindenden Geschwindigkeiten mit $c_1, c_2, c_3 \ldots$, so erhalten wir n. F. 31, die Zeitdauer $\tau = \frac{t}{n}$ eines Antriebes unendlich klein angenommen, die einzelnen **Elementarantriebe**:

$$P_1 \tau = mc_1 - mc$$

$$P_2 \tau = mc_2 - mc_1$$

$$P_3 \tau = mc_3 - mc_2 \text{ u. s. w. bis}$$

$$P_n \tau = mv - mc_{n-1},$$

worin $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ die Werthe der bewegenden Kraft in den einzelnen Zeitmomenten bezeichnen sollen.

Durch Addition ergiebt sich

$$\Sigma P_1 \tau = mv - mc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

$\Sigma P_1 \tau$ wird der Antrieb der bewegenden Kraft während der Zeit t

genannt. Die erhaltene Formel liefert also für veränderliche Kräfte dasselbe Gesetz, was wir für constante durch F. 31 gefunden haben.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, daß als Ursachen veränderlicher Be- 23
wegungen die Kräfte anzusehen sind, daß dagegen gleichförmige Bewegungen auftreten, wenn die Kräfte plötzlich außer Wirksamkeit gesetzt werden, da sich dann der Körper, vermöge der Trägheit, mit der erlangten Endgeschwindigkeit gleichförmig in der zuletzt vorhandenen Richtung weiter bewegen wird.

Durch Multiplication der Beschleunigungen mit der Masse m des Körpers erhält man den bewegenden Druck oder Zug, die Kraft, woraus sich ergiebt, daß die über die Zusammensetzung der Beschleunigungen gefundenen Gesetze unmittelbar auf die Kräfte übertragen werden können. Aendert der Punkt unter der Einwirkung von Kräften seinen ursprünglichen Zustand nicht, welcher der der Ruhe oder der Bewegung gewesen sein kann, so waren die Kräfte unter sich im Gleichgewicht.

Wir stellen uns zwei Systeme von Kräften vor, die sich einander das Gleichgewicht halten. Das eine derselben ersetzen wir durch eine Kraft, so daß dasselbe Gleichgewicht aufrecht erhalten wird. Diese Kraft nennt man die Mittelkraft oder Resultante des zerstörten Systems und die entgegengesetzte Resultante des erhaltenen Systems von Kräften. Eine Resultante ist hiernach diejenige Kraft, welche die Wirkung mehrerer Kräfte vollkommen ersetzt, entgegengesetzte Resultante ist dagegen die Kraft, welche mehreren anderen das Gleichgewicht hält. Die übrigen Kräfte heißen in Bezug auf die Resultante Seitenkräfte oder Componenten. Die Bestimmung der Resultante aus den Componenten nennt man Vereinigung oder Zusammensetzung der Kräfte; die umgekehrte Aufgabe, aus einer Kraft mehrere zu bilden, die dasselbe leisten, wird dagegen Zerlegung der Kraft genannt.

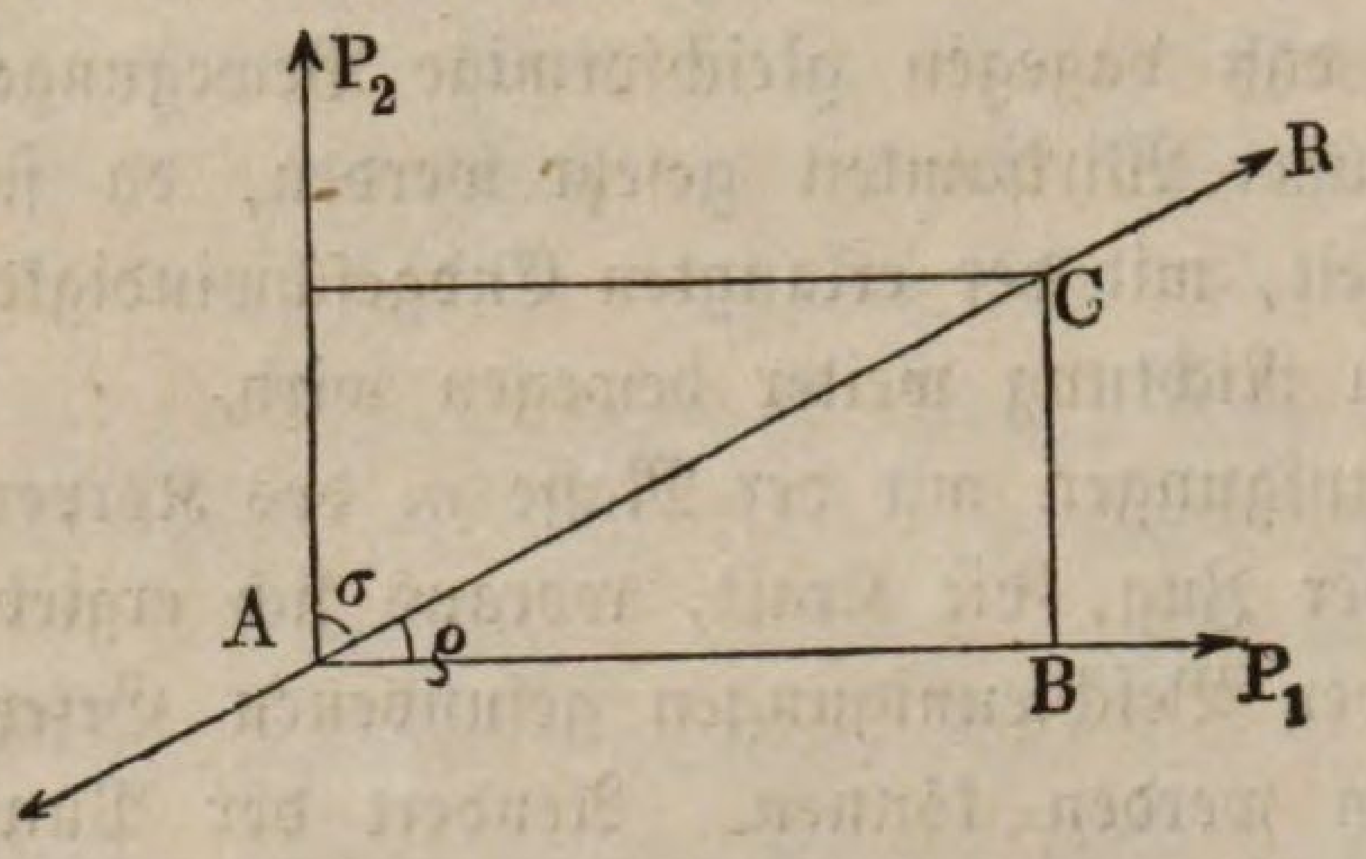
1) Wirken mehrere Kräfte nach derselben Richtung auf einen Punkt A, so ist die Resultante gleich der Summe der einzelnen Kräfte und dieselbe wirkt mit den ursprünglichen Kräften nach derselben Richtung. Gleichgewicht kann hier niemals stattfinden.

2) Wirken mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3 ... theils nach einer, theils nach der gerade entgegengesetzten Richtung auf einen Punkt A, so addire man nach dem vorigen Gesetz die Kräfte, welche dieselbe Richtung haben. Dadurch erhält man zwei Kräfte, die an dem Punkt nach entgegengesetzter Richtung wirksam sind, deren Resultante sich in der Differenz der beiden Kräfte findet und deren Richtung durch die größere Kraft bestimmt ist. Die Gleichheit dieser beiden letzten Kräfte giebt die Bedingung des Gleichgewichts für sämmtliche an dem Punkt ursprünglich wirksame Kräfte. Versieht man die gegebenen Kräfte, mit Rücksicht auf ihre Richtung, mit positiven und negativen Zeichen, so wird die Resultante R alle Kräfte in der algebraischen Summe (Σ) derselben erhalten, die positiv, negativ oder Null sein kann, wodurch die Richtung der Resultante resp. die Bedingung des Gleichgewichts ausgesprochen ist:

$$R = \Sigma P_1 = \overset{+}{\underset{-}{0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

24 1) Auf einen Punkt A (Fig. 29) wirken zwei Kräfte P_1 und P_2, deren Richtungen rechtwinkelig aufeinander stehen. Die Resultante R ist der Größe und Richtung nach die Diagonale des aus den Kräften construirten Rechtecks. Bezeichnet man die Winkel zwischen R, P_1 und P_2 mit ϱ und σ, so ist hiernach

Fig. 29.



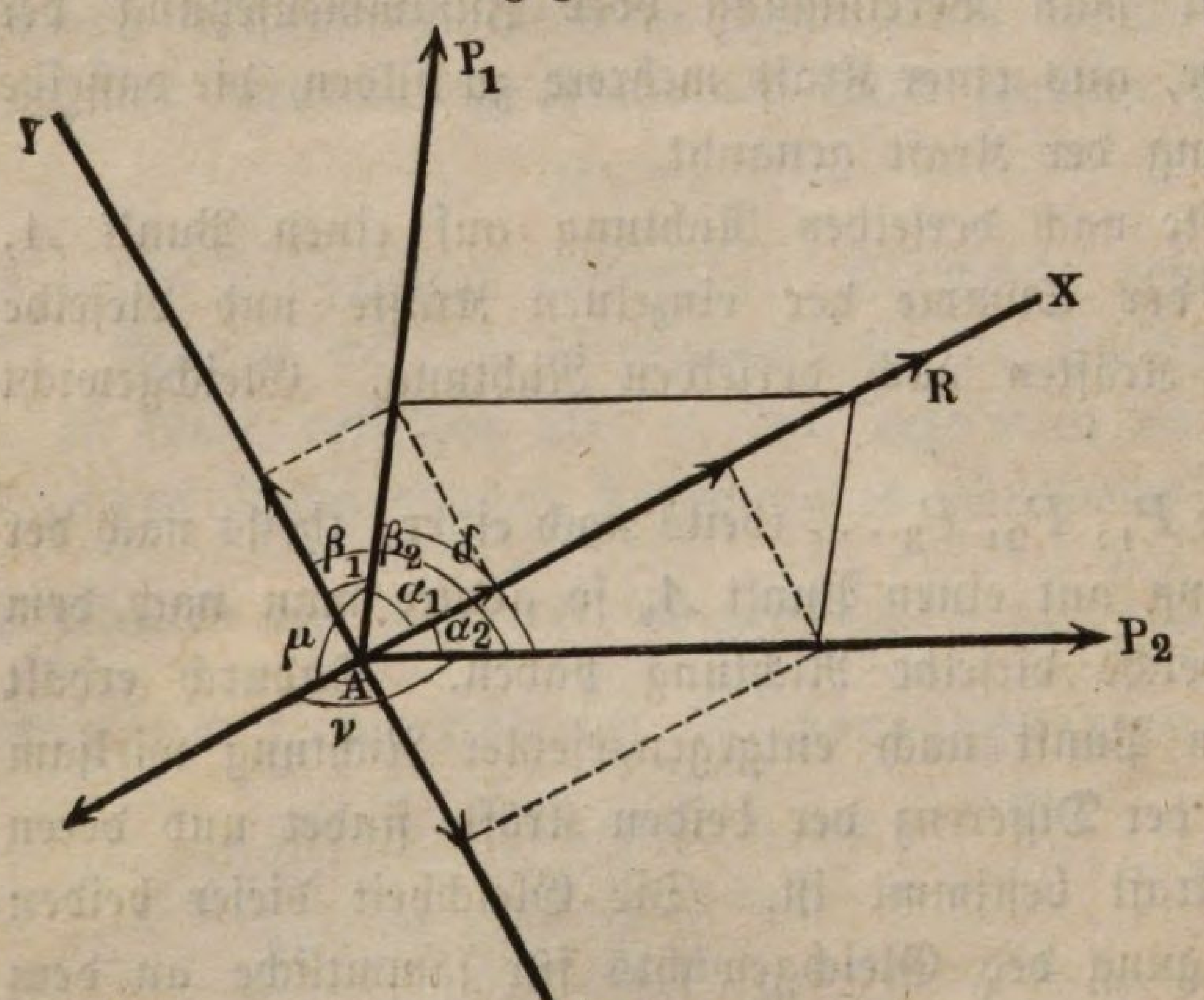
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \quad . \quad . \quad (34)$$

$$\cos \varrho = \frac{P_1}{R} \text{ und } \cos \sigma = \frac{P_2}{R} \quad (35)$$

Gleichgewicht kann hier niemals stattfinden; dasselbe läßt sich jedoch dadurch herstellen, daß man in A, entgegengesetzt der Resultante R, eine dieser gleiche Kraft R anbringt. Umgekehrt läßt sich jede Kraft R in zwei aufeinander rechtwinkelig stehende Componenten zerlegen, deren Größe durch $R \cos \varrho$ und $R \cos \sigma$ gegeben ist. Es handelt sich hierbei um Construction des rechtwinkeligen Dreiecks ABC, von dem jederzeit die Hypotenuse R gegeben ist, so daß es nur noch eines Stückes zur Construction bedarf. Zugleich erhellet aber daraus, daß sich die Zerlegung einer Kraft R auf vielfache Weise machen läßt.

2) Wirken die Kräfte P_1 und P_2 unter dem Winkel δ auf den Punkt A (Fig. 30), so bilde man aus den Kräften das Parallelogramm, ziehe die Diagonale und zerlege beide Kräfte nach Richtung derselben und normal dazu. Die beiden letzteren Componenten halten sich das Gleichgewicht, daher ist die Resultante der beiden gegebenen Kräfte gleich der Summe der in Richtung der Diagonale liegenden Componenten. Diese liefern aber in ihrer Summe die Diagonale selbst, daher ist diese der Größe und Richtung nach die verlangte Resultante

Fig. 30.



$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos \delta} \quad (36)$$

Gleichgewicht kann hier ebenfalls nicht stattfinden, dagegen kann man dasselbe wieder dadurch herstellen, daß man in A, in Richtung der Diagonale, entgegengesetzt zur Resultante, eine ihr gleiche Kraft P wirken läßt.

Hiernach sind zur Herstellung des Gleichgewichts, für Kräfte in derselben Ebene an einem Punkte wirksam, wenigstens drei Kräfte nothwendig, von denen jede als die entgegengesetzte Mittelkraft der beiden anderen erscheint und

der Größe nach durch F. 35 bestimmt ist. Da die Kräfte P_1, P_2 und P Seiten eines Dreiecks sind, so ist noch nach dem Sinussatz

$$P_1 : P_2 : P = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin \delta$$

oder wenn wir die Nebenwinkel von α_1 und α_2 als μ und ν einführen, so ergiebt sich für drei Kräfte, die sich an dem Punkte A das Gleichgewicht halten,

$$P_1 : P_2 : P = \sin \nu : \sin \mu : \sin \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

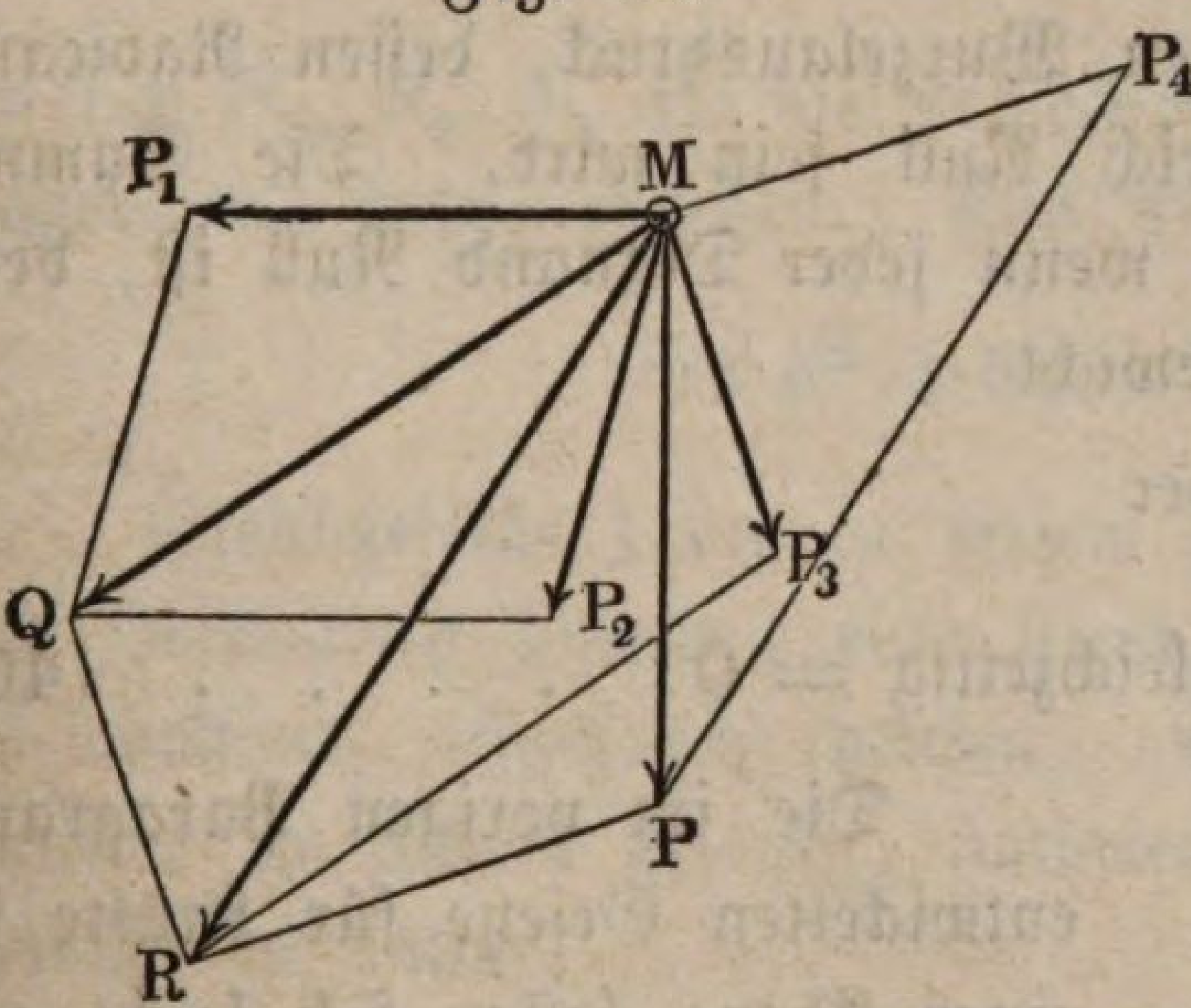
d. h. die Kräfte verhalten sich wie die Sinus der Winkel, welche je zwei Kräfte miteinander bilden.

Umgekehrt läßt sich jede Kraft P in zwei Componenten zerlegen, die einen beliebigen Winkel δ miteinander bilden, und handelt es sich dabei nur um die Construction eines Dreiecks, für das außer P noch zwei Stücke gegeben sein müssen.

Das Gesetz unter 2) ist bekannt unter dem Namen: das **Parallelogramm der Kräfte**.

Mit Hülfe desselben lassen sich eine beliebige Anzahl von Kräften, die im Punkte M (Fig. 31) wirksam sind, ebenfalls vereinigen, indem man die Resultante Q aus P_1 und P_2, mit P_3 zur Resultante R und diese mit P_4 zu einer Resultante P vereinigt, welche nun die Mittelkraft des ganzen Systems sein wird. Sobald die letztere verschwindet, findet Gleichgewicht zwischen den an dem Punkte M wirksamen Kräften statt.

Fig. 31.



3) Die Vereinigung beliebig vieler in einer Ebene gelegenen Kräfte, die an einem Punkte A wirksam sind, läßt sich durch Rechnung mit Hülfe von Nr. 1) dieses Paragraphen folgendermaßen bewerkstelligen. Man denke in der Ebene der Kräfte durch A ein beliebiges rechtwinkeliges Coordinatensystem gelegt, dabei die Kräfte der Größe nach durch $P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$ und der Richtung nach durch die Winkel $\alpha_1, \beta_1;\ \alpha_2, \beta_2;\ \alpha_3, \beta_3 \ldots$, welche die Kräfte mit den Coordinatenachsen bilden, gegeben. Wir verstehen hier unter dem Winkel, den eine Kraftrichtung mit den Achsen bildet, denjenigen Winkel, den sie mit dem positiven Theil der Achsen, auf dem kürzesten Wege gemessen, einschließt, wobei keiner der Winkel 180° übersteigen kann. Man zerlege nun jede der Kräfte nach der oben angegebenen Anleitung in zwei Componenten, die in Richtung der Achsen fallen. Diese sind für:

$P_1 : P_1 \cos \alpha_1$ und $P_1 \cos \beta_1$; $P_2 : P_2 \cos \alpha_2$ und $P_2 \cos \beta_2$;

$P_3 : P_3 \cos \alpha_3$ und $P_3 \cos \beta_3$ u. s. w.

Auf die Richtung der einzelnen Componenten ist nicht Rücksicht zu nehmen, da durch den als Factor vorkommenden Cosinus die richtige Lage von selbst hervorgerufen wird, wenn die Winkel in der oben angegebenen Weise gemessen werden. Einem spitzen Winkel entspricht eine positive, einem stumpfen Winkel dagegen eine negative Componente. Nach dieser Zerlegung bilde man die

algebraische Summe der Componenten in jeder der beiden Achsen, wodurch zwei aufeinander normalstehende Kräfte entstehen, die wir mit X und Y bezeichnen wollen. Es ist hiernach:

$$X = \Sigma P_1 \cos \alpha_1 \text{ und } Y = \Sigma P_1 \cos \beta_1;$$

die Resultante $$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

und deren Richtung, wenn ϱ und σ die Winkel sind, welche die Richtung von R mit den Achsen bildet,

$$\left.\begin{aligned} \cos \varrho &= \frac{X}{R} \\ \cos \sigma &= \frac{Y}{R} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

In den letzten Ausdrücken ist R absolut zu nehmen, die Zähler der Quotienten geben das dem Cosinus der Winkel ϱ und σ nothwendige Zeichen. Aus diesem Zeichen läßt sich erkennen, ob diese Winkel spitz oder stumpf sind, wodurch die Resultante der Richtung nach vollständig bestimmt ist.

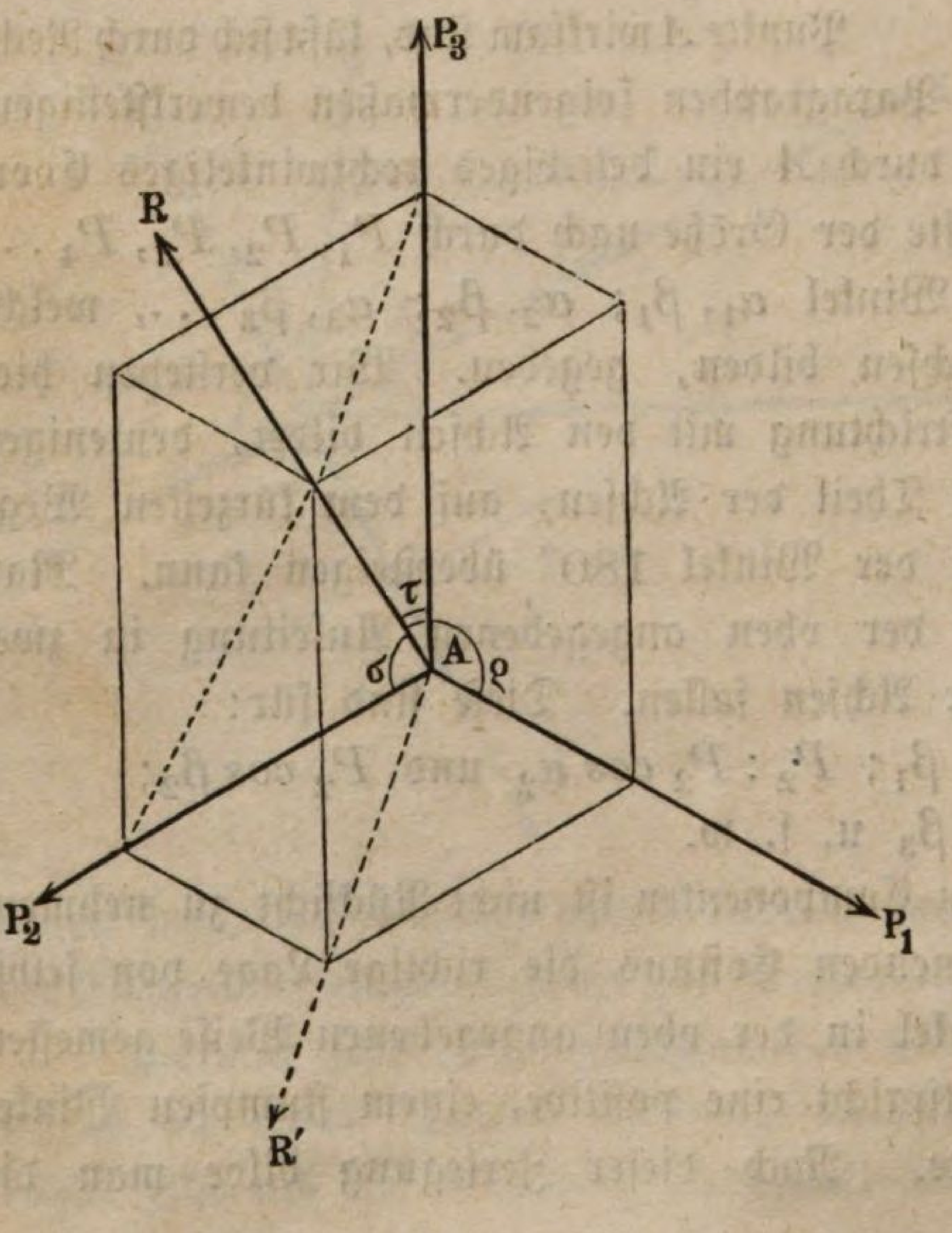
Waren die ursprünglichen Kräfte im Gleichgewicht, so muß $R = 0$ werden. Die Resultante ist gleich dem obigen Wurzelausdruck, dessen Radicand für den Fall des Gleichgewichts also gleich Null sein wird. Die Summe zweier Quadrate kann aber nur Null sein, wenn jeder Dignand Null ist, deshalb heißen die Bedingungen des Gleichgewichts

$$R = 0 \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma P_1 \cos \alpha_1 \\ Y &= \Sigma P_1 \cos \beta_1 \end{aligned}\right\} \text{gleichzeitig} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

25 Die im vorigen Paragraph entwickelten Gesetze für Kräfte in einer Ebene lassen sich leicht auf Kräfte im Raum übertragen.

Fig. 32.



1) Auf den Punkt A (Fig. 32) wirken die Kräfte P_1, P_2, P_3, die wechselseitig aufeinander rechtwinkelig stehen, P_1 ist also auf der Ebene $P_2 P_3$, P_2 auf der Ebene $P_1 P_2$ und P_3 auf der Ebene $P_1 P_2$ normal.

Nach §. 24 1. läßt sich P_1 und P_2 zu einer Resultante $R' = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ vereinigen. Die beiden Kräfte R' und P_3 stehen nun ebenfalls aufeinander rechtwinkelig und liegen in der durch A gelegten Diagonalebene des aus den drei gegebenen Kräften construirten Parallelepipedums.

Die Resultante R, aus R' und P_3, die mit der Resultante der drei gegebenen Kräfte übereinstimmt, wird hiernach der Größe und Richtung nach in der Diagonale des aus den drei Kräften P_1, P_2, P_3 construirten Parallelepipedums erhalten:

$$R = \sqrt{R'^2 + P_3^2} \text{ oder}$$
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Die Winkel, welche R mit den Kräften P_1, P_2, P_3 bildet, seien ϱ, σ, τ. Die Richtung der Resultante R ist bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} \cos\varrho &= \frac{P_1}{R} \\ \cos\sigma &= \frac{P_2}{R} \\ \cos\tau &= \frac{P_3}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

da sich P_1, P_2, P_3 als die Projectionen der Resultante R auf die Richtung der gegebenen Kräfte ergeben. Aus 42 findet sich noch

$$\cos\varrho^2 + \cos\sigma^2 + \cos\tau^2 = 1 \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

Gleichgewicht kann in diesem Falle nicht stattfinden, vielmehr muß man zur Herstellung desselben eine Kraft R in A, entgegengesetzt zu der Resultante R wirksam, angebracht denken, woraus zugleich folgt, daß wenigstens vier Kräfte, im Raum gelegen, nothwendig sind, um sich gegenseitig das Gleichgewicht zu halten.

Umgekehrt läßt sich jede Kraft R in drei aufeinander normal stehende Componenten zerlegen. Zu dem Ende sind außer R noch zwei Stücke nothwendig, die man beliebig aus den Winkeln ϱ, σ, τ und den Componenten P_1, P_2, P_3 wählen kann.

2) Wirken an dem Punkte A beliebig viele Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$, die nicht in derselben Ebene liegen, so denke man durch A ein dreiachsiges Coordinatensystem gelegt und die Richtung der Kräfte durch die Winkel α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, $\gamma_3 \ldots$, welche diese mit den Achsenrichtungen bilden, gegeben. Die Winkel sind in der oben angegebenen Weise anzunehmen.

Man zerlege jede der Kräfte nach Richtung der drei Achsen, und addire die in einer Achse liegenden Componenten, so entstehen drei Kräfte

$X = \Sigma P_1 \cos\alpha_1$; $Y = \Sigma P_1 \cos\beta_1$; $Z = \Sigma P_1 \cos\gamma_1$ und die sich bestimmende hieraus Mittelkraft ist

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

deren Richtung durch die Winkel ϱ, σ, τ mit den Achsen bestimmt ist

$$\left.\begin{aligned} \cos\varrho &= \frac{X}{R} \\ \cos\sigma &= \frac{Y}{R} \\ \cos\tau &= \frac{Z}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Die gegebenen Kräfte sind untereinander im Gleichgewicht, sobald

$$R = 0 \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma P_1 \cos\alpha_1 \\ Y &= \Sigma P_1 \cos\beta_1 \\ Z &= \Sigma P_1 \cos\gamma_1 \end{aligned}\right\} \text{ gleichzeitig} = 0 \text{ ist} \quad \ldots \quad (46)$$

26 Die in den beiden letzten Paragraphen für die Zusammensetzung und Zerlegung gefundenen Gesetze haben nicht allein für constante, sondern auch für veränderliche Kräfte ihre Giltigkeit, da auch die entsprechenden Gesetze für die Beschleunigungen, in dieser Ausdehnung als richtig bewiesen worden sind. Diese veränderlichen Kräfte sind besonders bei der krummlinigen Bewegung in Betracht zu ziehen, da bei dieser im Allgemeinen, in jedem Zeitmoment die Geschwindigkeit und die Richtung der Bahn eine Aenderung erfährt. Jedenfalls lassen sich sämmtliche an dem Punkt, von der Masse m, wirksamen Kräfte in jedem Zeitmoment zu einer Resultante R vereinigen, die wir der Größe und Richtung nach veränderlich annehmen müssen. Aus der Bewegungslehre des mathematischen Punktes wissen wir, daß die Bewegung des Punktes im Raum, als resultirend angesehen werden kann aus den Bewegungen seiner Projectionen auf die drei Achsen, und daß sowohl die Beschleunigung j aus den Achsenbeschleunigungen j_x, j_y, j_z, als auch die Geschwindigkeit v aus den Achsengeschwindigkeiten v_x, v_y, v_z erhalten wird. Die Componenten X, Y, Z der jedesmaligen Resultante R müssen hiernach die Achsenbeschleunigungen hervorrufen, d. h. wir haben nach F. 29

$$\left.\begin{aligned} X &= m j_x \\ Y &= m j_y \\ Z &= m j_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Hieraus ergiebt sich

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 = m^2 (j_x{}^2 + j_y{}^2 + j_z{}^2) = m^2 . j^2$$

oder
$$R = m j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

d. h. also auch bei krummliniger Bewegung des materiellen Punktes von der Masse m ist die jedesmalige Resultante, die bewegende Kraft, gleich dem Product aus der Masse m in die Beschleunigung j, und die Resultante R muß in die Richtung der jedesmaligen Beschleunigung j fallen, kann also nicht in Richtung der Bahn, resp. in Richtung der Geschwindigkeit v wirksam sein.

Da nun die jedesmalige Resultante R in Richtung der Beschleunigung fällt, so liegt sie nach §. 17 in der Osculationsebene der krummen Bahn, und wir können dieselbe in jedem Moment in dieser Ebene in zwei aufeinander normal stehende Componenten zerlegen, von denen die eine in Richtung der Tangente wirkt. Diese heißt Tangentialkraft, wird mit T bezeichnet und ist Ursache der gerade stattfindenden Geschwindigkeit v. Es ist hiernach, unter j_t die Tangentialbeschleunigung verstanden:

$$T = m j_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Die zweite Componente fällt in Richtung des Krümmungshalbmessers ϱ, sie heißt Normalkraft, Ablenkungskraft, wird mit C bezeichnet und hat die Aufgabe, den Punkt aus einer Tangente in die nächstfolgende überzuführen, dagegen trägt sie zur Veränderung der Geschwindigkeit Nichts bei. Aus der Normalbeschleunigung j_n ergiebt sich der Werth von C, mit Rücksicht auf Formel 23:

$$C = m j_n = m \frac{v^2}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Ist die Bewegung auf der Curve gleichförmig, so wird $T = 0$ und $R = C$; es liegt dann also R in Richtung des jedesmaligen Krümmungshalbmessers.

Ist die Bahn des Punktes von der Masse m ein Kreis, so heißt die Normalkraft C Centripetalkraft, und es ist in dem Werth für dieselbe ϱ = dem Kreishalbmesser r zu setzen. Führen wir noch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r}$ ein, so ergiebt sich:

$$C = m r \omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Macht der Punkt in der Minute u Umdrehungen, so ist n. F. 26 $\omega = 0{,}1047\, u$ zu setzen und wird für m sein Werth $\frac{G}{g}$ eingeführt, so entsteht als Größe der Centripetalkraft

$$C = 0{,}0011174\, G r u^2$$

Für eine gleichförmige Bewegung des Punktes auf dem Kreise ist, wie schon angegeben, $R = C$ und $T = 0$, für eine ungleichförmige Bewegung dagegen erhalten wir, wenn wir die Winkelbeschleunigung $\iota = \frac{j_t}{r}$ einführen,

$$T = m r \iota \text{ und hieraus}$$

$$\iota = \frac{T}{m r}.$$

Man multiplicire diesen Bruch im Zähler und Nenner mit r, um die Form zu erhalten, die wir später bei der Bewegung der Körper um eine feste Achse wieder finden werden. $T r$ heißt dabei das statische Moment der Kraft und $m r^2$ das Trägheitsmoment der bewegten Masse.

$$\iota = \frac{T r}{m r^2} = \frac{\text{statisches Moment}}{\text{Trägheitsmoment}} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

27 In dem gewöhnlichen Leben besteht die Wirkung einer Kraft nicht darin, eine vollkommen freie Masse in eine vollkommen freie Bewegung zu versetzen, sondern es wird vielmehr von jeglicher Kraft die Vollbringung einer Leistung, einer Arbeit verlangt. Eine Arbeit besteht aber darin, daß ein gewisser Widerstand, ein Druck oder Zug, eine Gegenkraft und zwar auf jedem Punkte des zurückgelegten Weges überwunden werde. Ein ruhender Druck oder Zug kann nur an einer Stelle des Weges einen Gegendruck aufheben, nicht aber an verschiedenen Punkten, weshalb auch die, eine Bewegung hervorbringende Kraft, in Bewegung begriffen sein, ihr Angriffspunkt also einen Weg zurücklegen muß.

Die von einem Widerstande verbrauchte, sowie die von einer Kraft geleistete Arbeit ist also in derselben Weise zu messen. Man hat als Einheit der Arbeit diejenige Arbeit angenommen, welche geleistet wird, wenn ein Widerstand von 1 Kilogramm auf einem Wege von 1 Meter überwunden wird, hat diese Einheit Kilogramm-Meter genannt und mit ^{km} bezeichnet. In den Ländern, wo Pfund und Fuß die betreffenden Einheiten sind, dient in gleicher Weise das Fußpfund als Arbeitseinheit, das mit f^{pfd} bezeichnet wird. Es ist $1^{km} = 6{,}3724\ f^{pfd}$ preußisch $= 7{,}233\ f^{pfd}$ englisch.

1) Wirkt eine Kraft P mit unveränderlicher Größe und erfolgt die Bewegung ihres Angriffspunktes nach einer, mit der Kraftrichtung übereinstimmenden Richtung, oder sind diese beiden Richtungen gerade entgegengesetzt, so ist die geleistete oder verbrauchte Arbeit sowohl dem Druck P als auch dem vom Angriffspunkte der Kraft zurückgelegten Wege s proportional und wir erhalten daher als Maß der Arbeit, die **Arbeitgröße** L

$$L = P \,.\, s^{km} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Es handelt sich hiernach bei Berechnung der Arbeitgröße einer Kraft nur um die Größe des Drucks und die Länge des Weges, dagegen ist die Zeit, in welcher diese Wirkung ausgeübt wurde, die Geschwindigkeit, mit der die Bewegung erfolgte, die Art der Bewegung, ob dieselbe mit constanter oder mit veränderlicher Geschwindigkeit vor sich geht, ganz außer Betracht zu lassen.

2) Wenn die Kraftrichtung MP mit der Bewegungsrichtung MO den Winkel α bildet (Fig. 33), so denke man P in zwei aufeinander normal stehende Componenten zerlegt, von denen die eine mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt. Bleibt während der Bewegung die Richtung der Kraft P unverändert,

Fig. 33.

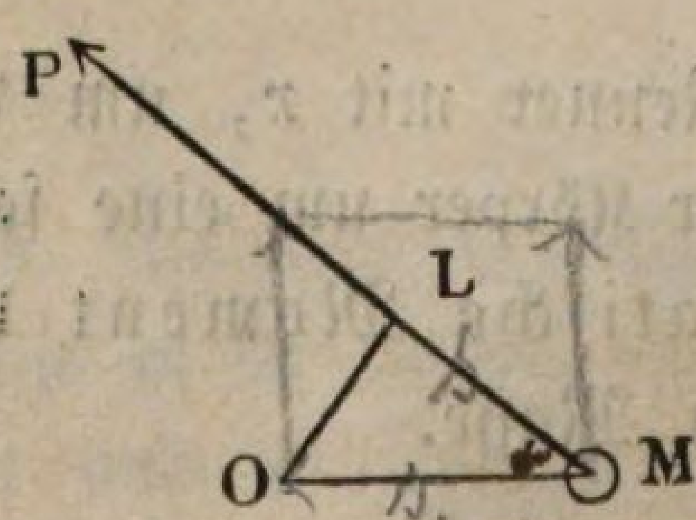
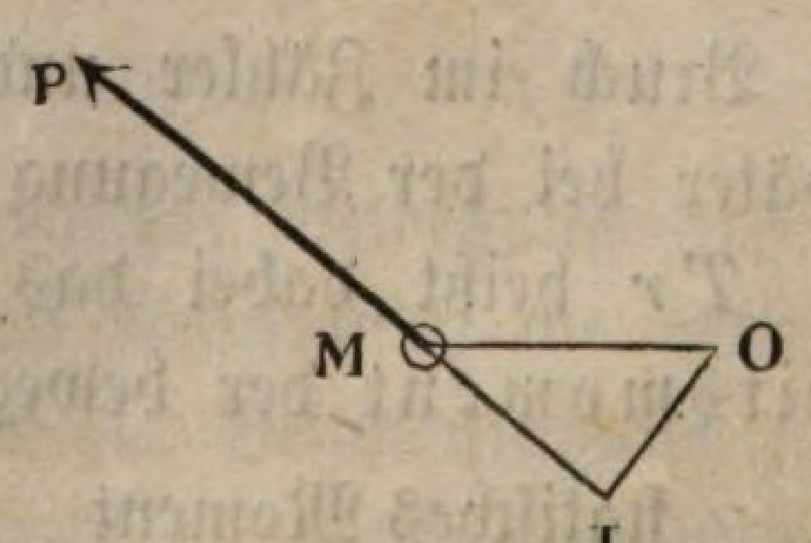


Fig. 34.



so ist ersichtlich, daß die zur Bewegungsrichtung normale Componente $P . sin\,\alpha$ ebenfalls unverändert bleibt und keine Arbeit verrichtet, da sie die Fortbewegung ihres Angriffspunktes nicht bewirkt, daß dagegen die Arbeitgröße der Componente $P . cos\,\alpha$ gleich $P . cos\,\alpha . s_1$, unter $s_1 = M\,O$ den Weg des Angriffspunktes verstanden, zugleich die Arbeitgröße der gegebenen Kraft P ist. Bezeichnet man die Projection von $MO = s_1$ auf die Richtung der Kraft P mit s, so ist $ML = s$ gleich $s_1\, cos\,\alpha$ und daher bei Benutzung dieses Werthes die Arbeitgröße der Kraft P ebenfalls

$$L = P . s^{km},$$

d. h. unter Arbeitgröße einer Kraft versteht man das Product aus dem Druck in Kilogrammen, und dem Weg s in Metern, den der Angriffspunkt des Drucks in **Richtung** desselben zurücklegt.

In gleicher Weise ist also auch die Arbeitgröße eines Widerstandes zu berechnen. (Fig. 34).

3) Trägt man in den beiden behandelten Fällen den Weg $A\,B = s$ auf die X=Achse und den Druck $A\,D = P$ auf die Y=Achse (Fig. 35), so wird dadurch ein Rechteck bestimmt, dessen Inhalt dem Maß nach, das Maß der verrichteten Arbeitgröße angiebt. Die der X=Achse parallele Seite des Rechtecks kann als der geometrische Ort der Endpunkte der Drucke P angesehen werden, wenn man in jedem Moment, dem entsprechenden Wege gemäß, den Druck als Ordinate errichtet. Diesen geometrischen Ort der Endpunkte der beziehlichen Drucke wollen wir die Druckcurve nennen. Aendert sich während der Bewegung der Druck, so kann die Druckcurve nicht mehr mit der X=Achse parallel laufen, sie wird bei gleichmäßiger Aenderung eine zur X=Achse geneigte gerade Linie $D\,C$ sein (Fig. 36) und bei ungleichmäßiger Aenderung eine beliebige krumme Linie bilden (Fig. 37). Die von der Druckcurve begrenzte

Fig. 35.

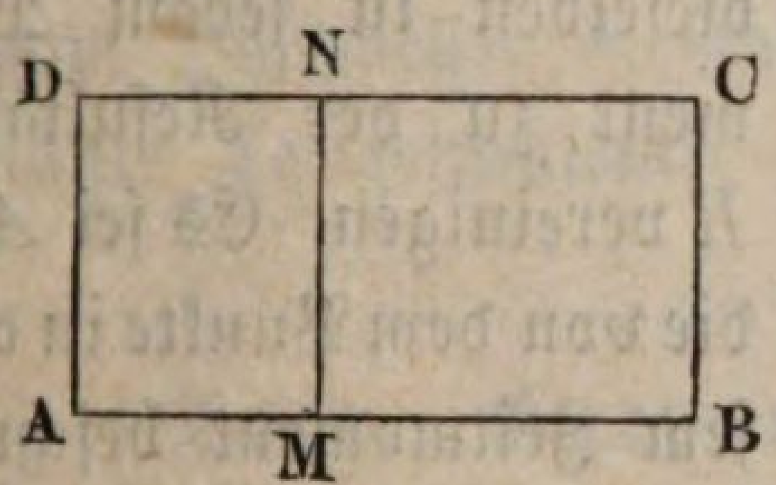


Fig. 36.

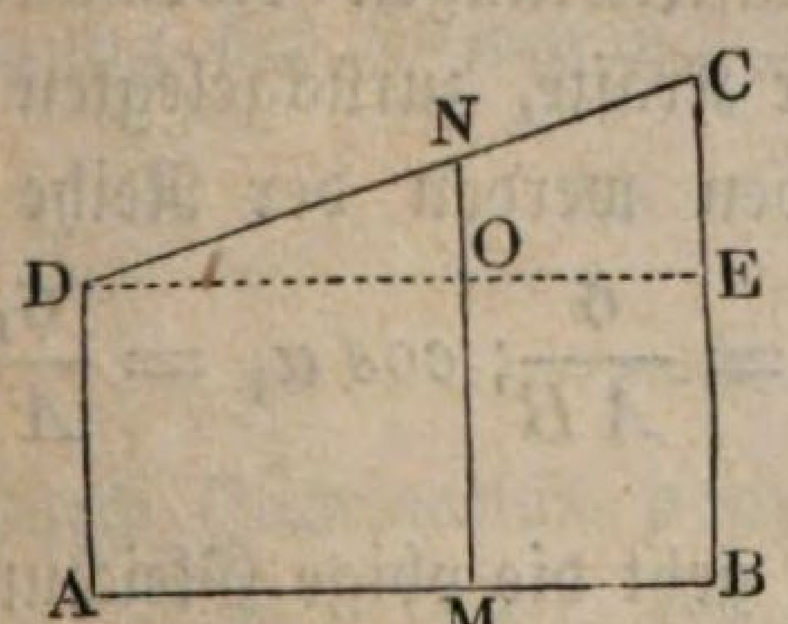
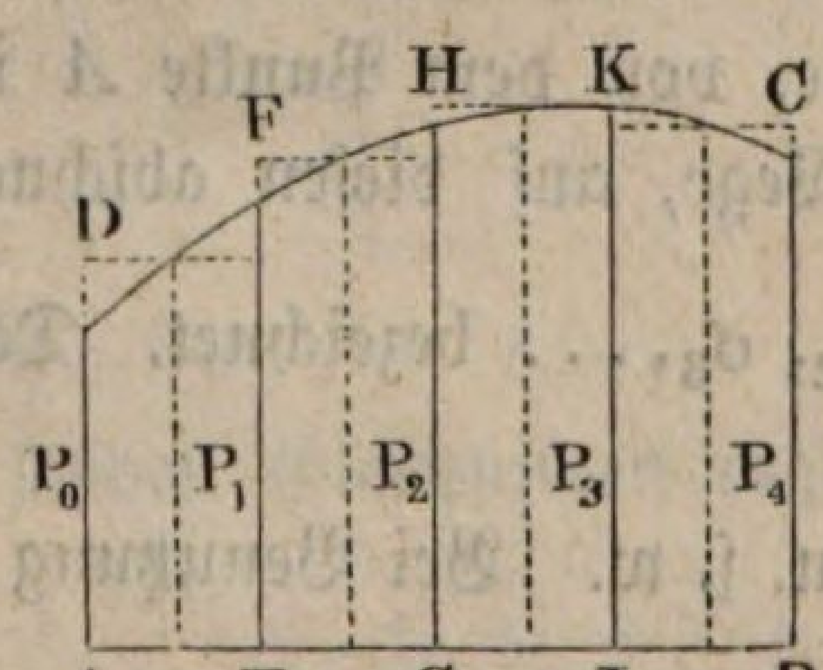


Fig. 37.



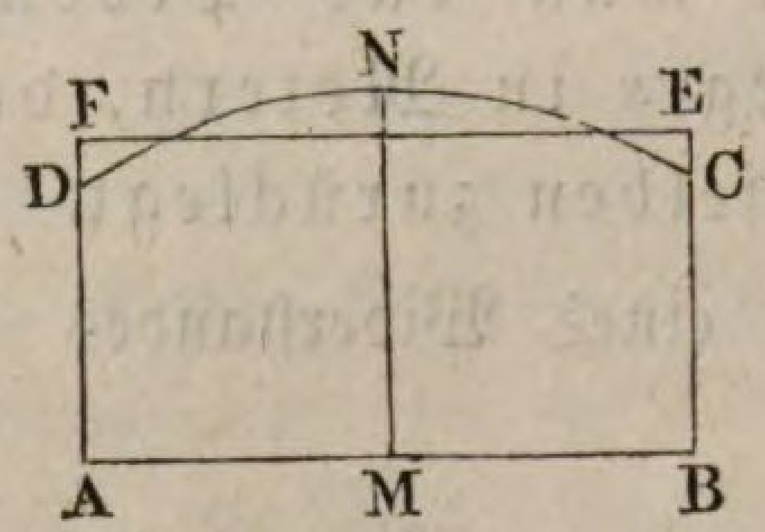
Fläche wird aber jederzeit in ihrem Inhalte das Maß der verrichteten Arbeitgröße darstellen, da wir die Fläche (in gleicher Weise wie früher bei der Beschleunigungs= und Geschwindigkeitscurve) aus unzählig vielen Rechtecken zusammengesetzt denken können, von denen jedes in seinem Inhalte das Maß,

der in dem Momente verrichteten Arbeitgröße vorstellt. Unter dem Wege s ist aber dabei jederzeit der, von dem Angriffspunkte der Kraft, in Richtung derselben zurückgelegte Weg zu verstehen, der also durch Projection des wirklichen Weges auf die Kraftrichtung hergestellt werden muß, wenn dieselbe nicht zugleich die Bewegungsrichtung ist.

Wir haben hiernach ganz allgemein: **Die verrichtete Arbeitgröße wird durch die Fläche der Druckcurve gemessen.**

Den mittleren Werth P_m des veränderlichen Drucks erhält man aus der auf diese Weise berechneten Arbeitgröße, wenn man dieselbe durch den zurückgelegten Weg s dividirt. Es ist also P_m die Seite AF des Rechtecks $AFEB$, welches mit der von der Druckcurve DNG begrenzten Fläche, gleichen Inhalt hat (Fig. 38):

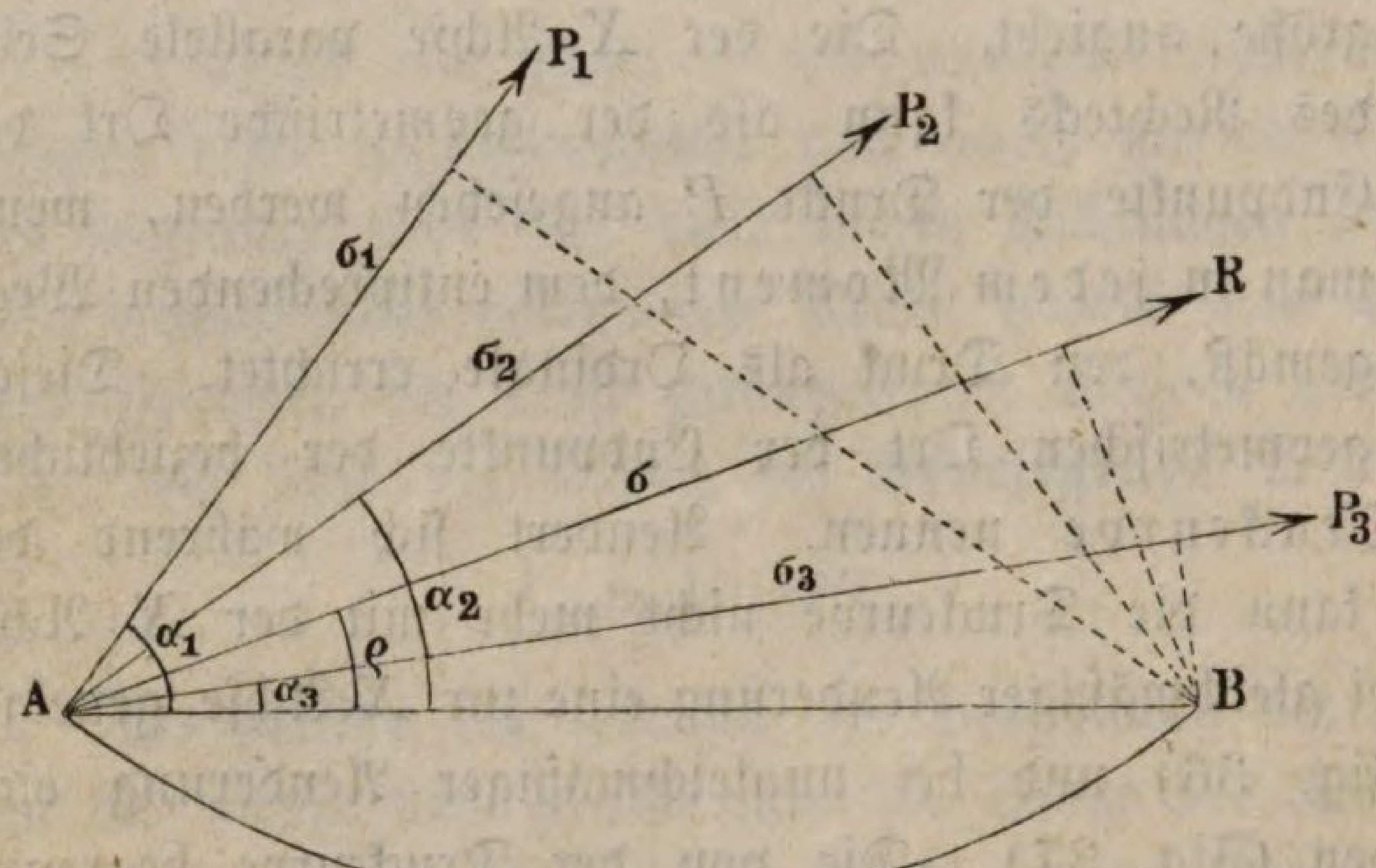
Fig. 38.



$$AF = P_m = \frac{L}{s}.$$

4) Wirken auf einen Punkt A (Fig. 39) mehrere constante oder veränderliche Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$, so lassen sich dieselben in jedem Moment zu der Resultante R vereinigen. Es sei AB die von dem Punkte in diesem Zeitmoment beschriebene krumme Bahn und die gerade Linie AB die X-Achse, dann ist der früheren Bezeichnung gemäß

Fig. 39.



$$R \cos \varrho = X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \ldots P_n \cos \alpha_n.$$

Man denke von B auf sämmtliche Kraftrichtungen Normalen gefällt, welche die, von dem Punkte A in Richtung der Kräfte, zurückgelegten unendlich kleinen Wege, auf diesen abschneiden. Dieselben werden der Reihe nach mit $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ bezeichnet. Dann ist $\cos \varrho = \frac{\sigma}{AB}$; $\cos \alpha_1 = \frac{\sigma_1}{AB}$; $\cos \alpha_2 = \frac{\sigma_2}{AB}$ u. s. w. Bei Benutzung dieser Werthe geht die obige Gleichung über in

$$R\sigma = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + P_3 \sigma_3 + \ldots P_n \sigma_n \text{ oder kürzer}$$

$$R\sigma = \Sigma P_1 \sigma_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

d. h. die in einem Zeitmoment von der Resultante R verrichtete Arbeitgröße ist gleich der algebraischen Summe der Arbeitgrößen sämmtlicher Componenten in derselben Zeit. Jeder der Summanden auf der rechten Seite

der Gleichung ist *positiv* oder *negativ* zu nehmen, je nachdem die Richtung der betreffenden Kraft mit der Richtung der Bewegung, einen *spitzen* oder *stumpfen* Winkel bildet. Die positiven Glieder bezeichnet man mit dem Namen *bewegende Arbeitgrößen*, die negativen Summanden heißen dagegen *widerstehende Arbeitgrößen*. Waren die ursprünglichen Kräfte unter sich im Gleichgewicht, so ist $R = 0$ und die Gleichung 54 liefert

$$\Sigma P_1 \sigma_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Den in Richtung der Kraft zurückgelegten Weg, von unendlich kleiner Größe, nennt man *virtuelle Geschwindigkeit* und das Product aus der Kraft in die virtuelle Geschwindigkeit, wird *virtuelles Moment* oder *virtuelle Arbeitgröße* genannt, so daß die Gleichung 55 das Gesetz ausspricht: Sind die einen Punkt angreifenden *Kräfte unter sich im Gleichgewicht* und verschiebt man das System unendlich wenig, so ist die *algebraische Summe der virtuellen Momente gleich Null*.

5) Denkt man bei der krummlinigen Bewegung die Resultante R in die Tangentialkraft T und die Normalkraft C zerlegt, so ergiebt sich, daß die Arbeitgröße der Resultante in jedem Moment mit der, der Tangentialkraft T übereinstimmt, da die Normalkraft, normal zur Bewegungsrichtung, keine Arbeit zu verrichten im Stande ist. Bewegt sich der Punkt im Kreise vom Halbmesser r, und läuft derselbe u mal herum, so ist, unter T die constante Tangentialkraft verstanden, die verrichtete Arbeitgröße

$$L = T \,.\, 2 \pi r \,.\, u.$$

Bei der Berechnung der Arbeitgröße L, ist zwar auf die Art der Be- 28
wegung, welche der Angriffspunkt der Kraft erhält, gar nicht Rücksicht zu nehmen gewesen, dagegen ist es von Interesse zu untersuchen, welche Arbeit einer Masse m zu ertheilen ist, um dieselbe aus der Ruhe in eine bestimmte Geschwindigkeit v zu versetzen, oder um eine vorhandene Bewegung mit der Geschwindigkeit c, in eine andere mit der Geschwindigkeit v umzuwandeln.

Es sei t die Zeit, welche verfließt, bis die Masse m die Geschwindigkeit v angenommen hat, und s der dabei zurückgelegte Weg. Die bewegende Kraft P sei constant und in der Bewegungsrichtung wirksam, dann ist, unter j die Beschleunigung der Bewegung verstanden:

$$v = j\,t = \frac{P}{m}\,t \text{ und}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,j\,t^2 = \tfrac{1}{2}\,v\,t.$$

Durch Elimination von t aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$P s = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 = L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Hierin bedeutet Ps die Arbeitgröße, welche die Kraft an die Masse während des Weges s übertrug, bis also die verlangte Geschwindigkeit entstanden war, und es ist diese Arbeitgröße gleich dem Product, aus der halben Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit.

Dieses Product wird **lebendige Kraft** genannt, und es sagt daher Glei-

chung 56 aus: 1) Die Arbeitgröße, welche entwickelt werden muß, um einer Masse eine gewisse Geschwindigkeit beizubringen, ist gleich ihrer lebendigen Kraft.

Stellt sich einer bewegten Masse m, welche bei der Geschwindigkeit v also die lebendige Kraft $\frac{1}{2}mv^2$ besitzt, ein constanter Widerstand entgegen, welcher der Bewegungsrichtung gerade entgegen wirkt, so tritt eine gleichmäßig verzögerte Bewegung ein und die Masse kommt allmälig in Ruhe. Ist s der Weg, den die Masse zurücklegt, bis sie in Ruhe gekommen, P der constante Widerstand, t die Zeitdauer der Bewegung und j die negative Beschleunigung, die Verzögerung der Bewegung, so hat man

$$o = v - jt = v - \frac{P}{m}t \text{ und}$$

$$s = \tfrac{1}{2}vt,$$

daher ergiebt sich wieder durch Elimination von t

$$Ps = \tfrac{1}{2}mv^2, \text{ d. h.}$$

2) Die lebendige Kraft einer bewegten Masse ist gleich derjenigen Arbeitgröße, welche diese Masse zu entwickeln vermag, wenn sie auf einen Widerstand so lange einwirkt, bis sie ihre Geschwindigkeit verloren hat.

Besitzt eine Masse m die Geschwindigkeit c, so ist also dadurch eine Arbeitgröße, gleich ihrer lebendigen Kraft $= \frac{1}{2}mc^2$ repräsentirt. Geht diese Geschwindigkeit in gleichmäßiger Aenderung allmälig in v über, so ist jetzt durch die Masse eine Arbeitgröße von $\frac{1}{2}mv^2$ gegeben. Soll daher eine bewegende Kraft die Geschwindigkeit einer Masse allmälig von c auf v bringen, so ist dazu eine Arbeitgröße nothwendig, welche gleich ist der Differenz der lebendigen Kräfte, für die End- und Anfangsgeschwindigkeit, d. h.

$$L = \tfrac{1}{2}m(v^2 - c^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Einer Geschwindigkeitsänderung entspricht also unter allen Umständen eine Arbeitgröße, d. h. bei zunehmender Geschwindigkeit wird ein Verbrauch, bei abnehmender Geschwindigkeit dagegen ein Gewinn an Arbeitgröße stattfinden. Bleibt die Geschwindigkeit während der Bewegung dieselbe, so ist der Masse weder Arbeit zugeführt worden, noch hat dieselbe Arbeit abgegeben.

Die vorgeführten Gesetze sind vollständig auf veränderliche Kräfte übertragbar. Bezeichnen wir zu dem Ende die veränderlichen bewegenden Kräfte in den aufeinander folgenden Zeitmomenten mit $P_1, P_2, P_3 \ldots$, die von ihnen nach ihrer Richtung zurückgelegten Wege mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$, die betreffenden Geschwindigkeiten mit $v_1, v_2, v_3 \ldots$, die Anfangsgeschwindigkeit mit c, die Endgeschwindigkeit mit v, so ist unter steter Anwendung von 57:

$$P_1\sigma_1 = \tfrac{1}{2}m(v_1^2 - c^2)$$
$$P_2\sigma_2 = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$P_3\sigma_3 = \tfrac{1}{2}m(v_3^2 - v_2^2) \text{ u. s. w. bis}$$
$$P_n\sigma_n = \tfrac{1}{2}m(v^2 - v^2_{n-1}).$$

Hieraus folgt:

$$L = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + P_3 \sigma_3 + \cdots = \Sigma P_1 \sigma_1 = \tfrac{1}{2} m (v^2 - c^2).$$

Hatte die Masse zu Anfang keine Geschwindigkeit, so entsteht analog Formel 56:

$$L = \Sigma P_1 \sigma_1 = \tfrac{1}{2} m v^2.$$

Die vorstehenden Beziehungen zwischen der geleisteten Arbeit und der Differenz der lebendigen Kräfte bleiben endlich auch noch erhalten, wenn die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ außer der Veränderlichkeit in der Größe auch noch in jedem Moment ihre Richtung ändern, wenn also die Bahn des Punktes eine krumme Linie ist. In diesem Falle sind unter den obigen Kräften zunächst die Tangentialkräfte zu verstehen. Da jedoch die Arbeit der Normalkräfte, Ablenkungskräfte, Null ist, so ist die Arbeitgröße der Tangentialkräfte gleich jener der Kräfte R, die in jedem Moment in die Tangential- und Ablenkungskraft zerlegt werden mußten. Statt der Arbeitgröße von R sind auch infolge F. 54, die Arbeitgrößen ihrer Componenten X, Y, Z, in Richtung der drei Achsen in Rechnung zu bringen. Bezeichnet man die in einem Zeitmoment in Richtung der Kräfte R, X, Y, Z, P zurückgelegten Wege beziehlich mit $\Delta_r, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \Delta_p$, so spricht sich das in diesem Paragraph vorgetragene Gesetz, das Princip der lebendigen Kräfte genannt, für jegliche Bewegungen und jede beliebige Bahn aus durch die Gleichung:

$$L = \Sigma P \Delta_p = \Sigma R \Delta_r = \Sigma \{ X \Delta_x + Y \Delta_y + Z \Delta_z \} = \tfrac{1}{2} m (v^2 - c^2) . \quad (58)$$

Hieraus läßt sich die Endgeschwindigkeit v bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c jederzeit berechnen, wenn die links stehenden Summationen ausführbar sind, wobei v stets denselben Werth erhält, sobald L dieselbe Größe annimmt. Dieses Gesetz heißt:

Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Für den Fall, daß der Punkt einen Kreis vom Halbmesser r beschreibt, wollen wir noch anstatt der Peripheriegeschwindigkeiten c und v die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ε und ω einführen. Es ist hierfür:

$$\left. \begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2} m r^2 (\omega^2 - \varepsilon^2) \text{ und für } \varepsilon = 0 \\ L &= \tfrac{1}{2} m r^2 \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

Zwei Kräfte sind gleich groß, wenn sie gleiche Arbeitgrößen hervor- 29
bringen, wobei die Art und Weise der Wirkung der beiden Kräfte immer noch eine verschiedene gewesen sein kann. Eine Arbeitgröße von 60^{km} kann man sich z. B. dadurch hervorgebracht denken, daß 60 Kilogramm auf 1 Meter oder 1 Kilogramm auf 60 Meter, oder 2 Kilogramm auf 30 Meter gehoben werden u. s. w. Abgesehen hiervon, ist die Wirkung einer Kraft hauptsächlich von der Zeitdauer abhängig, die sie zur Verrichtung der Arbeit gebraucht. Wir nennen von zwei gleichen Kräften diejenige die mächtigere, intensivere, **stärkere**, welche in kürzerer Zeit dieselbe Arbeitgröße hervorbringt. Bei Vergleichung zweier Kräfte, in Bezug auf die Intensität, mit der sie

arbeiten, haben wir daher die Arbeitgrößen der beiden Kräfte in einer bestimmten Zeit in Betracht zu ziehen. In der Bewegungslehre wird die Secunde als Zeiteinheit benutzt, weshalb auch die in einer Secunde verrichtete Arbeitgröße als die Intensität der Arbeit angesehen und in der Folge, nach Reuleaux, mit **Arbeitstärke** bezeichnet werden soll. Während die Einheit der Arbeitgröße das Kilogramm-Meter ist, muß für die Arbeitstärke das in einer Secunde erzeugte Kilogramm-Meter als Einheit gebraucht werden. Diese letztere soll kurz **Secunden-Kilogramm-Meter** genannt und mit $\underline{\underline{km}}$ bezeichnet werden. (Ein Minuten-Kilogramm-Meter würden wir analog hierzu mit $\underline{km}$ bezeichnen.)

Ist die von einer Kraft verrichtete Arbeitgröße gleich L, und hat die Kraft t Secunden lang gewirkt, so ist die Arbeitstärke der Kraft $\frac{L}{t}$, wofür wir übereinstimmend mit der Bezeichnung $\underline{\underline{km}}$,

$$L^{=}$$

schreiben wollen. Es ist hiernach

$$L^{=} = \frac{Ps}{t} = P . \frac{s}{t} \underline{\underline{km}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Für den Quotienten $\frac{s}{t}$ ist bei gleichförmigen Bewegungen die Geschwindigkeit v zu setzen und wir haben daher für diesen Fall

$$L^{=} = P . v \underline{\underline{km}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

worin P constant sein oder den mittlern Werth der veränderlichen Kraft vorstellen muß.

Bei periodisch veränderlichen Bewegungen ist unter $\frac{s}{t}$ die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung zu verstehen, wenn s die Länge des Weges, der einer Periode entspricht, und t die Zeitdauer derselben bezeichnet, so daß auch für diese Art veränderlicher Bewegungen

$$L^{=} = P v \underline{\underline{km}} \text{ ist.}$$

Es hat sich weiter in der Praxis das Bedürfniß herausgestellt, für die Einheit der Arbeitstärke eine Bezeichnung zu wählen, die von den Maßsystemen der verschiedenen Länder unabhängig ist, und die andererseits durch ihre Größe gestattet, die Arbeitstärke der verwendeten Kräfte in kleineren Zahlen anzugeben, als es bei Benutzung der Einheit $\underline{\underline{km}}$ möglich ist. Eine Arbeitstärke von 75 $\underline{\underline{km}}$ soll als Einheit benutzt und **Pferdestärke** genannt werden. Erzeugt die Kraft, N Pferdestärken, so ist hiernach die Arbeitstärke

$$L^{=} = 75 N \underline{\underline{km}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Für Länder, in denen Pfund und Fuß die betreffenden Einheiten sind, heißt die Einheit für die Arbeitstärke „Sekunden Fußpfund" und wird dem entsprechend mit $\underline{\underline{f^{pfd}}}$ bezeichnet. Es sind 75 $\underline{\underline{km}}$ = 477,93 $\underline{\underline{f^{pfd}}}$ preußisch =

542,47 $\underline{f^{pfd}}$ englisch, welche Reductionszahlen jedoch nicht als Pferdestärke in Preußen und England gelten; vielmehr ist für Preußen 1 Pferdestärke zu 480 $\underline{f^{pfd}}$ bestimmt worden, und in England ist der ursprünglich von Watt eingeführte Werth, von 33 000 $\underline{f^{pfd}}$ = 550 $\underline{f^{pfd}}$ die gesetzliche Größe einer Pferdestärke.

Bei gleichförmigen oder periodisch veränderlichen Bewegungen erhält man durch Verbindung von 61 und 62 noch eine sehr wichtige Beziehung zwischen dem Druck P (bewegende Kraft) und der Anzahl N der zu übertragenden Pferdestärken, nämlich:

$$P v = 75 N \quad \dots\dots\dots\dots \quad (63)$$

War in dem letzten Falle die Bahn der Bewegung ein Kreis vom Halbmesser r, und wurden u Umdrehungen in der Minute gemacht, so entsteht:

$$P \frac{2 \pi r u}{60} = 75 N$$

$$P r = 716 \frac{N}{u} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (64)$$

Hierin heißt $\frac{N}{u}$ der Effectquotient, so daß die Formel sagt: das statische Moment der bewegenden Kraft ist gleich dem 716fachen des Effectquotienten.

Die bisherigen Untersuchungen gingen von der Voraussetzung aus, daß 30
der materielle Punkt den auf ihn einwirkenden Kräften im vollem Maße folgen konnte, daß er also bei Wegnahme der Kräfte, von jeglichem Zwange frei war. Dem entgegen wird ein Punkt häufig durch eine Bahn, aus der er nicht heraustreten kann, an der freien Verfolgung der ihn treffenden Kräfteeinwirkungen gehindert. Eine derartige unfreie Bewegung ist z. B. die eines schweren Körpers, der auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene hinabgleitet, oder ein an einem Faden aufgehängter schwerer Körper, der durch den Faden gezwungen ist, sich auf einer Kugelfläche zu bewegen, deren Halbmesser gleich der Fadenlänge ist.

Führt man in jedem Moment eine Kraft ein, welche die Wirkung der Bahn ersetzt, so kann man von derselben absehen und die Bewegung des Punktes ist wiederum eine freie. Auf den Punkt wirken dann die ursprünglichen an ihm wirksamen Kräfte, resp. deren Resultante R, und zweitens die Kraft, welche die Bahn ersetzt, d. i. der Widerstand der Bahn. Ist der letztere richtig bestimmt, so muß aus der Zusammensetzung desselben mit der Resultante der ursprünglichen Kräfte eine Kraft hervorgehen, welche nun auf den frei gewordenen Punkt dieselbe Einwirkung ausübt, wie vorher die gegebenen Kräfte in Gemeinschaft mit der vorgeschriebenen Bahn.

Unter der Annahme einer vollkommen glatten Bahn kann dieselbe nach tangentialer Richtung der Bewegung keinen Widerstand entgegenstellen, und wenn wir noch zweitens die Voraussetzung machen, daß die Bahn vollkommen fest sein soll, so wird jeder, auch der größte normal zur Bahn aus-

geübte Druck, von derselben aufgehoben werden, ohne daß die Bahn davon einen Eindruck erfährt. Unter diesen Voraussetzungen wird der, unter der Einwirkung beliebig vieler Kräfte stehende materielle Punkt, bei der unfreien Bewegung von dem Hinderniß der Bahn einen Widerstand erleiden, der normal zur Bahn gerichtet ist, und ebenso groß ist auch der Druck, den der Punkt gegen das Hinderniß ausübt.

Es sei D dieser normale Widerstand, mit den drei Achsen die Winkel λ, μ, ν bildend, und R die Resultante der an dem Punkt wirksamen Kräfte, so ist mit Benutzung der früheren Bezeichnungen, für ein beliebiges durch den Punkt gelegtes Coordinatensystem, die Componente

$$\begin{aligned} &\text{in der } X\text{-Achse} = \Sigma P_1 \cos\alpha_1 + D\cos\lambda = X + D\cos\lambda \\ &\quad\text{„ „ } Y \text{ „ } = \Sigma P_1 \cos\beta_1 + D\cos\mu = Y + D\cos\mu \\ &\quad\text{„ „ } Z \text{ „ } = \Sigma P_1 \cos\gamma_1 + D\cos\nu = Z + D\cos\nu. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich als Resultante die sogenannte Effectivkraft E

$$E = \sqrt{(X + D\cos\lambda)^2 + (Y + D\cos\mu)^2 + (Z + D\cos\nu)^2},$$

deren Richtung sich durch die Cosinus der Winkel bestimmt, welche E mit den Achsen bildet. Bezeichnet man diese Winkel mit EX, EY, EZ, so ist

$$\cos EX = \frac{X + D\cos\lambda}{E}; \quad \cos EY = \frac{Y + D\cos\mu}{E}; \quad \cos EZ = \frac{Z + D\cos\nu}{E}.$$

Die Resultante E ist, wie schon angegeben, als die Ursache der freien Bewegung des Punktes anzusehen; d. h. es ist

$$\begin{aligned} E &= mj \\ X + D\cos\lambda &= mj_x \\ Y + D\cos\mu &= mj_y \\ Z + D\cos\nu &= mj_z, \end{aligned}$$

worin j, j_x, j_y, j_z und m die früher angegebenen Bedeutungen haben.

Andererseits kann man auch E in die Tangentialkraft T und die Ablenkungskraft C zerlegen und wir haben dann nach dem Früheren:

$$\begin{aligned} E\cos TE &= T = mj_t \\ E\cos CE &= C = mj_n = m\frac{v^2}{\varrho}. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir, daß die Effectivkraft E sich mit T und C in der Osculationsebene befindet, dagegen R und D nicht in dieser Ebene liegen müssen, so wird sich bei einer Zerlegung der Kräfte nach Richtung der Tangente und des Krümmungsradius für R und D eine Componente normal zur Osculationsebene ergeben. Nennen wir die Linie, in deren Richtung die letzteren Componenten liegen, n und bezeichnen die Winkel wieder durch die Linien, welche den entsprechenden Winkel bilden, so ist

$$\begin{aligned} T &= R\cos TR = mj_t \\ C &= R\cos CR + D\cos CD = m\cdot\frac{v^2}{\varrho} \\ 0 &= R\cos nR + D\cos nD = 0. \end{aligned}$$

Die Resultante aus den beiden Normalcomponenten $R\ cos\ C\ R$ und $R\ cos\ n\ R$ sei R_1, und statt der Componenten von D, führen wir diesen Widerstand D selbst ein, so rufen D und R_1 die Ablenkungskraft $m\ \frac{v^2}{\varrho}$ hervor. Es ist also $m\ \frac{v^2}{\varrho}$ die Resultante aus D und R_1 oder der Widerstand D der Bahn ist die **entgegengesetzte Resultante** aus R_1 und der **Gegenkraft** von $m\ \frac{v^2}{\varrho}$.

Diese Gegenkraft der Ablenkungskraft nennt man wohl Centrifugalkraft (Fliehkraft) und hat darunter also die Reaction zu verstehen, mit welcher der durch die Centripetalkraft (Ablenkungskraft) von der geraden Richtung abgelenkte Körper auf die Körper resp. die Bahn zurückwirkt, von denen die ablenkenden Kräfte ausgehen. (Die Centrifugalkraft ist hiernach keinesfalls als eine an dem bewegten Punkte selbst, thätige Kraft anzusehen, da sonst die Centripetal- die Centrifugalkraft aufheben müßte und der Punkt sich in der Tangente geradlinig und gleichförmig weiter bewegen würde.)

Ersetzen wir in den obigen Gleichungen den Widerstand D der Bahn durch $-D$, d. i. der Druck des Punktes gegen die Bahn, so erhält man als Componente desselben

$$D\ cos\ C\ D = R\ cos\ C R - m \frac{v^2}{\varrho}$$

$$D\ cos\ n\ D = R\ cos\ n\ R.$$

Die zweite Gleichung zeigt, daß der Druck normal zur Osculationsebene bloß von der bewegenden Kraft R herrührt. Aus der ersten Gleichung erfährt man den Druck in Richtung des Krümmungshalbmessers. Dieser Druck muß, damit der Punkt in der vorgeschriebenen Bahn bleibt, stets gegen dieselbe gerichtet sein. Der ganze Druck D ergiebt sich, wenn wir wieder die Componenten von R zu der Resultante R_1 vereinigt denken, als Resultante aus der Kraft R_1 und der Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{\varrho}$.

Ist die Bahn des Punktes eine ebene Curve, so bleibt nur der in Richtung des Krümmungshalbmessers wirksame Druck übrig, welcher für $R_1 = 0$, wenn also keine äußeren Kräfte auf den Punkt wirken, gleich der Centrifugalkraft wird.

Das Princip der lebendigen Kräfte läßt sich zunächst für die Effectivkraft E in Anwendung bringen. Für diese ist, wenn c und v die Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Punktes vorstellen

$$L = \Sigma E \triangle e = \tfrac{1}{2} m (v^2 - c^2).$$

Da E die Resultante aus der Tangentialkraft T und der Ablenkungskraft C ist, die letztere aber bei der Bewegung keine Arbeit verrichtet, so ist die Arbeit der Effectivkräfte gleich der Arbeit der Tangentialkräfte zu setzen. Diese sind aber bei vollkommen glatten Bahnen, allein Componenten

von der Resultante R, der an den Punkt äußerlich angebrachten Kräfte. Der Widerstand D der festen Bahn hat also darauf keinen Einfluß, deshalb ist auch für die unfreie Bewegung des materiellen Punktes die oben entwickelte Gleichung (57) richtig

$$L = \Sigma P \Delta_p = \Sigma R \Delta_r = \Sigma \{X \Delta_x + Y \Delta_y + Z \Delta_z\} = \tfrac{1}{2} m (v^2 - c^2).$$

Soll sich der auf einer festen und vollkommen glatten Bahn befindliche Punkt, unter der Einwirkung der äußeren Kräfte, im Gleichgewicht befinden, so muß die oben entwickelte Effectivkraft E gleich Null sein. Das liefert die drei gleichzeitig stattfindenden Gleichgewichtsbedingungen:

$$X + D \cos \lambda = 0$$
$$Y + D \cos \mu = 0$$
$$Z + D \cos \nu = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man die Glieder mit D auf die rechte Seite bringt, die Gleichungen quadrirt, addirt und dabei berücksichtigt, daß $\cos \lambda^2 + \cos \mu^2 + \cos \nu^2 = 1$ ist,

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

d. h. der von der Bahn entwickelte Widerstand stimmt der Größe nach, mit der Resultante R der, an dem Punkt wirksamen Kräfte überein und wirkt derselben entgegengesetzt.

Die obigen drei Gleichgewichtsbedingungen lassen sich durch geschickte Annahme des Coordinatensystems vereinfachen.

a) Die Bahn des Punktes sei eine feste, vollkommen glatte Oberfläche. Die Normale zur Oberfläche, in welcher also der Widerstand D derselben wirksam, nehme man zur Z-Achse, die X- und Y-Achsen liegen dann in der Tangentialebene und die drei Gleichgewichtsbedingungen sind demnach:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad D + Z = 0.$$

Die letzte der drei Gleichungen ist wegen der Festigkeit der Oberfläche jederzeit erfüllt und dient zur Berechnung von D, weshalb sich in diesem Fall die drei Gleichgewichtsbedingungen auf zwei reduciren, nämlich:

$$X = 0 \text{ und } Y = 0.$$

b) Die Bahn des Punktes sei eine feste, vollkommen glatte Curve. In der Normalebene des Curvenpunktes nehme man die Z- und Y-Achse an, dann fällt die X-Achse in Richtung der Tangente. Der Widerstand D liegt ebenfalls in der Normalebene und zerlegt sich, wenn seine Richtung mit der Y- und Z-Achse die Winkel μ und ν bildet, in zwei Componenten $D \cos \mu$ und $D \cos \nu$. Die drei Gleichgewichtsbedingungen erhalten in diesem Falle die Form

$$X = 0; \quad D \cos \mu + Y = 0; \quad D \cos \nu + Z = 0.$$

Die beiden letzteren Gleichungen sind jederzeit wegen der Festigkeit der Curve erfüllt und dienen zur Bestimmung der Größe und Richtung von D. Es bleibt demnach für diesen Fall nur eine Gleichgewichtsbedingung übrig, nämlich $X = 0$.

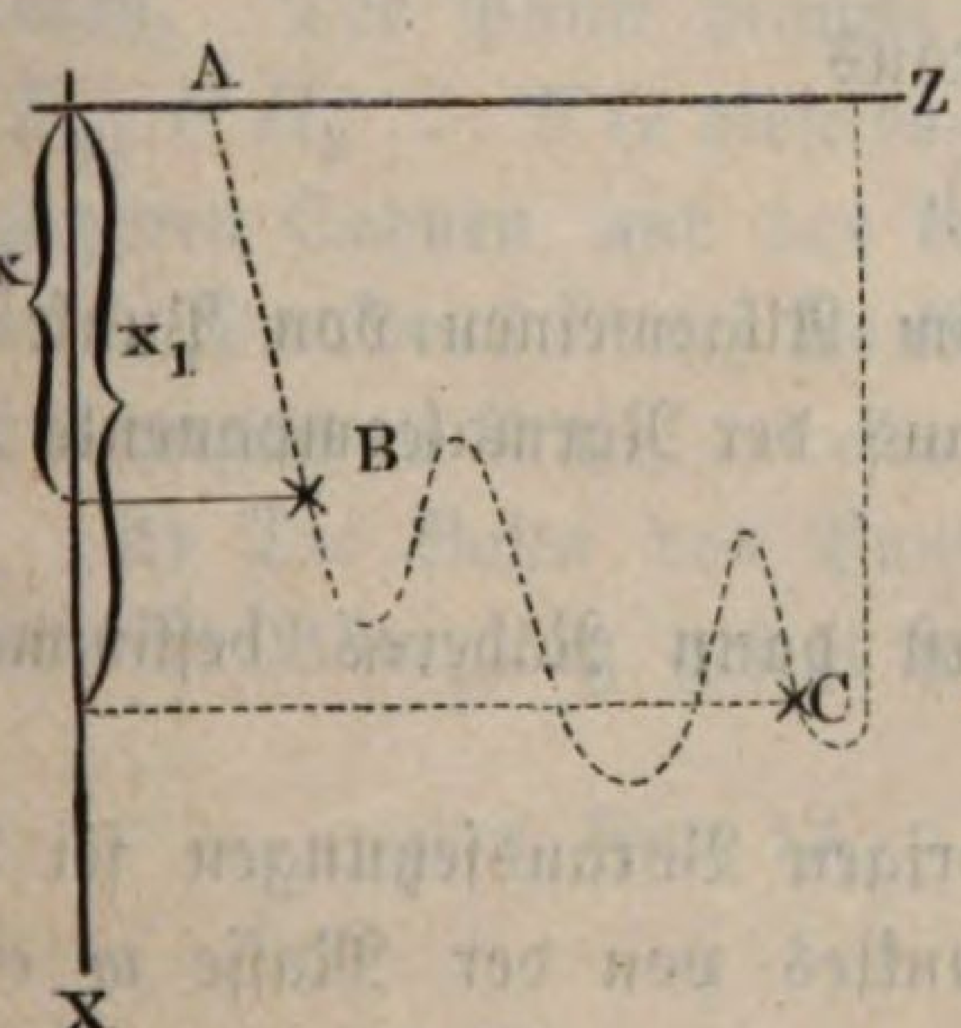
Mit Hülfe des durch F. 55, $\Sigma P_1 \sigma_1 = 0$, dargestellten Princips der virtuellen Momente ist das Gleichgewicht, für die unfreie Bewegung eines Punktes, leicht nachzuweisen. Jede unendlich kleine Verschiebung in der Bahnfläche muß die Masse des Punktes in ihrem Zustande lassen, darf ihr also keine Beschleunigung zuführen, das wird aber nur stattfinden, wenn die algebraische Summe der virtuellen Momente für jede mögliche Verschiebung Null ist. Bei einer Oberfläche muß diese Bedingung nach zwei aufeinander normal stehenden Richtungen, bei einer Curve nur nach Richtung ihrer Tangente erfüllt werden, was der Anzahl nach mit den oben gefundenen Gleichgewichtsbedingungen übereinstimmt und zugleich sagt, daß die Resultante R, aller auf den Punkt einwirkenden Kräfte keine Tangentialcomponente haben kann, also normal zur Oberfläche resp. Curve stehen muß.

Beispiele für die unfreie Bewegung eines materiellen Punktes. 31

Ein Punkt von der Masse m sei allein der Einwirkung der Schwerkraft ausgesetzt und dabei gezwungen die in der Fig. 40 verzeichnete Curve zu durchlaufen.

Die in den einzelnen Momenten einwirkenden Kräfte R sind hier gleich groß und zwar gleich dem Gewicht $m \,.\, g$ des Punktes. Es ist deshalb nach dem Princip der lebendigen Kräfte

Fig. 40.



$$m\, g\, \Sigma \triangle_r = \tfrac{1}{2}\, m\, (v^2 - c^2).$$

Wir nehmen die Z-Achse horizontal, die X-Achse vertical mit dem positiven Theile nach unten gerichtet, so liefert $\Sigma \triangle_r$ die Summe der in den einzelnen Momenten zurückgelegten Wege des Punktes in Richtung der X-Achse. Gesetzt, der Punkt A habe in der ZY-Ebene die Geschwindigkeit 0 gehabt, im Punkte B nach einer gewissen Zeit die Geschwindigkeit v erlangt, indem er sich vermöge der Schwere auf der beliebigen krummen Linie bewegt, so hat man, in der obigen Gleichung $c = 0$ gesetzt,

$$g\, x = \tfrac{1}{2}\, v^2,$$

woraus sich für jeden beliebigen Punkt B auf der Curve die Geschwindigkeit v ergiebt:

$$v = \sqrt{2\, g\, x}.$$

Die Geschwindigkeit ist also ganz unabhängig von der Form der Bahn, dagegen allein abhängig von der Entfernung des Punktes von der ZY-Ebene, d. h. der Punkt hat in allen Punkten der Curve, die gleichweit von der ZY-Ebene entfernt sind, dieselbe Geschwindigkeit. Schneidet man daher die Bahn des Punktes durch eine horizontale Ebene, so erhält der bewegte Punkt immer dieselbe Geschwindigkeit, sobald er in diese Ebene kommt. Gesetzt, die Bahn des Punktes komme nach einmaligem Fallen in die ZY-Ebene zurück,

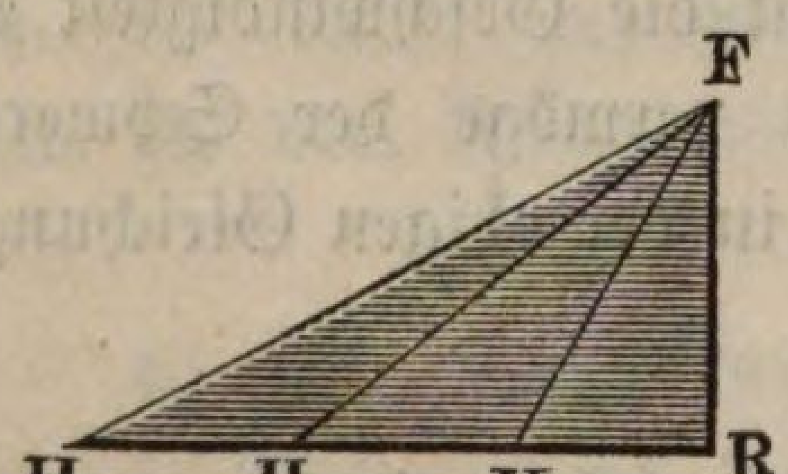
so wird der Punkt vermöge der Schwere zuerst bis zum tiefsten Punkte C der Bahn gebracht werden, dadurch ist ihm eine gewisse Menge lebendiger Kraft mitgetheilt worden, welche die weitere Einwirkung der Schwere überwältigt und hinreicht, den Körper soweit in die Höhe zu treiben, bis die vorhandene Geschwindigkeit verzehrt, der Punkt also in die $Z\,Y$-Ebene gekommen ist. Diese lebendige Kraft leistet dieselbe mechanische Arbeit, welche die Schwere, indem sie den Punkt nach unten brachte, hervorgerufen. Es geht hiernach die einmal beigebrachte lebendige Kraft nicht verloren, was wir durch das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, ausgedrückt haben. Ganz ebenso verhält sich die Sache, wenn die Bahn des Punktes die $Z\,Y$-Ebene nicht erreicht, sondern ein Aufsteigen und Niederfallen abwechselt; die vorhandene lebendige Kraft wird dann nicht vollständig verbraucht, so daß am Ende der Bahn durch diesen Ueberschuß ein Höhersteigen des Punktes erfolgen oder aber die vorhandene lebendige Kraft dazu benutzt werden kann, irgend ein anderes Hinderniß der Bewegung zu beseitigen, wobei die hierzu verrichtete Arbeitgröße, der noch vorhandenen lebendigen Kraft gleich sein muß. Hatte der Punkt in B die Geschwindigkeit c und ist er bis nach C gekommen, wo seine Geschwindigkeit gleich v geworden sein mag, so erhält man den Zuwachs an lebendiger Kraft durch die Gleichung

$$g\,(x_1 - x) = \tfrac{1}{2}\,(v^2 - c^2) \text{ und daraus}$$
$$v = \sqrt{c^2 + 2\,g\,(x_1 - x)}.$$

Der Druck normal zur Curve ändert sich im Allgemeinen von Punkt zu Punkt und ist nach §. 30 gleich der Resultante aus der Normalcomponente R_1 der bewegenden Kraft und der Centrifugalkraft.

Ueber die Art der Bewegung läßt sich erst dann Näheres bestimmen, wenn die Bahn in ihrer Form gegeben.

Fig. 41.



1) Unter den vorigen Voraussetzungen sei die Bahn des schweren Punktes von der Masse m eine gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigte gerade Linie $F\,H$ (Fig. 41). Für die Geschwindigkeit v in H haben wir, wenn $F\,R$ die X-Achse vorstellt,

$$m\,g\,x = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2$$
$$v = \sqrt{2\,g\,x},$$

d. h. der Punkt erhält jederzeit dieselbe Geschwindigkeit, wenn er von F bis R frei fällt oder eine der geneigten Linien von F bis H durchläuft.

Die Tangentialcomponente der bewegenden Kraft $m\,g$ ist hier die in Richtung der Ebene liegende Componente

$$m\,g\,sin\,\alpha.$$

Nach der Formel $P = m\,j$ erhalten wir daher

$$m\,g\,sin\,\alpha = m\,j \text{ oder}$$
$$j = g\,sin\,\alpha,$$

d. h. die Beschleunigung ist für die geneigte Linie constant, weshalb die, für die gleichmäßig veränderte Bewegung entwickelten Gesetze, unmittelbar Anwendung finden.

Nach t Secunden sei der Punkt von F bis H_1 (Fig. 42) gekommen, so ist hier die Geschwindigkeit

$$v = jt = gt \sin \alpha,$$

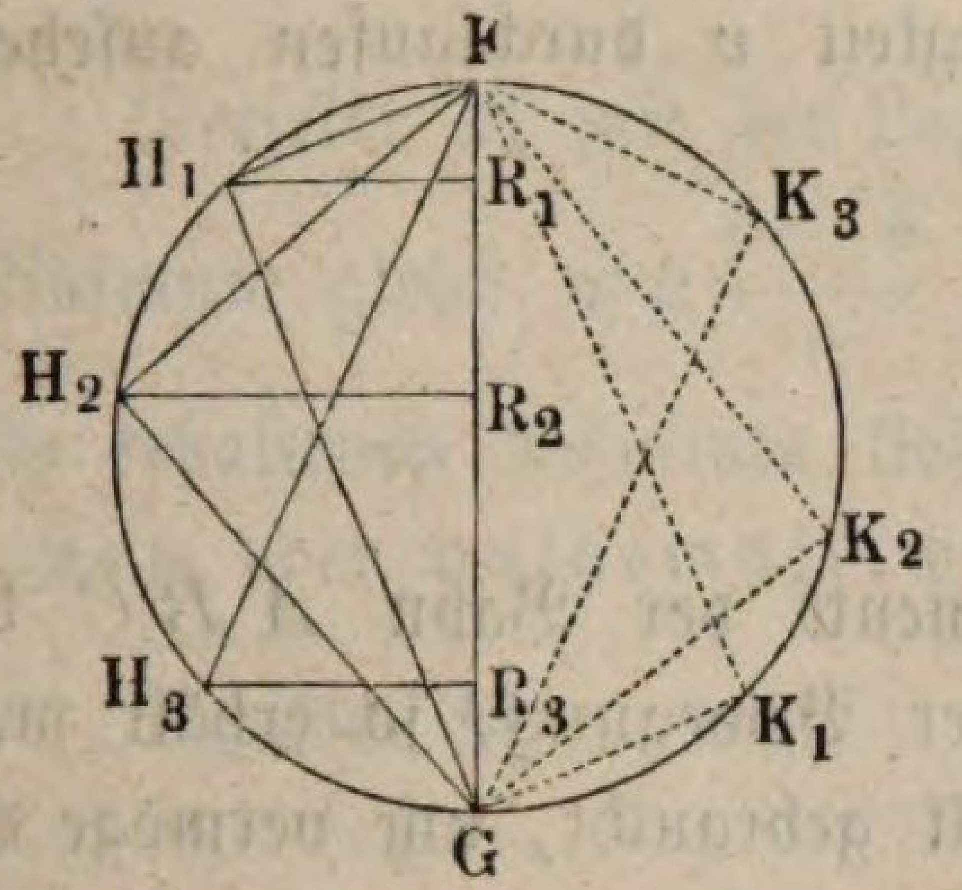
der durchlaufene Weg $FH_1 = s$ aber ist

$$s = \tfrac{1}{2} jt^2 = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin \alpha$$

und hieraus

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{s}{\sin \alpha}}.$$

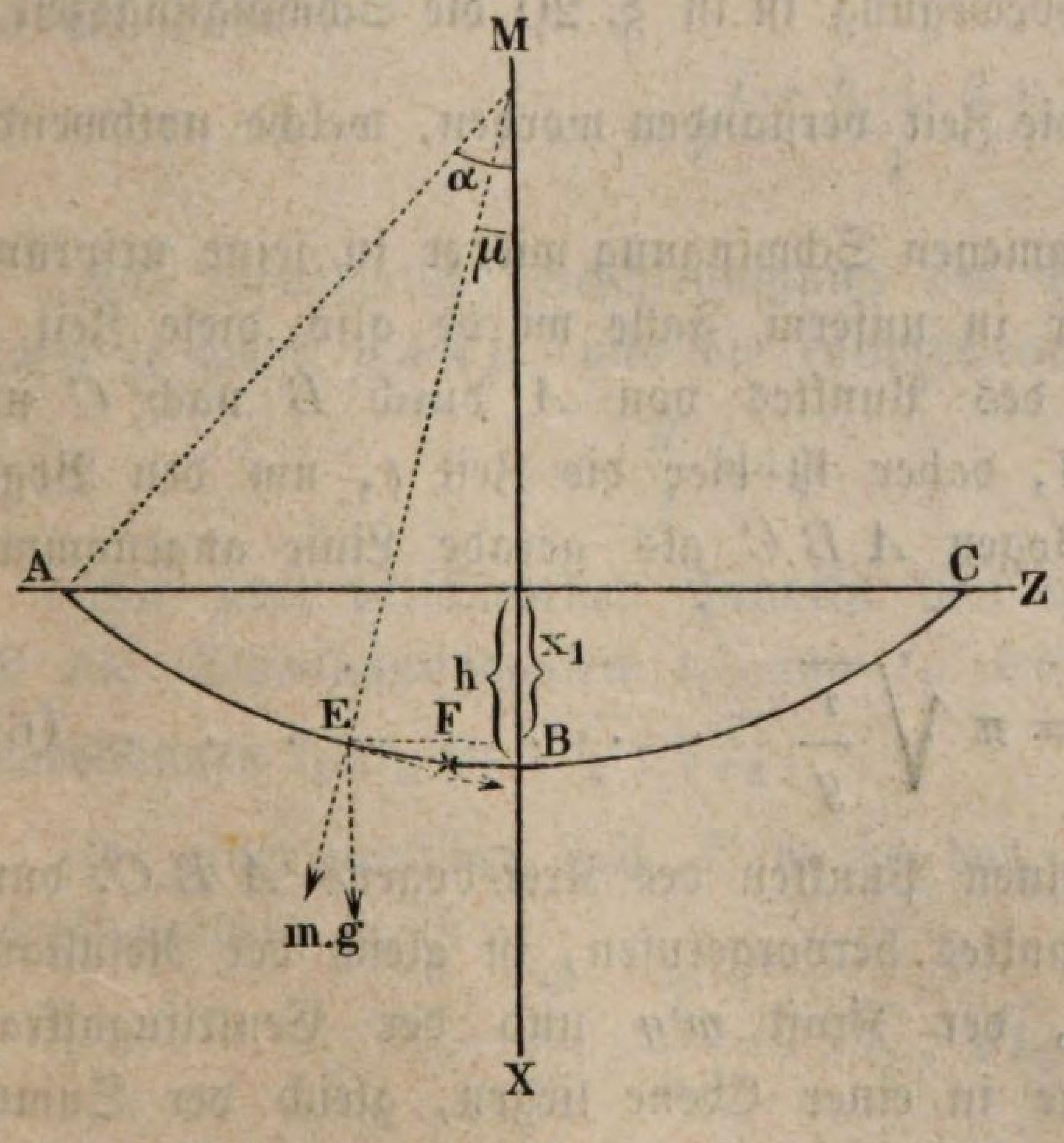
Fig. 42.



Aus diesem Ausdruck ergiebt sich: die Zeitdauer der Bewegung wird auf denjenigen geneigten Linien dieselbe sein, für welche $\frac{s}{\sin \alpha}$ denselben Werth hat. Man errichte in H_1 zu FH_1 eine Normale $H_1\,G$, schlage über FG als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser der geometrische Ort der Endpunkte derjenigen geneigten Linien, die von dem Punkte von F aus in derselben Zeit durchlaufen werden. Der Punkt braucht hiernach für die Zurücklegung der Strecken FH_1, FH_2, $FH_3 \ldots FG$ dieselbe Zeit, oder die, von einem Punkte eines Kreises aus, gezogenen Sehnen und der dazu gehörige Durchmesser werden isochron durchlaufen. Der Druck D auf die Bahn ist hier gleich der Normalcomponente $mg \cos \alpha$ der bewegenden Kraft, da eine Centrifugalkraft, wegen $\varrho = \infty$, nicht vorhanden.

2) Die Bahn des Punktes von der Masse m, der durch die Schwere allein in Bewegung gesetzt wird, sei ein Kreisbogen ABC (Fig. 43), der in einer verticalen Ebene, in der XZ-Ebene, liegt.

Fig. 43.



Ein materieller Punkt in A auf den Kreisbogen gelegt, der Schwere überlassen, bewegt sich bis B, und vermöge der erlangten lebendigen Kraft weiter bis C, wo die in B vorhanden gewesene Geschwindigkeit verbraucht ist, wenn C und A in derselben Horizontalebene liegen. Hier wiederholt sich das Spiel von Neuem, der Punkt geht zurück durch B nach A, wieder von A durch B nach C u. s. w., bleibt also immer in Bewegung, wenn wir von jeglichen Widerständen absehen.

Der Punkt sei mit der Geschwindigkeit v in E angekommen, dann ist, die senkrechte Entfernung von E bis zur Horizontalebene $A\,C$ mit x_1 bezeichnet:

$$m\,g\,x_1 = \tfrac{1}{2}\,v^2\,m, \text{ daher}$$
$$v = \sqrt{2\,g\,x_1}.$$

Im nächsten Zeitmoment τ komme E nach F, der Bogen $E\,F = \sigma$ läßt sich als gleichförmig mit der Geschwindigkeit v durchlaufen ansehen, daher ist

$$\sigma = v\,\tau \text{ und}$$
$$\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{2\,g\,x_1}}.$$

Für die aufeinander folgenden Wegelemente der Bahn $A\,B\,C$ bestimme man nach dieser Formel die Zeitdauer der Bewegung, so erhält man in $\Sigma\tau = t$ die Zeit, welche der materielle Punkt gebraucht, um vermöge der Schwere von A durch B nach C gebracht zu werden, d. h. um eine Schwingung zu machen.

Wird der Halbmesser r verhältnißmäßig groß, der Ausschlagwinkel α aber kleiner als $5°$ genommen, so läßt sich der Kreisbogen $A\,B\,C$ als gerade Linie ansehen, und wir haben es dann mit einer geradlinigen Schwingung zu thun. In diesem Falle ist die Kraft, welche den Punkt in die Ruhelage zu bringen versucht, $m\,g\,sin\,\mu$ gleich $m\,g\,\frac{E\,B}{r}$. Die entsprechende Beschleunigung ist also $g\,\frac{E\,B}{r}$, d. h. proportional der Entfernung $B\,E$, d. i. der Entfernung des bewegten Punktes von seiner Ruhelage in B, und die Beschleunigung in der Entfernung 1 von B ist deshalb gleich $\iota = \frac{g}{r}$. Für eine derartige geradlinige Schwingungsbewegung ist in §. 20 die Schwingungszeit t_1 zu $\frac{2\,\pi}{\sqrt{\iota}}$ bestimmt und darunter die Zeit verstanden worden, welche nothwendig ist, den Punkt nach einer vollkommenen Schwingung wieder in seine ursprüngliche Lage zurückzubringen. Hier in unserm Falle würde also diese Zeit t_1 verstreichen, bei der Bewegung des Punktes von A durch B nach C und zurück von C durch B nach A, daher ist hier die Zeit t, um den Bogen $A\,B\,C$ zu durchlaufen, wenn Bogen $A\,B\,C$ als gerade Linie angenommen werden darf:

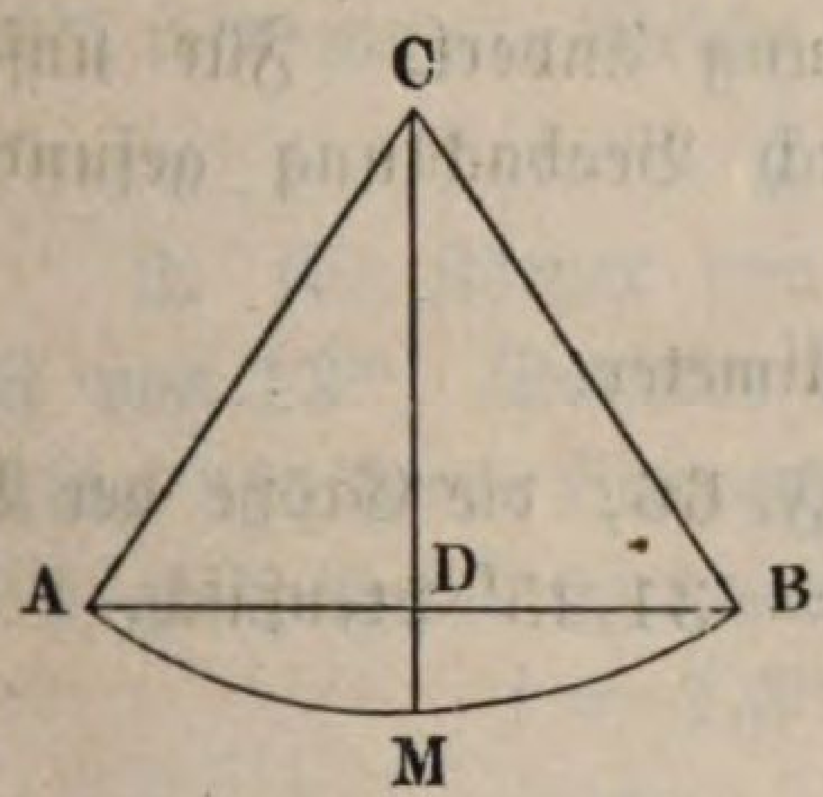
$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\iota}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Der Druck D in den einzelnen Punkten des Kreisbogens $A\,B\,C$, durch die Bewegung des materiellen Punktes hervorgerufen, ist gleich der Resultante aus der Normalcomponente R_1, der Kraft $m\,g$ und der Centrifugalkraft, welche hier, da sämmtliche Kräfte in einer Ebene liegen, gleich der Summe dieser beiden Kräfte ist. Für den beliebigen Punkt E haben wir hiernach:

$$D = m g \cos \mu + \frac{v^2}{r} m$$
$$= m g \frac{r-(h-x_1)}{r} + \frac{2 g x_1}{r} m$$
$$= m g \frac{r-h+3 x_1}{r}.$$

Derselbe ist mit der Lage des Punktes veränderlich, ist bei A und C ein Minimum gleich $m g \frac{r-h}{r}$ und in B ein Maximum gleich $m g \frac{r+2h}{r}$. Die erhaltenen Resultate liefern das Gesetz der Schwingungen bei dem einfachen oder mathematischen Pendel (Fig. 44). Dasselbe besteht aus einem schweren materiellen Punkte A, der mittelst eines unausdehnbaren Fadens ohne Masse an einem festen Punkte C aufgehängt ist. Bringt man den materiellen Punkt aus der verticalen Linie nach A und überläßt ihn der Schwere, so wird er nach beiden Seiten der Verticalen kreisförmige Schwingungen machen, wobei die Endpunkte A und B derselben sich auf derselben Horizontalen befinden müssen. Sieht man hier von jeglichen Widerständen ab, nimmt den Ausschlagwinkel unter 5°, und setzt in F. 65 die Länge l des Fadens anstatt r, so erhält man als Schwingungszeit eines einfachen Pendels

Fig. 44.



$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Spannung S des Fadens ist gleich dem oben gefundenen Druck D auf die Bahn

$$S = m g \frac{l-h+3 x_1}{l}.$$

Die veränderliche Beschleunigung des Punktes ist bei einem Ausschlagwinkel μ gleich $g \sin \mu$, und die entsprechende Winkelbeschleunigung

$$\iota = \frac{g}{l} \sin \mu.$$

Bei zwei verschiedenen Pendeln von den Längen l_1 und l_2 verhalten sich die Schwingungszeiten t_1 und t_2 wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen $t_1 : t_2 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}$.

In einer gewissen Zeit T mache das eine Pendel n_1, das andere n_2 Schwingungen, so ist:

$$\frac{T}{n_1} : \frac{T}{n_2} = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} \text{ und hieraus}$$
$$n_1 : n_2 = \sqrt{l_2} : \sqrt{l_1},$$

d. h. die Schwingungszahlen verhalten sich bei zwei verschiedenen einfachen Pendeln umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Ein Pendel heißt ein Secundenpendel, wenn seine Schwingungszeit t gleich einer Secunde ist. Aus der entsprechenden Gleichung $1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ läßt sich bei bekanntem l die Beschleunigung g der Schwere oder umgekehrt, bei bekanntem g die Länge l des einfachen Secundenpendels berechnen. Es ist

$$\left.\begin{array}{l} l = \dfrac{g}{\pi^2} \\ \text{und } g = l\,\pi^2 \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

Die Länge des Secundenpendels ändert sich für die verschiedenen Orte der Erde, sie wird größer gegen die Pole und kleiner gegen den Aequator, ganz in derselben Weise, wie sich die Beschleunigung ändert. Für unsere Gegenden ist die Länge l des Secundenpendels durch Beobachtung gefunden worden, nämlich gleich

$$3{,}1663' \text{ preußisch} = 993{,}9 \text{ Millimeter.}$$

Bei Benutzung dieses Werthes findet man n. F. 66, die Größe der Beschleunigung g für unsere Gegenden gleich $9{,}809^m = 31{,}25'$ preußisch.

Uebungen.

1. Ein Körper von dem Gewichte 20 Kilogramm wird durch eine Kraft in eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung versetzt, deren Acceleration gleich $2{,}7^m$ sein mag. Welche Größe hat die Kraft?

5,5 Kilogramm.

2. Ein Körper von dem Gewicht 50 Kilogramm besitzt eine Geschwindigkeit von 13^m. Derselbe wird durch eine constant wirkende Kraft in eine gleichmäßig verzögerte Bewegung gebracht und kommt nach 10 Secunden zur Ruhe. Wie groß ist die wirksame Kraft? Welchen Weg hat der Körper zurückgelegt?

$j = 1{,}3^m$; $P = 6{,}6$ Kilogramm; $s = 65^m$.

3. Eine Kraft von 150 Kilogramm hat 1 Secunde lang auf einen Körper von 200 Kilogramm Gewicht eingewirkt. Welche Geschwindigkeit erhält der Körper?

$7{,}3^m$.

4. Zwei Körper, von den Gewichten 5 und 12,5 Kilogramm, befinden sich in gleichmäßig beschleunigter Bewegung mit den Accelerationen 4 und $4{,}5^m$.

Wie verhalten sich die bewegenden Kräfte der Größe nach?

Wie verhalten sich dieselben bei den oben angegebenen Accelerationen, wenn die Körper dasselbe Gewicht haben?

Wie verhalten sich die Kräfte bei dem oben angegebenen Gewichte, wenn die Accelerationen bei den beiden Bewegungen gleich groß sein sollen?

1 : 2,8; 1 : 1,125; 1 : 2,5.

5. Ein Körper von 50 Kilogramm Gewicht wird vermittelst eines Fadens aufgehängt. Es ist die Spannung des Fadens zu bestimmen, wenn der Aufhängepunkt mit einer Beschleunigung von $1{,}5^m$ in senkrechter Richtung abwärts oder aufwärts bewegt wird.

42,4 und 57,6 Kilogramm.

6. Zwei Körper von 25 und 36 Kilogramm Gewicht besitzen Geschwindigkeiten von 10 und 15^m. Wie verhalten sich die Bewegungsgrößen (Antriebe)? Wie verhalten sich dieselben bei gleichen Gewichten und wie, bei gleichen Geschwindigkeiten?

1 : 2,16; 1 : 1,5; 1 : 1,44.

7. Auf einen Punkt wirken theils nach derselben, theils nach der gerade entgegengesetzten Richtung die Kräfte + 130 Kilogramm, — 50 Kilogramm, — 70 Kilogramm, — 320 Kilogramm, + 75 Kilogramm, + 400 Kilogramm, deren Resultante der Größe und Richtung nach bestimmt werden soll.

$R = + 165$ Kilogramm.

8. Auf einen Punkt wirken die Kräfte von 35 Kilogramm und 87 Kilogramm unter einem rechten Winkel. Es ist die Resultante der Größe und Richtung nach zu bestimmen.

$R = 93{,}77$ Kilogramm
68° 5′ mit der Kraft von 35 Kilogramm.

9. Man soll die auf einen Punkt wirksame Kraft von 120 Kilogramm in zwei auf einander rechtwinkelig stehende Kräfte zerlegen, von denen
a. die eine gleich 75 Kilogramm sein mag,
b. die eine, einen Winkel von 34° 7′ 3″ mit der Resultante bilden soll.

a. { 51° 19′ 3,75″ mit der Kraft von 75 Kilogramm.
93,65 Kilogramm.

b. { 99,343 Kilogramm an dem gegebenen Winkel liegend.
67,306 Kilogramm.

10. Auf einen Punkt wirken drei Kräfte gleich 35, 67 und 98 Kilogramm, die nicht in einer Ebene liegen und wechselseitig auf einander rechtwinkelig stehen. Es ist die Größe und Richtung der Resultante zu bestimmen.

{ 123,766 Kilogramm
73° 34′ 24″
57° 13′ 30″
37° 38′ 42″.

11. Auf einen Punkt wird ein Druck von 550 Kilogramm ausgeübt, der nach drei auf einander normalen Richtungen zerlegt werden soll.
a. Zwei der Componenten seien 100 und 230 Kilogramm.
b. Eine der Componenten habe eine Größe von 120 Kilogramm und die gegebene Kraft soll mit einer zweiten Componente, den Winkel 15° 6′ 14″ bilden.
c. Die gegebene Kraft soll mit zweien der Componenten, die Winkel 87° 13′ 12″ und 54° 17′ 8″ bilden

a. { 489,49
79° 31′ 27″
65° 16′ 49″
27° 7′ 43″.

b. { 120 Kilogramm mit 77° 23′ 51″
531,02 » » 15° 6′ 14″
78,2 » » 81° 49′ 32″
36° 23′ 48″.

c. { 445,7 Kilogramm.
321,06 »
26,676 »

12. Auf einen Punkt wirken zwei Kräfte gleich 115 und 89 Kilogramm, die mit einander den Winkel 147° 8′ 3″ bilden.

a. Wie groß ist die Resultante der Größe und Richtung nach?

b. Wie groß ist der Winkel, den die gegebenen Kräfte bilden, wenn die Resultante gleich der kleineren oder gleich der größeren, der gegebenen Kräfte werden soll?

a. { 62,865 Kilogramm mit der Componente
von 89 Kilogramm den Winkel 83° 4′ bildend.

b. { 130° 14′ 44″
112° 45′ 54″.

13. Die Kraft von 775 Kilogramm, an einem Punkte wirksam, soll in zwei Seitenkräfte zerlegt werden.

a. Wenn die Componenten mit der gegebenen Kraft die Winkel 35° 7′ 11″ und 52° 9′ 8″ bilden.

b. Wenn eine der Componenten einen Werth von 505 Kilogramm erhalten und einen Winkel von 36° 8′ 6″ mit der gegebenen Kraft bilden soll.

c. Wenn eine der Componenten gleich 600 genommen werden soll, und die andere, noch zu bestimmende Componente, mit der gegebenen Kraft einen Winkel von 47° 10′ 11″ bilden muß.

d. Wenn die beiden Componenten der Größe nach gleich 462 und 350 Kilogramm gegeben sind.

a. { 612,65 Kilogramm
446,34 »

b. { 472,7 Kilogramm
39° 2′ 3″.

c. { 718,8 oder 334,8 Kilogramm
61° 28′ 17″ oder 24° 9′ 4″.

d. Die beiden Componenten bilden die Winkel 35° 4′ und die Resultante mit der Kraft 462 Kilogramm den Winkel 15° 2′ 18″.

14. Drei Kräfte, gleich 32, 45 und 50 Kilogramm, sollen in einer Ebene so an einen Punkt gelegt werden, daß sie sich das Gleichgewicht halten. Wie groß sind die Winkel, welche die Kräfte mit einander bilden?

Der Winkel zwischen 32 und 45 = 100° 59′ 22″
» » » 32 » 50 = 117° 55′ 58″
» » » 45 » 50 = 141° 4′ 40″.

15. Die Summe dreier Kräfte, die in einer Ebene an einem Punkte wirksam sind und sich das Gleichgewicht halten, ist 478,75 Kilogramm. Die Kräfte mögen mit einander die Winkel

147° 19′, 65° 13′, 147° 28′

bilden. Welche Größe hat jede der Kräfte?

130,195 Kilogramm
129,66 »
218,895 »

16. Es ist ein Dreieck ABC gegeben. Man soll innerhalb desselben den Punkt X bestimmen, so daß die Verbindungslinien XA, XB, XC der Größe und Lage nach drei Kräfte vorstellen, die sich an X das Gleichgewicht halten.

Jede der Linien muß, verlängert, Mittellinie für das Dreieck werden, weshalb sich die Aufgabe dahin reducirt, für ein gegebenes Dreieck die drei Mittellinien zu berechnen.

17. Wenn eine im Raum gelegene Kraft mit den drei rechtwinkeligen Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ bildet, so finden folgende Relationen statt:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1,$$
$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma^2 = 0.$$

18. Wenn zwei an einem Punkt wirksame Kräfte mit drei auf einander normal stehenden Achsen die Winkel ϱ, σ, τ und λ, μ, ν bilden, sie selbst aber den Winkel ε einschließen, so ist

$$\cos\varepsilon = \cos\varrho\cos\lambda + \cos\sigma\cos\mu + \cos\tau\cos\nu.$$

19. Auf einen Punkt wirken acht Kräfte, die im Raume liegen und der Größe und Richtung nach, zu einem beliebig gewählten rechtwinkeligen Coordinatensysteme gegeben sind. Es ist die Größe und Richtung derjenigen Kraft zu bestimmen, die, an den Punkt versetzt, Gleichgewicht hervorbringt.

$P_1 = 75$ Kilogr.;	$\alpha_1 = 63^\circ\,27'$;	$\beta_1 = 48^\circ\,36'$;	$\gamma_1 =$ spitz
$P_2 = 80$ »	$\alpha_2 = 153^\circ\,44'$;	$\beta_2 = 67^\circ\,13'$;	$\gamma_2 =$ stumpf
$P_3 = 95$ »	$\alpha_3 = 76^\circ\,14'$;	$\beta_3 = 147^\circ\,12'$;	$\gamma_3 =$ stumpf
$P_4 = 135$ »	$\alpha_4 = 115^\circ\,7'$;	$\beta_4 = 137^\circ\,9'$;	$\gamma_4 =$ stumpf
$P_5 = 670$ »	$\alpha_5 = 76^\circ\,3'$;	$\beta_5 = 35^\circ\,3'$;	$\gamma_5 =$ spitz
$P_6 = 37$ »	$\alpha_6 = 145^\circ\,7'$;	$\beta_6 = 78^\circ\,3'$;	$\gamma_6 =$ spitz
$P_7 = 95$ »	$\alpha_7 = 62^\circ\,10'$;	$\beta_7 = 149^\circ\,8'$;	$\gamma_7 =$ spitz
$P_8 = 140$ »	$\alpha_8 = 123^\circ\,58'$;	$\beta_8 = 127^\circ\,56'$;	$\gamma_8 =$ stumpf.

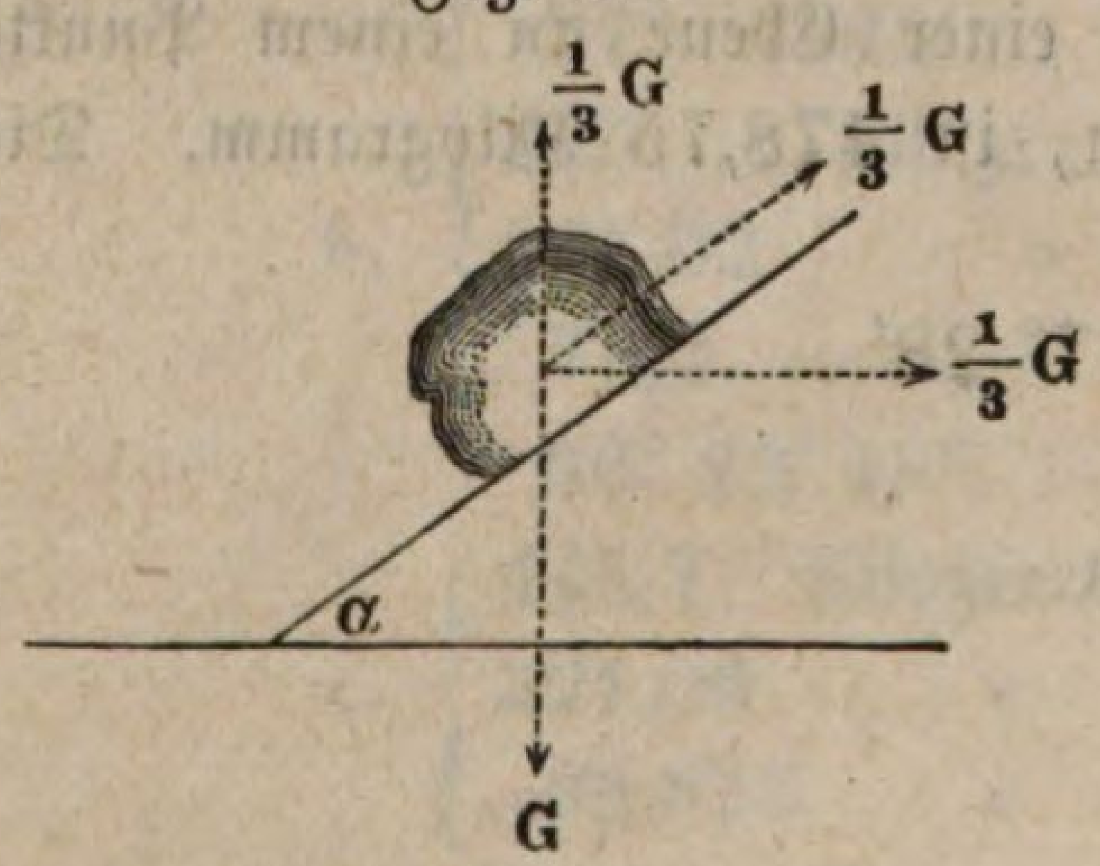
$$X = \Sigma P_1 \cos\alpha_1 = +\,24{,}393;\quad Y = \Sigma P_1 \cos\beta_1 = +\,290{,}290;$$
$$Z = \Sigma P_1 \cos\gamma_1 = +\,221{,}295.$$

$$R = 365{,}84;\ \varrho = 86^\circ\,10'\,36'';\ \sigma = 37^\circ\,29'\,14'';\ \tau = 52^\circ\,46'\,43''.$$

Die Resultante der Kräfte liegt im ersten Raum, die entgegengesetzte Resultante also im achten Raume, und die Winkel, welche die letztere mit den Achsen bildet, sind sämmtlich stumpf und zwar:

$$\varrho_1 = 93^\circ\,49'\,24'';\ \sigma_1 = 142^\circ\,30'\,46'';$$
$$\tau_1 = 127^\circ\,13'\,17''.$$

Fig. 45.



20. Ein Gewicht G (Fig. 45) liegt auf einer gegen den Horizont geneigten vollkommen glatten Ebene und wird durch drei gleiche Kräfte, gleich $^1/_3\,G$, an seinem Platz erhalten. Die vier Kräfte liegen in einer Ebene

und greifen einen Punkt im Innern des Körpers an. Das Gewicht G wirkt in einer zur Horizontalebene normalen Richtung. $^1/_3\ G$ wirkt horizontal, $^1/_3\ G$ wirkt parallel der geneigten Ebene und $^1/_3\ G$ wirkt der Kraft G gerade entgegengesetzt.

Welchen Winkel bildet die geneigte Ebene mit der Horizontalebene?

$$53^\circ\ 7'\ 48''.$$

21. Es sei eine Stange AB (Fig. 46) in fester Lage gegeben, um den Winkel α gegen die Horizontalebene geneigt. An einem Ringe, der sich an der Stange verschieben läßt, wirken zwei Kräfte P und Q, die mit der Stange in derselben Ebene liegen, von denen P normal zur Horizontalebene wirksam ist, während die Kraft Q ihre Richtung mit der Lage des Ringes ändert. Die Kraft Q ist nämlich durch ein Gewicht ersetzt, das mittelst eines Seiles über eine feste Rolle geführt wird. Es ist für diese Anordnung der Gleichgewichtszustand des Ringes zu bestimmen, wenn die Lage der festen Rolle, sowie deren Halbmesser bekannt ist.

Fig. 46.

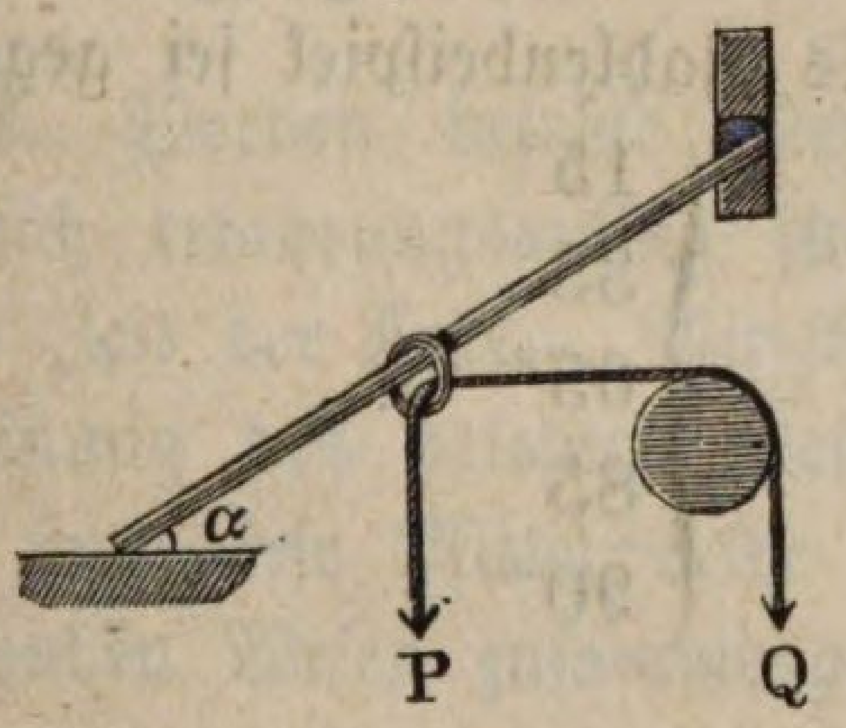
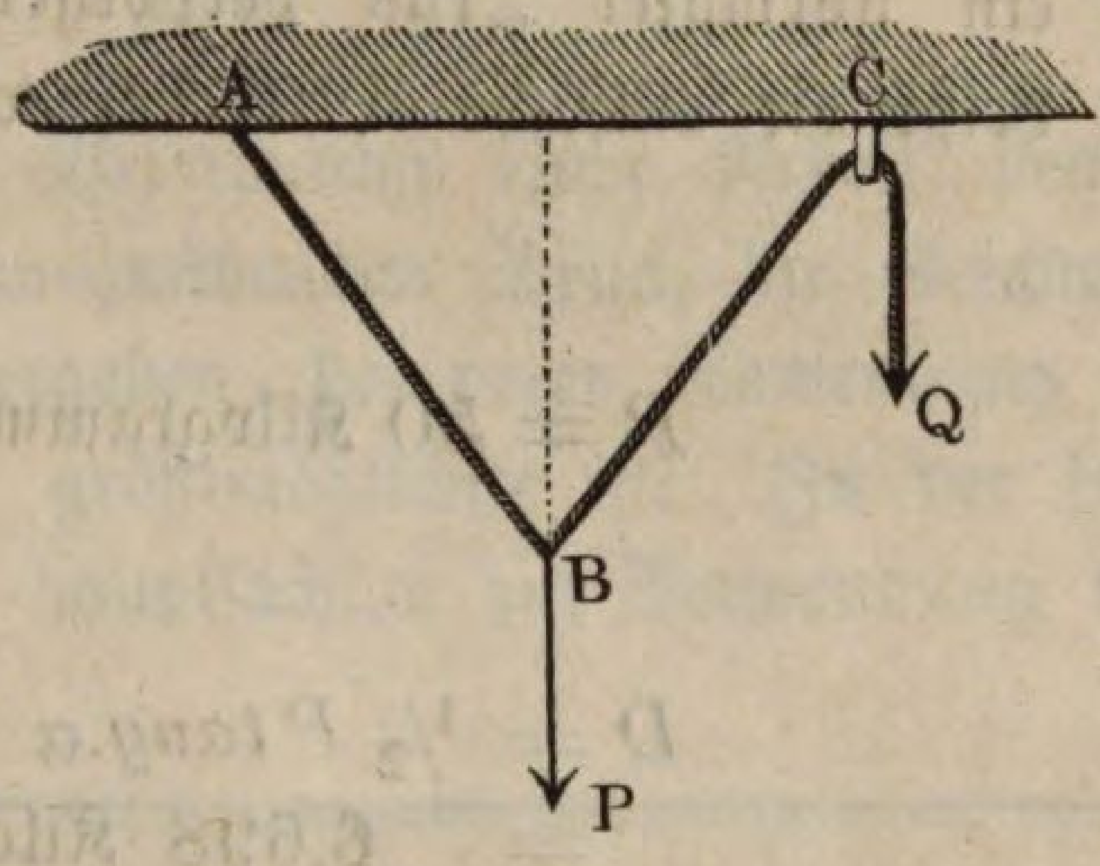


Fig. 47.



22. Es sind zwei feste Punkte A und C gegeben (Fig. 47), ein vollkommen biegsamer Faden ist in A befestigt, bei C durch einen Ring geführt und in einem dazwischen liegenden Punkte B durch eine Kraft P angegriffen, die normal zur Verbindungslinie $A\,C$ wirkt. Das über C fortgeführte Ende des Fadens trägt ein Gewicht Q, so daß $A\,C$ und die beiden Kraftrichtungen sich in derselben Ebene befinden. Es möge Gleichgewicht stattfinden und dabei $A\,C$ durch die Kraftrichtung P halbirt werden.

Welche Größe muß das Gewicht Q erhalten?

Bezeichnen wir $A\,B$ mit a, $A\,C$ mit b, so ist für den Gleichgewichtszustand:

$$Q = P\frac{a}{\sqrt{4\,a^2 - b^2}}.$$

23. Zwei unverrückbare Ebenen sind unter einem Winkel fest mit einander verbunden und zu der Durchschnittslinie wirkt normal eine Kraft P, welche mit der einen Ebene einen Winkel α, mit der andern den Winkel β bildet.

a. Welche Größe haben die daraus zu den Ebenen resultirenden normalen Drucke?

b. Welche Größe erhalten dieselben, wenn die Kraftrichtung mit der Durchschnittslinie den Winkel γ bildet, und wenn α und β die Winkel sind, welche die durch Kraftrichtung und Durchschnittslinie gelegte Ebene mit den gegebenen Ebenen bildet?

$$\text{a.} \begin{cases} P \dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \\ P \dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

$$\text{b.} \begin{cases} P \dfrac{\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \\ P \dfrac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \end{cases}$$

24. Zwei Stangen AB und AC (Fig. 48) sind bei A durch ein Charnier mit einander verbunden. An A ist eine Kraft P wirksam, deren Richtung mit den Stangen die Winkel α bildet. Ist der Punkt B festgemacht, während sich C gegen ein nachgiebiges Stück stützt, so wird bei Einwirkung von P in C ein normaler Druck hervorgerufen, der berechnet werden soll. Der Apparat heißt die einfache Kniehebelpresse. Als Zahlenbeispiel sei gegeben:

$$P = 50 \text{ Kilogramm und } \alpha = \begin{cases} 15^\circ \\ 35^\circ \\ 65^\circ \\ 85^\circ \\ 90^\circ \end{cases}$$

$D = {}^1/_2\, P \tan \alpha$
= 6,698 Kilogramm
= 17,5 »
= 53,61 »
= 285,7 »
= ∞.

Fig. 48.

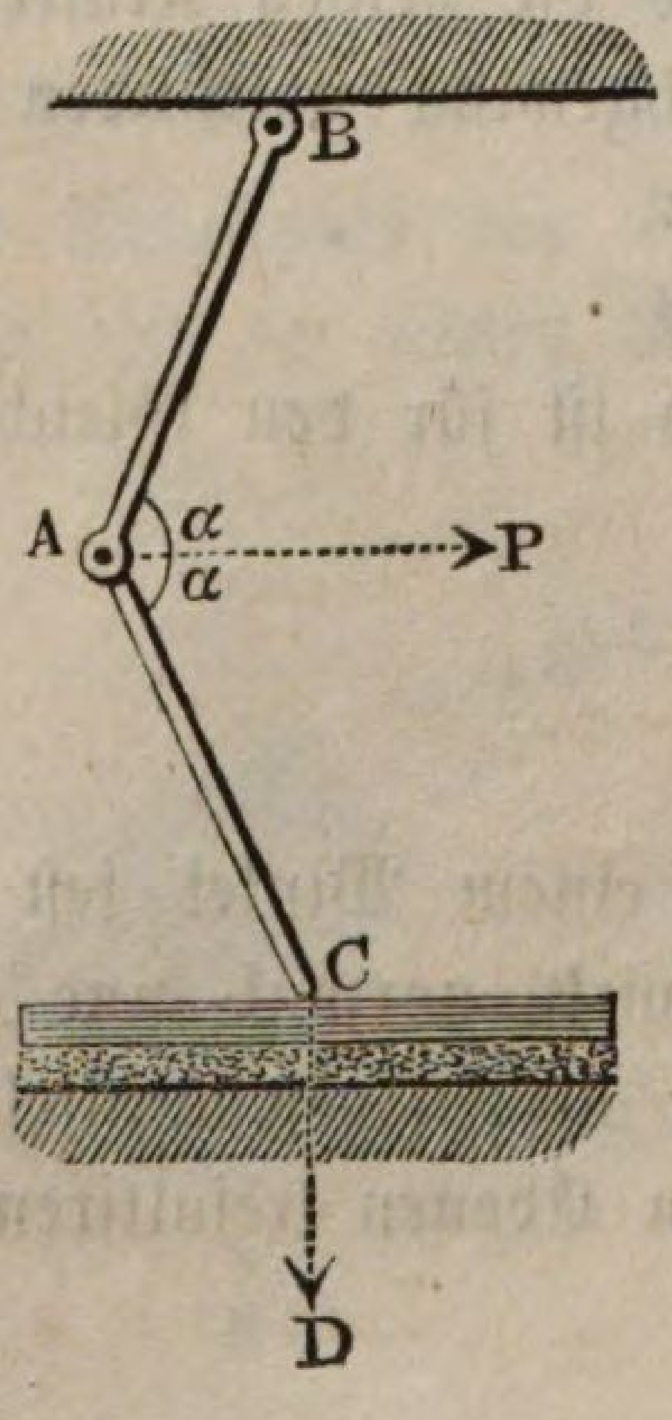
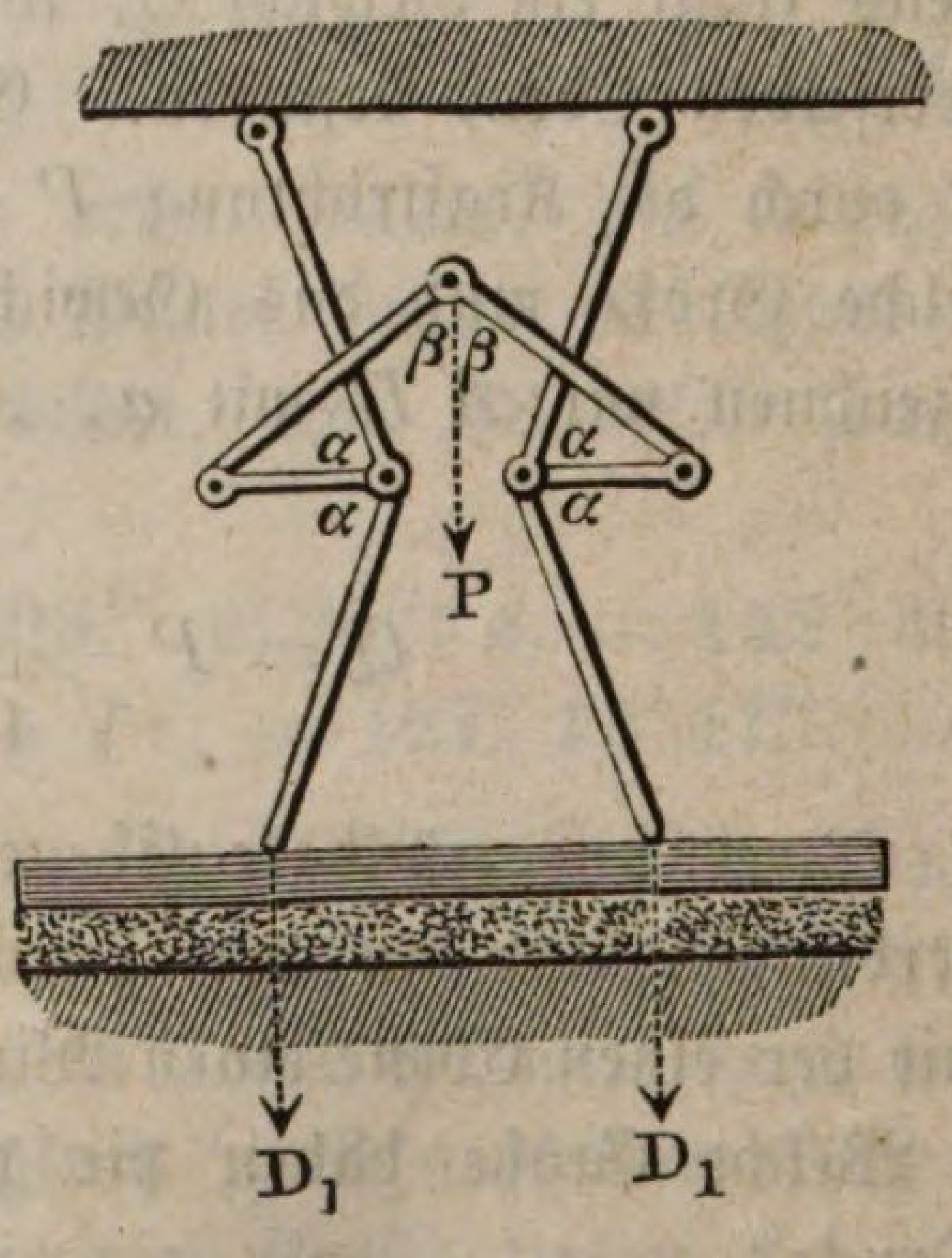


Fig. 49.



25. Es ist der ausgeübte Druck bei der zusammengesetzten Kniehebelpresse (Fig. 49) zu bestimmen, wenn P, α und β gegeben sind.

$$P = 50 \text{ Kilogramm } \alpha = \beta = 76^\circ,$$
$$D_1 = \tfrac{1}{4}\, P\, tang\, \alpha\, tang\, \beta.$$
$$= 201{,}08 \text{ Kilogramm.}$$

26. Welche Arbeitgröße wird von einem Pochstempel verrichtet, der ein Gewicht von 97 Kilogramm hat und dessen Hubhöhe $0{,}4^m$ ist?

$$38{,}8\ ^{km}.$$

27. Ein Pferd hat eine Last 70^m weit fortgeschafft. Der mittelst eines Kraftmessers gefundene Druck in den Zugsträngen betrug zu Anfang der Bewegung 55 Kilogramm und in den Entfernungen von 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70 Metern, war derselbe gleich 62, 52, 55, 65, 60, 57, 63, 70, 55, 65 Kilogramm. Wie groß ist hiernach die mittlere Arbeitgröße des Pferdes?

$$L = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{10} \cdot 70 \cdot \{55 + 4\,(62 + 55 + 60 + 63 + 55) + 2\,(52 + 65 + 57 + 70) + 65\}$$
$$L = 4172\ ^{km}.$$

28. Werden belebte Wesen zur Verrichtung einer Arbeit benutzt, so haben sich erfahrungsmäßig für den auszuübenden Druck, die Geschwindigkeit und die Zeit der Arbeit, Mittelwerthe ergeben, bei deren Anwendung die tägliche Leistung des belebten Wesens die größtmöglichste ist. In der folgenden Tabelle sind diese Mittelwerthe für die hauptsächlich zur Verwendung kommenden lebenden Wesen zusammengestellt.

Art des belebten Motors.		Mittelwerthe		Tägliche Arbeitszeit t in Stunden.
		Druck P in Kilogrammen.	Geschwindigkeit v in Metern.	
Mensch	schwach	12	0,628	
	mittel	14	0,785	
	stark	17	1,046	
Pferd	schwach	45	1,099	
	mittel	56	1,255	8
	stark	68	1,412	
Ochs	schwach	45	0,628	
	mittel	56	0,785	
	stark	66	0,942	

Benutzt man in der Praxis andere, als die hier angegebenen Mittelwerthe, so ist also die tägliche Arbeitgröße geringer als die mit denselben erhaltene Leistung, und es ist deshalb nothwendig, bei Aenderung dieser Werthe eine Beziehung zwischen ihnen aufzustellen. Hierbei geht man von der Ansicht

aus, daß keiner dieser Mittelwerthe die doppelte Größe erreichen darf, wenn nicht einer der anderen Factoren, also die tägliche Arbeitgröße, zu Null werden soll. Bezeichnen wir andere, als diese Mittelwerthe, mit P_1, v_1, t_1, so erhält man die unter dem Namen der Gerstner'schen Formel bekannte Beziehung

$$P_1 = P\left(2 - \frac{v_1}{v}\right)\left(2 - \frac{t_1}{t}\right).$$

29. Wie groß ist der Druck, den ein Arbeiter momentan mit sehr geringer Geschwindigkeit ausüben kann?

$$P_1 = 4\,P.$$

30. Wie viel Pfund können sechs starke Pferde mit 0,942^m Geschwindigkeit bewegen, wenn sie täglich sechs Stunden arbeiten sollen?

P_1 = 680 Kilogramm circa.

31. Eine Kugel von 10 Kilogramm schlägt mit einer Geschwindigkeit von 105^m auf einen Körper, der sie bei Annahme eines constanten Widerstandes 52^{mm} eindringen läßt. Wie groß ist hiernach der Widerstand, welcher der Kugel entgegengesetzt wird?

P = 108 060 Kilogramm.

32. Welche Arbeitgröße ist nothwendig, um einen Wagen von 3000 Kilogramm Gewicht, in eine Geschwindigkeit von 10^m zu versetzen?

15 290^{km}.

33. Ein Wagen von 2000 Kilogramm Gewicht hat eine Geschwindigkeit von 3,3^m. Wie groß ist die Zunahme der Arbeitgröße, wenn die Geschwindigkeit auf 12^m gebracht wird?

13 569^{km}.

34. Ein Körper von 250 Kilogramm Gewicht bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 1,2^m und erhält einen Zuwachs an Arbeitgröße von 780 ^{km}. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Körpers nach Aufnahme dieser Arbeit?

7,91^m.

35. Eine Kraft setzt eine Wasserpumpe in Bewegung. Der Kolben derselben hat einen Durchmesser von 0,4^m bei einer Hubhöhe von 1,5^m. Das Wasser wird auf eine Höhe von 10^m gehoben, wobei die Pumpe in einer Minute 20 Kolbenspiele machen soll. Welche Arbeitgröße verrichtet die Kraft bei einem Kolbenspiele?

Wie groß ist die Arbeitstärke der Kraft?

Wie viel Pferdestärken ersetzt die Kraft?

Inhalt des Kolbens $\frac{\pi}{4} d^2 = 0{,}12566\ \square^m$; Inhalt des Pumpencylinders $= \frac{\pi}{4} d^2 h = 0{,}12566 \,.\, 1{,}5 = 0{,}18849\ Cub^m$; Gewicht des Wassers

$= 188{,}5$ Kilogramm; Arbeitgröße $= P.s = 188{,}5 \,.\, 10 = 1885^{km}$; Arbeitstärke $= \frac{Ps}{t} = 1885 \cdot \frac{20}{60} = 628\frac{km}{}$; Pferdestärken $= \frac{Ps}{t} : 75 = 8{,}4$.

36. Eine Kraft verrichte eine Arbeit von 3200 $\frac{km}{}$ und bringe dem bewegten Körper eine Geschwindigkeit von $1{,}6^m$ bei. Wie groß ist der ausgeübte Druck?

Wie groß ist die Geschwindigkeit des bewegten Körpers, wenn der Widerstand der Bewegung 250 Kilogramm beträgt?

2000 Kilogramm; $12{,}8^m$.

37. Es werden 20 Pferdestärken von einer Kraft übertragen. Mit welcher Geschwindigkeit wird ein Körper bewegt, der einen Widerstand von 27 Kilogramm leistet?

Wie groß ist der ausgeübte Druck bei einer Geschwindigkeit von $3{,}6^m$?

$55{,}6^m$; 416,7 Kilogramm.

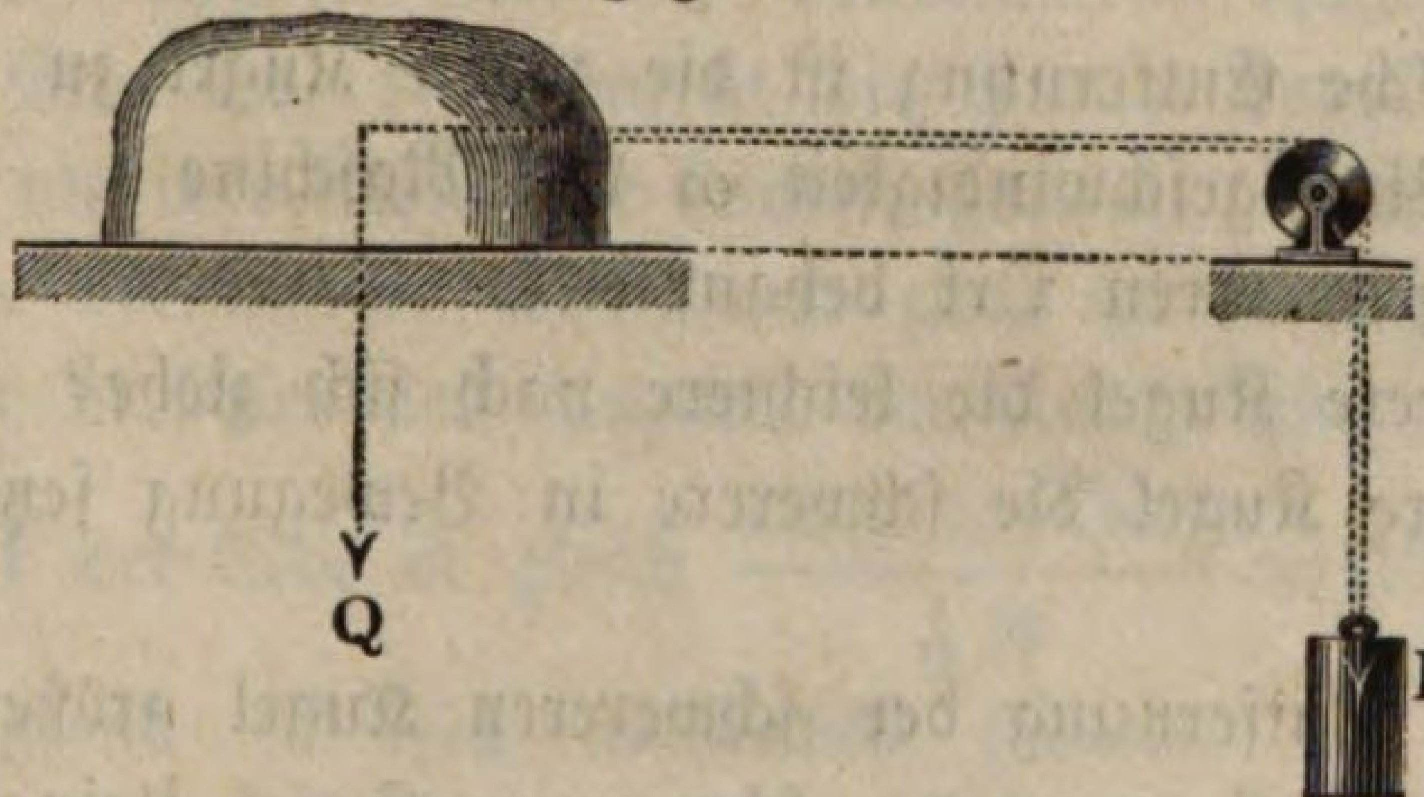
38. Auf der stehenden Welle einer Turbine (horizontales Wasserrad) befindet sich zur Uebertragung der Bewegung ein Zahnrad von 2^m Durchmesser. Wenn die Turbine 40 Pferdestärken überträgt und dabei 120 Umdrehungen in der Minute macht, wie groß ist der im Umfange des Zahnrades wirksame Druck?

$$Pr = 716 \frac{N}{u}$$

$P = 238{,}7$ Kilogramm.

39. Auf einer horizontalen vollkommen glatten Ebene liege ein Körper vom Gewicht Q (Fig. 50). Durch ein Seil, das über eine feste Rolle geführt

Fig. 50.



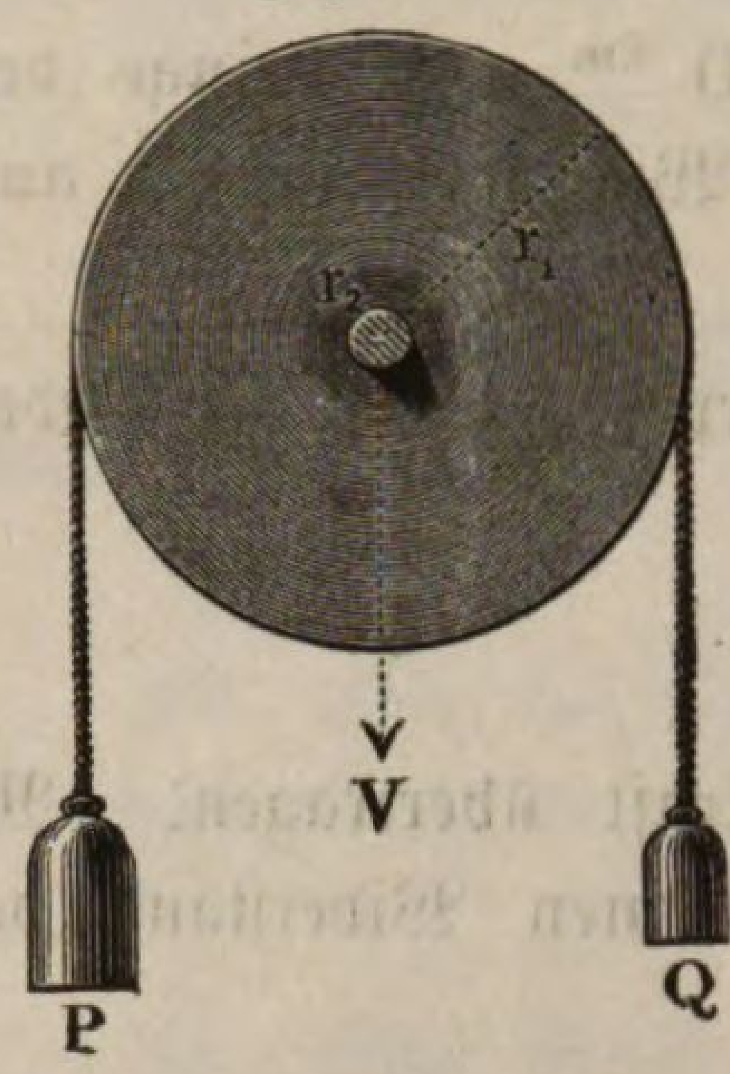
wird, ist ein Gewicht P mit dem Körper verbunden, so daß derselbe dadurch in Bewegung gesetzt wird. Es sind die Bewegungsverhältnisse zu entwickeln:

$$j = g \frac{P}{P+Q};\; v = jt;\; s = \tfrac{1}{2} j t^2.$$

40. Ein vollkommen biegsames Seil ist über eine feste Rolle mit vollkommen glatter Oberfläche gelegt und trägt an seinen Enden die Gewichte

P und Q (Fig. 51). Es sind die Bewegungsverhältnisse, unter der Voraussetzung zu entwickeln, daß $P > Q$

Fig. 51.



$$j = g\,\frac{P-Q}{P+Q};\quad v = jt;\quad s = \tfrac{1}{2}jt^2.$$

41. Wie groß ist die Centrifugalkraft einer Bleikugel von 2,5 Kilogramm Gewicht, die sich mit einer Geschwindigkeit von 5^m in einem Kreise von 2^m Halbmesser bewegt?

3,2 Kilogramm.

42. Eine eiserne Kugel, die durch ein Seil mit einer stehenden Welle verbunden ist, wird in drehende Bewegung versetzt (die Welle als Drehachse gedacht) und das Seil zerreißt in Folge der erlangten Centrifugalkraft. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel? Wie viel Umdrehungen werden in der Minute gemacht?

Die Kugel habe ein Gewicht von 175 Kilogramm, das Seil eine Länge von 7^m, einen Querschnitt von 3,42 $\square^{cm}$ und der Zug, welcher das Seil zu zerreißen vermag, betrage 500 Kilogramm pro $\square^{cm}$.

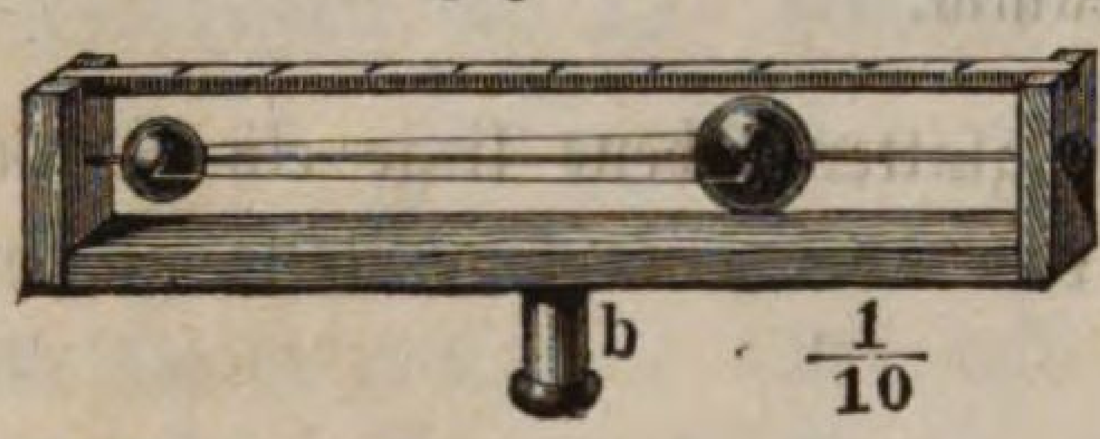
$$\frac{175}{9{,}81}\cdot\frac{v^2}{7} = 3{,}42\,.\,500$$

$$v = 25{,}9^m$$

$$u = 35^1/_3 \text{ pro Minute.}$$

43. Zwei durch eine Kette mit einander verbundene Kugeln (Fig. 52) von 0,07 und 0,12 Kilogramm Gewicht stecken leicht beweglich auf einem Metalldraht, der in horizontaler Lage mit der Hülse b an der verticalen Drehachse einer Schwungmaschine befestigt ist. Die erste Kugel befindet sich 9^{cm} von der Drehachse entfernt. Auf welche Entfernung ist die zweite Kugel zu schieben, damit bei einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit ω der Maschine

Fig. 52.



a. beide Kugeln ihren Ort behaupten?

b. die schwerere Kugel die leichtere nach sich ziehe?

c. die leichtere Kugel die schwerere in Bewegung setze?

a. $5{,}25^{cm}$.

b. Wenn die Entfernung der schwereren Kugel größer als $5{,}25^{cm}$ wird.

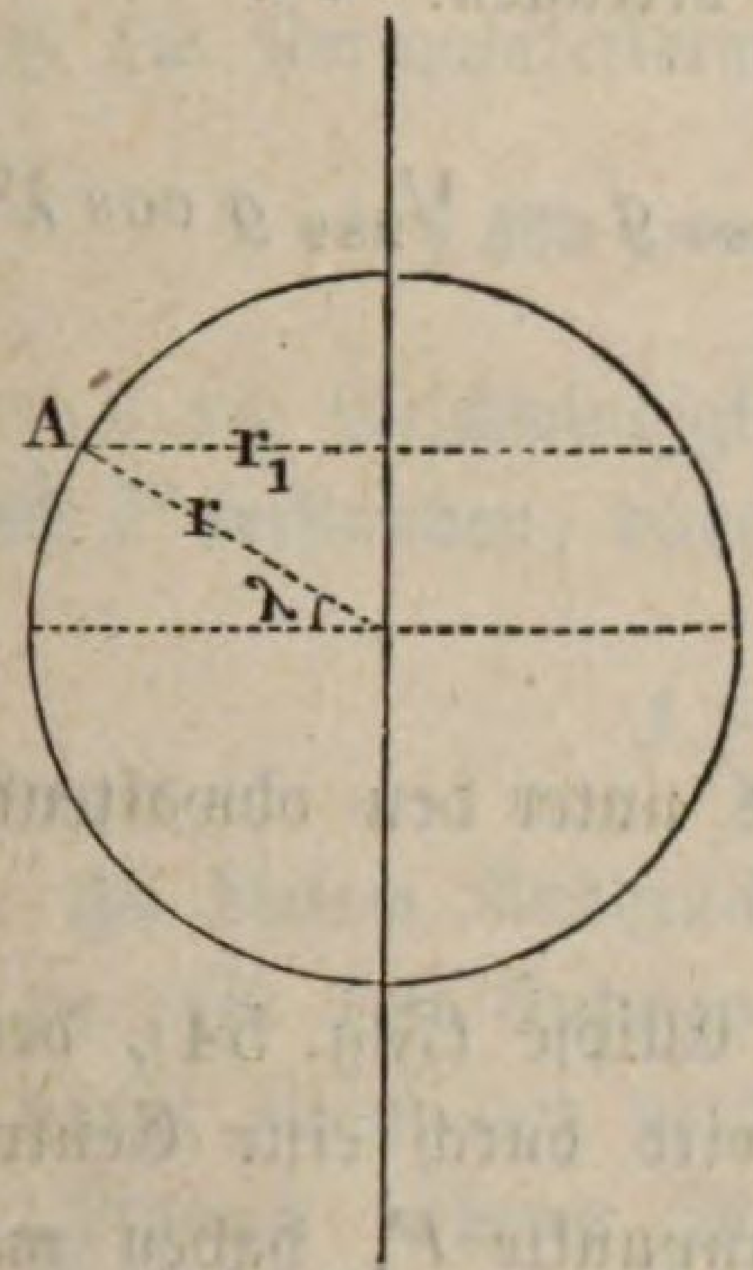
c. Wenn die Entfernung der schwereren Kugel kleiner als $5{,}25^{cm}$ wird.

44. Eine Kugel vom Halbmesser r dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um einen Durchmesser als Drehachse. Wie verhalten sich die Centrifugalkräfte der einzelnen Punkte der Kugeloberfläche?

Die Punkte eines Kreisumfanges, dessen Ebene normal zur Drehachse ist, Parallelkreis genannt, haben gleiche Centrifugalkräfte. Die Centrifugalkräfte der Punkte der Kugeloberfläche verhalten sich aber bei gleicher Winkelgeschwindigkeit ω und derselben Masse m, wie die normalen Entfernungen von

der Drehachse, oder, was dasselbe ist, wie der Halbmesser der zugehörigen Parallelkreise. Die Punkte im Umfange des größten Parallelkreises, **Aequator** genannt, entwickeln die Centrifugalkraft

Fig. 53.



$$m\,\omega^2\,r,$$

während die Durchschnittspunkte der Drehachse mit der Kugeloberfläche, die **Pole**, die Centrifugalkraft **Null** haben. Die Punkte auf der Oberfläche zwischen Aequator und Pol haben daher bei der Drehung eine Centrifugalkraft, die zwischen Null und $m\,\omega^2\,r$ liegt. Für einen beliebigen Punkt A, der zu einem Parallelkreise vom Halbmesser r_1 gehört, ist die Centrifugalkraft

$$= m\,\omega^2\,r_1$$
$$= m\,\omega^2\,r\,\cos\lambda,$$

unter λ den spitzen Winkel verstanden, den der zu dem Punkte A gehörige Kugelhalbmesser mit demjenigen Halbmesser des Aequators bildet, welcher mit der Drehachse und dem zum Punkte A gehörigen Kugelhalbmesser, in derselben Ebene liegt.

Nennen wir den Winkel λ die **Breite** des Punktes A, so ergiebt sich hieraus:

1. Alle Punkte, die gleiche Breite haben, entwickeln auch bei der Drehung gleiche Centrifugalkräfte.

2. Die Centrifugalkräfte zweier Punkte der Kugeloberfläche verhalten sich wie die Cosinus der Breiten.

45. Die Punkte unserer Erde werden durch die im Mittelpunkte derselben angenommene Schwerkraft angezogen. Hätte die Erde keine Rotationsbewegung, wäre sie weiter vollkommen kugelförmig und überall von derselben Dichtigkeit, so würden alle Punkte der Oberfläche in gleicher Weise von der Schwerkraft angegriffen werden, d. h. die Acceleration g müßte überall denselben Werth haben. Nehmen wir die vollkommene Kugelform und dieselbe Dichtigkeit für die Erde an, so erhalten die Punkte der Oberfläche durch die Bewegung der Erde um ihre Achse eine Centrifugalkraft, welche, mit der Schwerkraft vereinigt, diese vermindern wird, und zwar in ungleicher Weise, da die Centrifugalkräfte der verschiedenen Punkte, verschieden sind.

Der Halbmesser der Erde ist gleich $\frac{10\,000\,000^m}{\frac{1}{2}\pi} = 6\,366\,198^m$, die Zeit einer Umdrehung gleich 86 164 Secunden (Dauer des Sterntages), die beobachtete Acceleration der Schwere am Aequator sei gleich g. Welche Größe hat diese Acceleration auf der ganzen Erde, wenn für dieselbe keine Rotationsbewegung angenommen wird? Wie groß ist die Acceleration der Schwere, für einen Ort von der Breite λ? Welche Rotationsgeschwindigkeit müßte die Erde haben, damit die Körper am Aequator, weder auf die Erde fallen, noch von ihr fortgeschleudert werden?

$$\text{a)}\ g + \frac{v^2}{r} = g + \frac{4\,\pi^2 . r}{t^2} = g + 0{,}033852^m,$$

d. h. die Verminderung der Acceleration der Schwere durch die Centrifugalkraft beträgt $0{,}033852^m$ oder ungefähr $\frac{1}{289} \cdot g$. Die Acceleration der Schwere würde also ohne Rotationsbewegung der Erde $\frac{290}{289}\,g$ betragen.

$$\text{b)}\ g + \tfrac{1}{289}\,g - \frac{4\,\pi^2\,r}{t^2}\cos\lambda^2 = g + \tfrac{1}{289}\,g - \tfrac{1}{289}\,g\cos\lambda^2$$

$$= g\,(1 + \tfrac{1}{289}\sin\lambda^2),$$

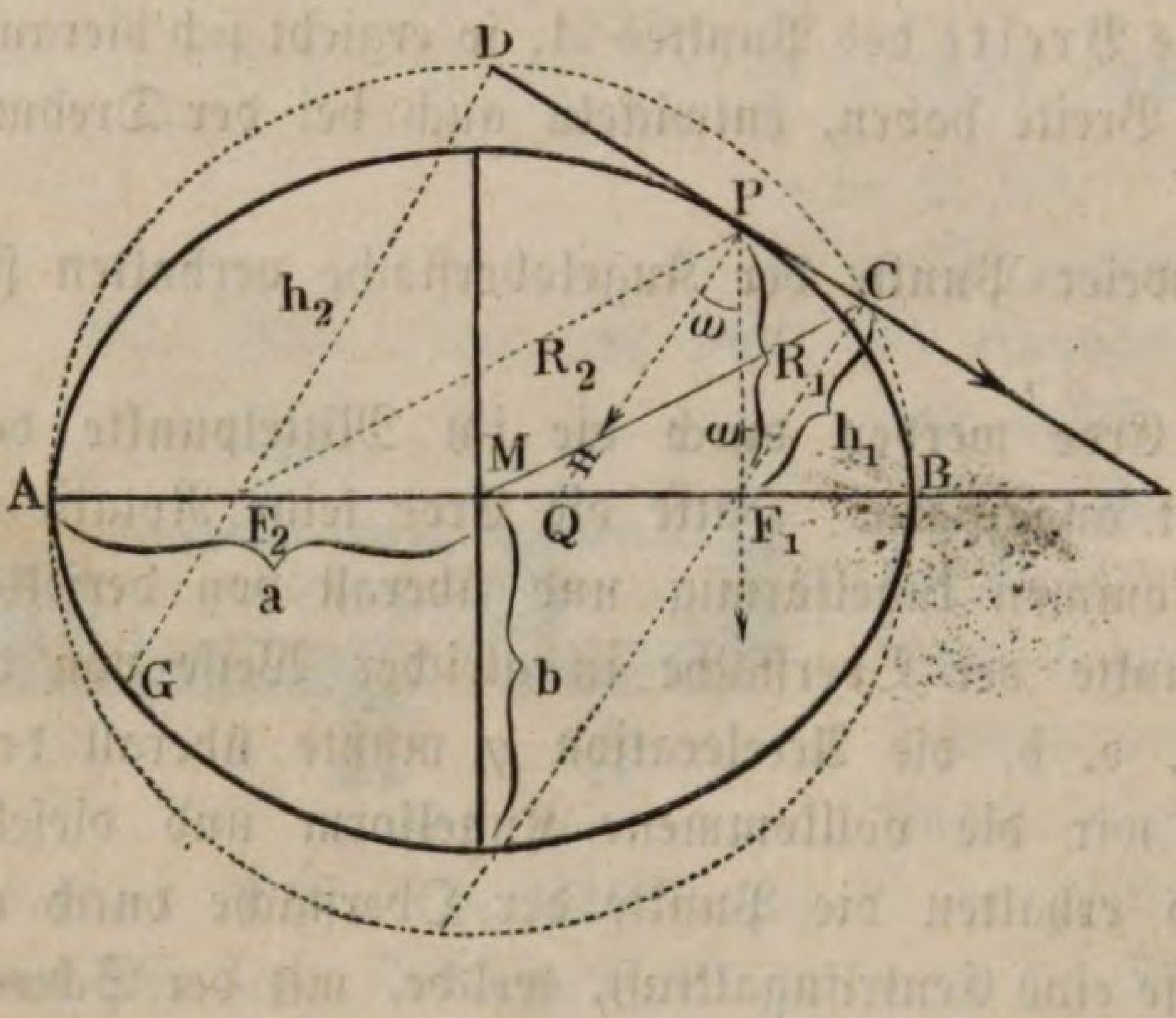
$$\text{c)}\ m\,g = m\,\frac{v^2}{r}$$

$$v = 7902{,}7^m,$$

d. h. ungefähr eine 17 mal größere Geschwindigkeit als unter den obwaltenden Verhältnissen, für die $v = 464{,}2^m$ ist.

46. Ein materieller Punkt bewege sich in einer Ellipse (Fig. 54), deren Achsen $2\,a$ und $2\,b$ sein mögen. Die Bewegung wird durch eine Centralkraft hervorgebracht, die ihren Sitz in einem der Brennpunkte F_1 haben mag. Es ist die Größe der Acceleration der Centralkraft zu bestimmen.

Fig. 54.



Wir nehmen an, die Centralkraft wirke von F_1 aus und der bewegte Punkt befinde sich in P. Es findet bei dieser Bewegung nach §. 19 das Princip der Flächen Anwendung, d. h. die von dem Leitstrahle in derselben Zeit durchlaufenen Flächenräume sind einander gleich. Gebraucht der Punkt P, t Zeiteinheiten, um die ganze Ellipse zu durchlaufen, so beschreibt der Radius vector in einer Zeiteinheit, da $\pi\,a\,b$ der Flächeninhalt der Ellipse ist, eine Fläche von der Größe $\frac{\pi\,a\,b}{t}$;

diese Fläche ist einem Dreiecke gleich, das zur Basis den in einer Zeiteinheit durchlaufenen Ellipsenbogen hat, welcher gleich der Geschwindigkeit v des bewegten Punktes, ist und dessen Höhe die vom Centralpunkt auf die Ellipse resp. auf die in P construirte Tangente gefällte Normale h_1 ist, d. h.:

$$\tfrac{1}{2}\,v\,h_1 = \frac{\pi\,a\,b}{t}$$

$$v = \frac{2\,\pi\,a\,b}{h_1\,t}.$$

Wir zerlegen die Centralkraft nach Richtung der Tangente in P und normal dazu, so wird die Tangentialkraft die Geschwindigkeit dem Punkte P

erhalten, während die Normalkraft den Punkt aus einer Tangente in die andere überzuführen hat.

Bezeichnen wir die Acceleration in Richtung des Leitstrahles $F_1 P$ mit j, so ist die Normalacceleration $j \cos \omega$; n. F. 23 haben wir:

$$j \cos \omega = \frac{v^2}{\varrho},$$

unter v die Geschwindigkeit und ϱ den Krümmungsradius der Ellipse für den Punkt P verstanden, daher nach der Substitution des für v gefundenen Werthes:

$$j = \frac{4 \pi^2 a^2 b^2}{h_1^2 t^2 \varrho \cos \omega}.$$

In diesem Ausdrucke ändern sich mit der Lage von P die Werthe h_1, ϱ und ω. Zu dem Ende formen wir den gefundenen Ausdruck von j so um, daß sich darin allein der veränderliche Radius vector $F_1 P = R_1$ finden möge.

Mittelst höherer Mathematik ergiebt sich für den Krümmungsradius ϱ eines beliebigen Punktes einer Ellipse, unter n die Länge der Normale PQ desselben verstanden:

$$\varrho \cos \omega = \frac{n}{\cos \omega}.$$

Bezeichnen wir die, von dem zweiten Brennpunkte F_2, auf die Tangente in P gefällte Normale mit h_2, und den von F_2 nach P gezogenen Leitstrahl mit R_2, so findet sich n aus dem Paralleltrapeze $F_2 D C F_1$:

$$n = \frac{h_1 PD + h_2 PC}{PD + PC}.$$

Die Summe der Verbindungslinien der Brennpunkte mit irgend einem Punkte der Ellipse ist gleich der großen Achse $2a$, und diese Verbindungslinien bilden mit der im Punkte construirten Tangente gleiche Winkel. Die Dreiecke $F_2 D P$ und $F_1 C P$ sind daher ähnlich und es ist:

$$n = \frac{h_1 R_2 + h_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{h_1 R_2}{a}$$

und

$$\frac{n}{\cos \omega} = \varrho \cos \omega = \frac{h_1 R_2}{a \cos \omega}.$$

Für $\cos \omega$ können wir noch $\frac{h_1}{R_1}$ setzen, so daß

$$\varrho \cos \omega = \frac{R_1 R_2}{a}$$

ist.

Substituiren wir den Werth von $\varrho \cos \omega$ in dem Ausdrucke für j, so entsteht:

$$j = \frac{4\pi^2 a^3}{t^2} \cdot \frac{b^2}{h_1^2 R_1 R_2}.$$

Eine Relation zwischen h_1, h_2, R_1, R_2 und b findet sich einfach auf folgende Weise:

Es ist MC parallel $F_2 P$ und gleich a,
MD » $F_1 P$ » » a,

daher liegen die vier Punkte A, B, C, D in der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser a. Denken wir diesen Kreis construirt und DF_2 bis G verlängert, so ist $F_2 G$ gleich h_1 und

$$DF_2 . F_2 G = AF_2 . F_2 B$$
$$h_2 . h_1 = (a - MF_2)(a + MF_2)$$
$$= a^2 - MF_2^2$$
$$= a^2 - (a^2 - b^2)$$
$$h_2 . h_1 = b^2,$$

oder in Folge der Proportion $h_1 : h_2 = R_1 : R_2$:

$$h_1^2 \frac{R_2}{R_1} = b^2 \text{ oder } \frac{b^2}{h_1^2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in dem oben für j angegebenen, entsteht endlich für die Acceleration der Centralkraft, von einem Brennpunkte einer elliptischen Bahn aus wirksam:

$$j = \frac{4\pi^2 a^3}{t^2 R_1^2}.$$

47. Das in der vorigen Nummer Vorgeführte, bildet die Grundlage für die Bewegung unseres Weltsystems und enthält die drei, durch Beobachtung gefundenen

Keppler'schen Gesetze.

Erstes Gesetz. Die Planeten bewegen sich um die Sonne in ebenen Curven und der Radius vector befolgt das Princip der Flächen, so daß die Bewegung zu den Centralbewegungen gehört.

Zweites Gesetz. Die Planeten beschreiben bei ihrer Bewegung Ellipsen, deren einer Brennpunkt der Sitz der Centralkraft, der Mittelpunkt der Sonne ist.

Hieraus folgt bei Betrachtung des Werthes

$$j = \frac{4\pi^2 a^3}{R_1^2 t^2},$$

daß die Acceleration in den verschiedenen Punkten der Bahn verschieden ist und zwar umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung R_1 des Planeten von der Sonne.

Drittes Gesetz. Bei zwei Planeten verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cuben der großen Achsen ihrer Bahnen.

In dem gefundenen Werthe für die Acceleration j wird sich daher für die verschiedenen Planeten $\frac{a^3}{t^2}$ nicht ändern, so daß für dieselbe Entfernung R

die Acceleration gleich ausfallen wird. Die von der Sonne ausgehende Kraft wirkt daher auf Massen, die sich in derselben Entfernung befinden, auf gleiche Weise, sie ändert sich nur mit der Entfernung der Masse von der Sonne.

Newton hat das große Verdienst, nachgewiesen zu haben, daß diese drei Gesetze nur Folgerungen sind von dem, allen Körpern eigenthümlichen Gesetze, der gegenseitigen Anziehung. Es besteht zwischen allen einzelnen Theilen zweier Körper eine gegenseitige Anziehung, deren Intensität direct proportional der Masse der anziehenden Theilchen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernungen dieser Körpertheilchen ist.

Hiernach gelten die obigen Keppler'schen Gesetze nicht allein für die Bewegung der Planeten um die Sonne, sondern auch für die Bewegung der Trabanten um die Planeten, sowie für die Bewegung eines beliebigen Körpers gegen seinen Planeten. Die Schwerkraft unserer Erde ist also ebenfalls eine Folge dieses allgemeinen Gesetzes; das Gesetz ist bekannt unter dem Namen: die allgemeine Gravitation.

48. Auf einer geneigten Ebene vom Neigungswinkel 60° liegt ein Körper von 25 Kilogramm, der innerhalb 15 Secunden die schiefe Ebene in gleitender Bewegung durchläuft. Mit welcher Geschwindigkeit kommt der Körper in die Horizontalebene, welche Länge hat die schiefe Ebene, welche Arbeitgröße hat der Körper in sich aufgenommen?

$$v = 127{,}4^m;\ s = 955{,}74^m;\ L = 20681\ ^{km}.$$

49. Auf derselben schiefen Ebene erlangt ein Körper eine Endgeschwindigkeit von 45^m.

In welcher Zeit legt der Körper den Weg auf der schiefen Ebene gleitend zurück?

Welche Länge hat die schiefe Ebene?

5,3 Secunden; $119{,}3^m$.

50. Ein Körper soll innerhalb 5 Secunden bei der Bewegung auf einer geneigten Ebene eine Geschwindigkeit von 17^m erlangen.

Welchen Neigungswinkel hat man für die schiefe Ebene anzunehmen?

Welche Länge hat die geneigte Ebene?

$$\alpha = 20°16'40'';\ s = 42{,}5^m.$$

51. Eine geneigte Ebene von der Länge 40^m durchläuft ein Körper innerhalb 4 Secunden gleitend.

Wie groß ist der Neigungswinkel der Ebene?

Welche Geschwindigkeit erlangt der Körper?

Wie groß ist die aufgenommene Arbeitgröße, wenn der Körper ein Gewicht von 100 Kilogramm hat?

$$\alpha = 30°38'30'';\ v = 20^m;\ L = 2038{,}7\ ^{km}.$$

52. Eine geneigte Ebene von der Länge 40^m und dem Neigungswinkel 50°, die allmälig in die Horizontalebene übergeführt ist, durchläuft ein 200 Kilogramm schwerer Körper.

Wie weit bewegt der Körper, in der Horizontalebene angekommen, ein Hinderniß von 14 Kilogramm, nach welcher Zeit kommt der Körper zur Ruhe?

$437{,}7^m$; 35,7 Secunden.

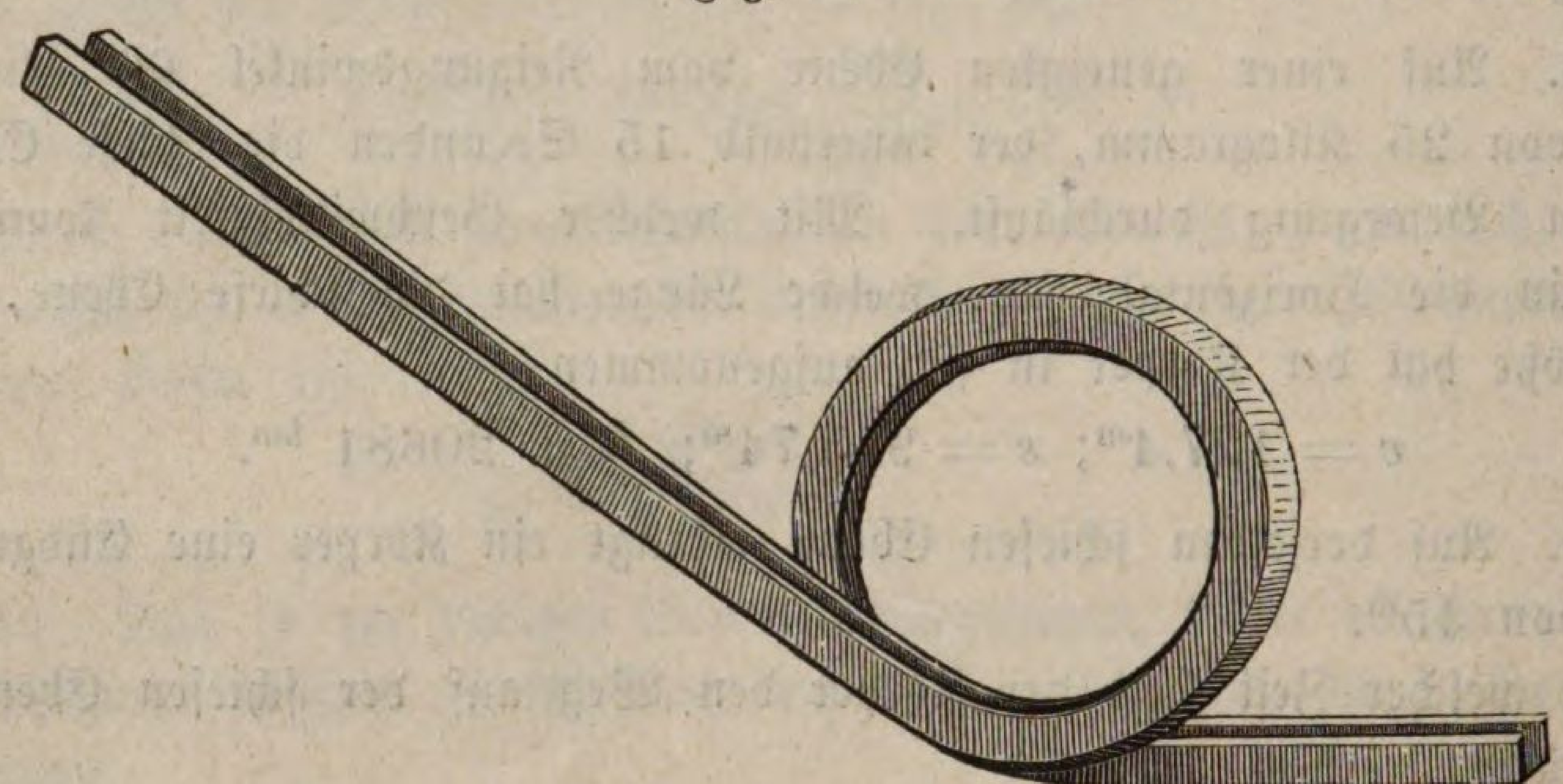
53. Zwei geneigte Ebenen sind an ihrem tiefsten Punkte allmälig in einander übergeführt. Die Länge der ersten Ebene sei 70^m mit dem Neigungswinkel $53^\circ 17' 20''$, die zweite Ebene sei gegen den Horizont um 20° geneigt. Ein Körper durchlaufe die erste Ebene gleitend.

Welchen Weg wird derselbe auf der zweiten Ebene zurücklegen?

$$s \,.\, sin\, \alpha = x \,.\, sin\, \beta$$
$$x = 164^m.$$

54. Ein Körper soll, nachdem er sich auf einer schiefen Ebene von der Länge 7^m und dem Neigungswinkel 75° bewegt hat, eine in der Verticalebene liegende kreisförmige Bahn (Fig. 55) vollständig durchlaufen.

Fig. 55.



Welche Größe darf der Halbmesser des Kreises höchstens erhalten, wie groß kann der Halbmesser gewählt werden, wenn der Körper zu Anfang seiner Bewegung bereits eine Geschwindigkeit von 12^m besaß? Die beiden Aufgaben unter 53 und 54 bilden in ihrer Vereinigung die Centrifugal-Eisenbahn.

Ist v_2 die Geschwindigkeit des Körpers vom Gewicht G und der Masse m im tiefsten Punkte der kreisförmigen Bahn, v_1 dagegen die Geschwindigkeit im höchsten Punkte und r der Halbmesser der Bahn, so haben wir:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, (v_2^2 - v_1^2) = G\, 2\, r.$$

v_1 bestimmt sich durch die Bedingung, daß die Centrifugalkraft des Körpers im höchsten Punkte der Bahn größer als das eigene Gewicht sein muß:

$$m \frac{v_1^2}{r} > G.$$

Endlich ist die Geschwindigkeit v_2 durch die Länge s der schiefen Ebene und deren Neigungswinkel α bestimmt

$$v_2^2 = 2\, g\, s \,.\, sin\, \alpha$$

und bei der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit c

$$v_2^2 = c_2^2 + 2\, g\, s \,.\, sin\, \alpha$$
$$r < 2{,}7^m;\; r < 5{,}64^m.$$

55. Die Schwingungszeiten von Fadenpendeln zu berechnen, deren Längen gleich $1{,}5^m$ und 3^m gegeben sind.

Wie groß ist die Spannung der Fäden, bei einem Ausschlage von 5°, wenn der materielle Punkt die tiefste Stelle erreicht?

$$t = 1{,}23 \text{ und } 1{,}74 \text{ Secunden}; \; S = 1{,}0076 \,.\, m\,g.$$

56. Ein Fadenpendel von der Länge $1{,}4^m$ macht in einer Minute 12 Schwingungen.

Um wie viel ist dasselbe zu verkürzen, damit es in derselben Zeit 20 Schwingungen mache?

$$l_2 = 0{,}504^m, \text{ daher um } 0{,}896^m \text{ zu verkürzen.}$$

57. Die Länge des einfachen Secundenpendels ist unter 52° Breite gleich 440,65 pariser Linien.

Wie groß ist hiernach die Acceleration der Schwere, für Orte unter 52° Breite, für Orte am Aequator?

$$1^m = 443{,}296 \text{ par. Linien.}$$
$$g = l\,\pi^2 \text{ und } g_\beta = g_0\,(1 + {}^1/_{289}\, sin\, \beta^2).$$
$$9{,}810^m;\; 9{,}78965^m.$$

58. Es ist die Länge des einfachen Secundenpendels zu berechnen für die Orte, die unter der Breite von 5°, 76° und 90° liegen:

$$991{,}92^{mm};\; 995{,}13^{mm};\; 995{,}33^{mm}.$$

59. Eine Uhr mit Secundenpendel, die am Aequator richtig geht, eilt unter 75° Breite wie viel Secunden täglich vor?

Ist l die Länge des Secundenpendels am Aequator, so ist die Zeitdauer einer Schwingung desselben an einem Orte von der Breite β

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g_\beta}} = \sqrt{\frac{1}{1 + {}^1/_{289}\, sin\, \beta^2}}.$$

Macht das Pendel an diesem Orte täglich n Schwingungen, so ist darnach

$$n \sqrt{\frac{1}{1 + {}^1/_{289}\, sin\, \beta^2}} = 86\,400 \text{ Secunden,}$$
$$n = 86540,$$

d. h. 140 Schwingungen sind zu viel vorhanden. Die Uhr geht also um 140 Secunden gleich 2 Minuten 20 Secunden vor.

60. Der Factor ${}^1/_{289}$ gleich x gesetzt, läßt sich aus der Länge zweier Secundenpendel für verschiedene Breitengrade berechnen. Bezeichnen wir diese Grade mit β und β_1, die Längen der Secundenpendel mit l und l_1, so ist

$$\pi^2\, l = g_0\,(1 + x\, sin\, \beta^2)$$
$$\pi^2 l_1 = g_0\,(1 + x\, sin\, \beta_1{}^2), \text{ daher } \frac{l}{l_1} = \frac{1 + x\, sin\, \beta^2}{1 + x\, sin\, \beta_1{}^2}.$$

Für Berlin unter 52° 30′ 16″ nördlicher Breite gelegen ist die beobachtete Länge 440,665 par. Linien und für Paris unter 48° 50′ 14″ nördlicher Breite ist diese Länge 440,53. Für diese durch Beobachtung gefundenen Größen ergiebt sich

$$x = 0{,}00489,$$

während $^1/_{289}$ gleich 0,00346 ist, was seinen Grund darin hat, daß bei dem früheren Fall die Erde als vollkommene Kugel vorausgesetzt worden ist.

61. Für Orte unter der Breite β am Niveau des Meeres gelegen, sei die Länge des Secundenpendels l_1.

Wie groß ist diese Länge unter derselben Breite in einer Höhe von h^m über dem Meeresspiegel?

Die Berechnung sei für den Mont Blanc 4900^m über dem Meere, unter der Breite von 45° 45′ gelegen, durchzuführen.

Der Radius r der Erde ist 6366198^m:

$$l_2 = l_1 \left(\frac{r}{r+h}\right)^2$$

$$l_2 = 994{,}2^{mm}.$$

62. Ein Secundenpendel von der Länge l wird durch Wärme um 0,01 l länger.

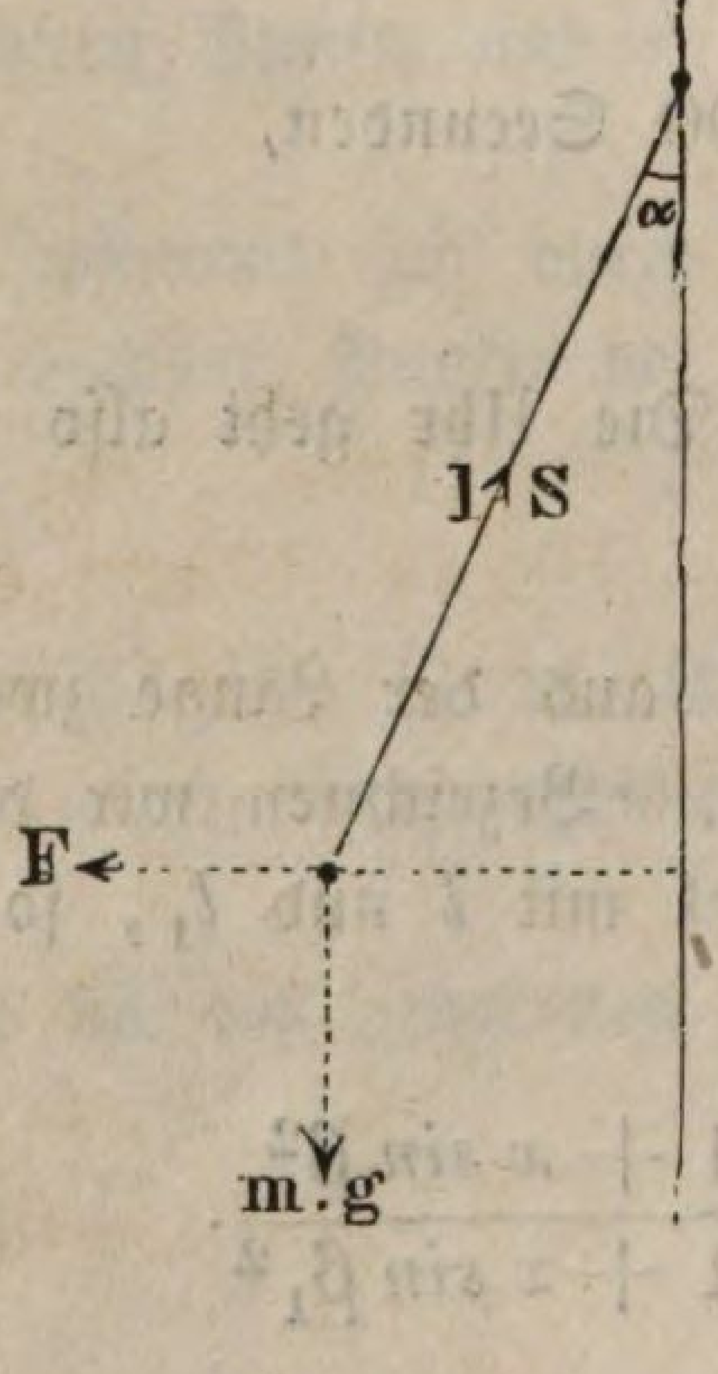
Wie viel Schwingungen macht es täglich weniger?

429 Schwingungen.

63. Ein Fadenpendel von der Länge l (Fig. 56) sei an einer vertical stehenden Welle befestigt, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre geometrische Achse dreht. Der auf diese Weise construirte Apparat heißt Centrifugalpendel.

Das Fadenpendel beschreibt dabei den Mantel eines normalen Kegels mit kreisförmiger Basis.

Fig. 56.



Die Höhe des beschriebenen Kegelmantels ist von der vorhandenen Winkelgeschwindigkeit abhängig, indem beim Wachsen derselben der materielle Punkt des Pendels eine größere Centrifugalkraft F erhält, dadurch einen Kreis mit größerem Halbmesser beschreibt, wodurch die Höhe des Kegelmantels von selbst kleiner wird.

Für jede beliebige Winkelgeschwindigkeit ist die Centrifugalkraft F mit dem Gewichte mg des materiellen Punktes und der Spannung S des Fadens im Gleichgewichte, d. h. die Resultante aus F und mg liegt in Richtung des Fadens und wird durch den Aufhängepunkt vernichtet.

Bezeichnet hiernach α den Winkel, den der Faden bei der vorhandenen Winkelgeschwindigkeit ω mit der Drehachse bildet, so ist:

$$F : mg = \sin\alpha : \cos\alpha$$

oder
$$\omega^2 ml \sin\alpha : mg = \sin\alpha : \cos\alpha,$$

d. h.
$$\frac{\omega^2}{g} l \cos\alpha = 1$$

oder
$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos\alpha}.$$

Hieraus ersieht man, daß der Erhebungswinkel sich mit der Winkelgeschwindigkeit ändert, da g und l constante Größen sind.

Gehören zu einem Umlaufe t_1 Secunden, so ist $\omega t_1 = 2\pi$ zu setzen. Substituiren wir hieraus den Werth von ω in dem obigen Ausdrucke, so entsteht:

$$\left(\frac{2\pi}{t_1}\right)^2 \frac{l \cos\alpha}{g} = 1,$$

d. h.
$$t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}.$$

Die Zeit t einer Schwingung bei einem gewöhnlichen einfachen Pendel war:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

d. h. das Centrifugalpendel gebraucht zu einer Umdrehung noch einmal so viel Zeit als ein einfaches Pendel, wenn die Höhe des von dem ersten beschriebenen Kegelmantels gleich der Länge des gewöhnlichen Fadenpendels ist.

64. Es seien zwei verschiedene Centrifugalpendel gegeben:

Wie verhalten sich die in derselben Zeit t gemachten Umläufe n_1 und n_2?

Wie verhalten sich die Längen der Centrifugalpendel, wenn in derselben Zeit eine gleiche Anzahl von Umläufen gemacht werden soll?

$$n_2 : n_1 = \sqrt{l_1 \cos\alpha_1} : \sqrt{l_2 \cos\alpha_2}$$
$$l_1 : l_2 = \cos\alpha_2 : \cos\alpha_1.$$

65. Das Centrifugalpendel von der Länge l mache in einer Minute n Umläufe.

Wie groß ist die Höhe des dabei beschriebenen Kegelmantels?

$$\frac{894{,}56^m}{n^2}.$$

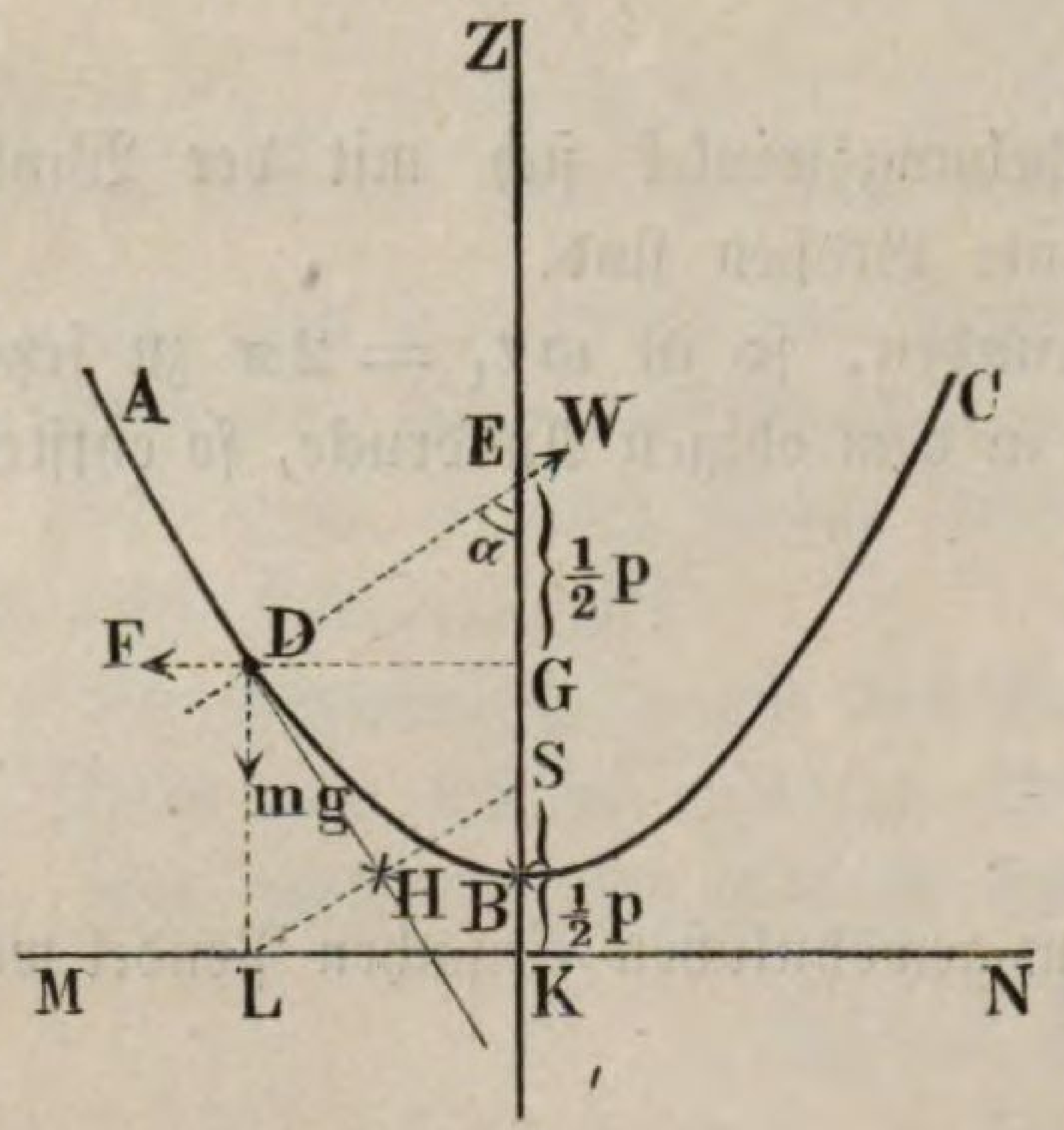
66. Es sei ZZ' (Fig. 57 a. f. S.) die Drehachse, ABC eine beliebige Curve, die um ZZ' rotirt. In D befinde sich auf der festen Curve ein materieller Punkt von der Masse m.

Der Punkt behauptet seine Lage während der Rotation, ist also auf der Curve im Gleichgewichte, wenn die drei Kräfte: der Widerstand W der festen Curve, die Centrifugalkraft F und das Gewicht mg, im Gleichgewicht sind, oder: die Resultante R aus F und mg muß in Richtung der in D für die feste Curve construirten Normale liegen.

Bezeichnen wir die gerade stattfindende Winkelgeschwindigkeit mit ω und die Länge ED der Normale mit l, so besteht die Beziehung $\omega^2 = \dfrac{g}{l \cos\alpha}$.

Für die verschiedenen Punkte der Curve ändert sich l und α zu gleicher Zeit, so daß den verschiedenen Gleichgewichtslagen des Punktes auf der Curve auch verschiedene Winkelgeschwindigkeiten entsprechen müssen. Es giebt jedoch eine Curve, die Parabel, für welche das Product $l\ cos\ \alpha$ constant ist und die deshalb die Eigenschaft hat, daß der Punkt bei derselben bestimmten Winkelgeschwindigkeit, an jeder beliebigen Stelle der Curve, unter der Einwirkung von W, F und mg im Gleichgewicht ist, also seinen Ort behauptet.

Fig. 57.



Ist die vorgelegte Curve ABC eine Parabel, so ist EG gleich $l\ cos\ \alpha$, das hier einen constanten Werth haben soll.

Es sei MN die Directrix und S der Brennpunkt der Parabel.

Man fälle von D die Normale DL auf MN, ziehe in D die Tangente zur Parabel und fälle auf diese von S aus die Normale SH, welche denselben Punkt L der Directrix trifft.

Das Viereck $DESL$ ist ein Parallelogramm, daher Dreieck

$$DGE \cong LKS.$$

Aus der Congruenz folgt:

$$GE = l\ cos\ \alpha = KS = \frac{p}{2},$$

unter p den Parameter der Parabel verstanden.

Für die Drehung einer Parabel um die ZZ'-Achse haben wir hiernach $\omega^2 = \frac{g}{l\ cos\ \alpha} = 2\frac{g}{p}$, aus welcher Gleichung sich bei Festsetzung der Winkelgeschwindigkeit der Parameter p der Parabel berechnen und demnach dieselbe construiren läßt. Gesetzt, die Parabel mache in einer Minute u Umdrehungen, so ist

$$\omega^2 = (0{,}1047\ u)^2 = 2\frac{9{,}81}{p} \text{ und}$$

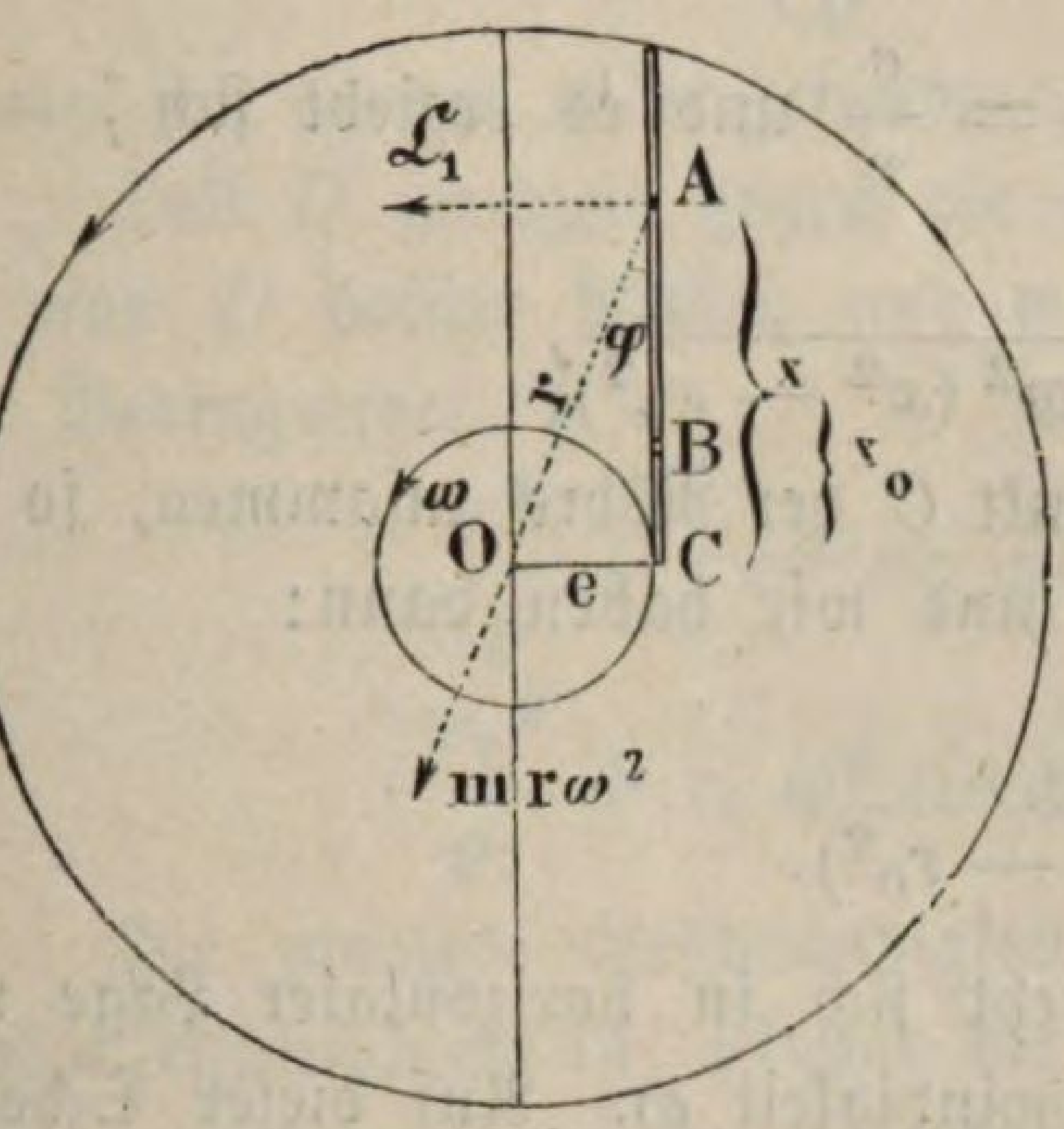
$$p = \frac{1790}{u^2}.$$ Für $u = 40$ ist demnach $p = 1{,}12^m$.

67. Eine gerade Röhre, welche eine frei bewegliche Kugel vom Gewichte mg enthält, liege in einer horizontalen Ebene und werde in dieser um einen Punkt O gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht. Es ist die Bewegung der Kugel in der Röhre und ihr Druck gegen die Röhre zu bestimmen.

Für eine beliebige Lage A der Kugel (Fig. 58) sei $OA = r$, $CA = x$, Winkel $OAC = \varphi$ und die längs der Röhre stattfindende Geschwindigkeit v. Die durch die Drehung der Kugel ertheilte, in dem Moment vorhandene Centrifugalkraft $\mathfrak{C}$ ist $mr\omega^2$, welche wir längs der Röhre und normal

dazu in die beiden Componenten $m\,r\,\omega^2 \cos\varphi$ und $m\,r\,\omega^2 \sin\varphi$ zerlegen. Die erstere bewirkt die Aenderung in der Geschwindigkeit, ihre Arbeitsgröße muß also der der Kugel innewohnenden lebendigen Kraft gleich sein. Nehmen wir an, die Geschwindigkeit der Kugel sei in C gleich Null gewesen, so ist demnach, den kleinsten denkbaren Theil von x mit $\triangle x$ bezeichnend, für den Weg CA

Fig. 58.



$$L = \sum_0^x m\,r\,\omega^2 \cos\varphi \,.\, \triangle x = \tfrac{1}{2} m v^2$$

oder $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$ gesetzt:

$$m\,\omega^2 \sum_0^x x \,.\, \triangle x = \tfrac{1}{2} m\, v^2.$$

Hierbei bedeutet $\sum_0^x x \,.\, \triangle x$ die Summe von unendlich vielen Rechtecken, deren eine Seite $\triangle x$, deren andere Seiten allmälig von 0 bis x wachsen, also die Längen $0 . \triangle x$, $1 . \triangle x$, $2 . \triangle x$, $3 . \triangle x \ldots$ haben. Für die Summe dieser Rechtecke ist demnach das Maß von dem Inhalte eines rechtwinkeligen Dreiecks zu setzen, dessen Katheten beide gleich x sind. Es ist hiernach $\sum_0^x x \,.\, \triangle x = \tfrac{1}{2} x^2$ und die Bewegungsgleichung heißt daher:

$$\tfrac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 = \tfrac{1}{2} m\, v^2.$$

Für einen zweiten Punkt B in der Röhre ist in gleicher Weise, die Entfernung CB mit x^0 und die entsprechende Geschwindigkeit mit v_0 bezeichnend,

$$\tfrac{1}{2} m\,\omega^2 x_0{}^2 = \tfrac{1}{2} m\, v_0{}^2.$$

Hieraus ergiebt sich für den Weg der Kugel zwischen B und A als Bewegungsgleichung:

$$\tfrac{1}{2} m\,\omega^2 (x^2 - x_0{}^2) = \tfrac{1}{2} m\,(v^2 - v_0{}^2) \text{ und}$$

$$v = \sqrt{v_0{}^2 + \omega^2 (x^2 - x_0{}^2)}.$$

Verfolgen wir die Bewegung der Kugel von A aus weiter, so legt dieselbe im nächsten Zeitmoment τ, in Richtung der Röhre, den Weg $v\,\tau$ zurück und zugleich beschreibt sie einen unendlich kleinen Kreisbogen, dessen Radius $v\,\tau$ und dessen Mittelpunktswinkel $\omega\,\tau$ sein wird. Die Länge dieses Kreisbogens ist daher $v\,\tau\,\omega\,\tau$ und zwar kann dieser Weg in beschleunigter Bewegung zurückgelegt gedacht, also allgemein durch $\tfrac{1}{2} j\,\tau^2$ ausgedrückt werden. Behufs Zurücklegung dieses Weges müssen wir also eine Ablenkungskraft $\mathfrak{C}_1$ normal zur Geschwindigkeit v in Richtung der Bewegung annehmen und deren Beschleunigung j gleich $\dfrac{\mathfrak{C}_1}{m}$ setzen. Es ist demnach:

$$v\,\tau\,\omega\,\tau = \tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{C}_1}{m} \tau^2 \text{ und}$$

$$\mathfrak{C}_1 = 2\, m\, v\, \omega.$$

Die Reaction dieser Ablenkungskraft liefert den Druck der Kugel gegen die Röhre, der noch durch die Normalcomponente $m r \omega^2 \sin \varphi$ der Centrifugalkraft $\mathfrak{C}$ vermehrt wird. Es ist demnach dieser Druck D für den Punkt A

$$D = m r \omega^2 \sin \varphi + 2 m v \omega.$$

Setzen wir noch $O C = e$, so ist $\sin \varphi = \frac{e}{r}$ und es ergiebt sich

$$D = m \omega (e \omega + 2 v)$$

$$D = m \omega \{ e \omega + 2 \sqrt{v_0^2 + \omega^2 (x^2 - x_0^2)} \}.$$

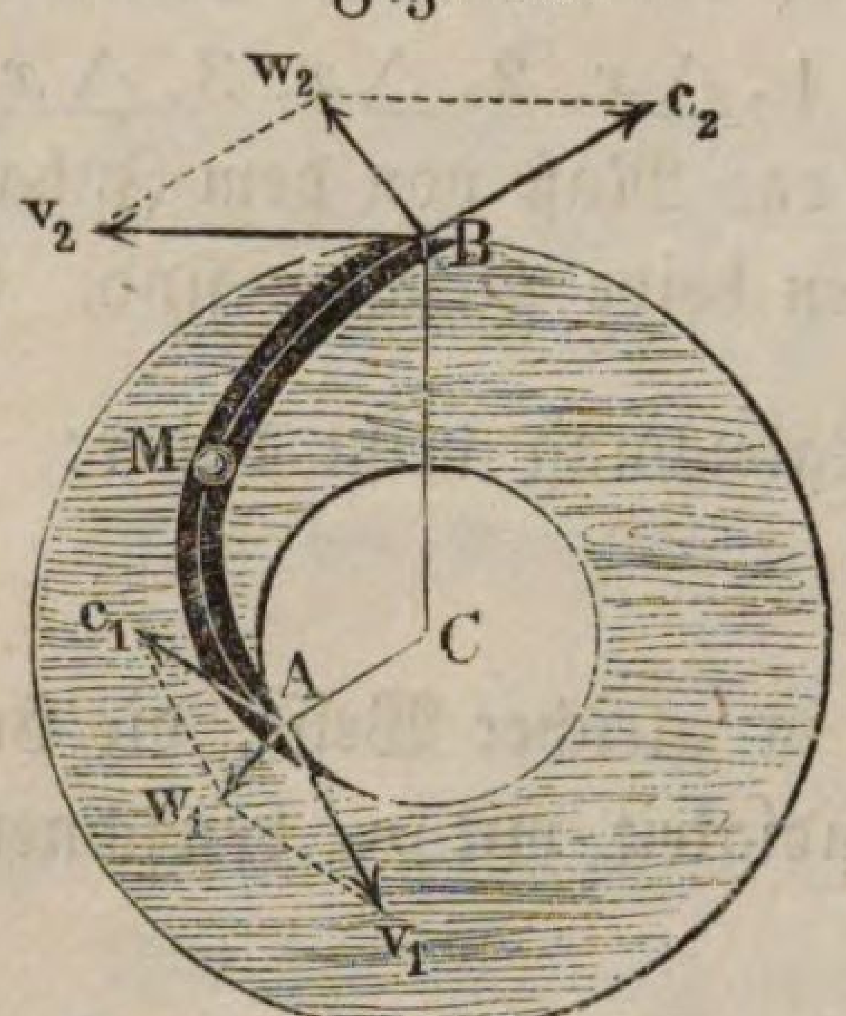
Fällt der Drehpunkt O mit dem Endpunkt C der Röhre zusammen, so ist $e = 0$, x und x_0 gleich r und r_0 zu setzen und wir haben dann:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 (r^2 - r_0^2)}$$

$$D = 2 m \omega \sqrt{v_0^2 + \omega^2 (r^2 - r_0^2)}.$$

68. Eine ebene Scheibe (Fig. 59) dreht sich in horizontaler Lage um den Punkt C gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Auf dieser Scheibe ist in der Ebene derselben eine enge gebogene Röhre befestigt, in welcher sich eine kleine Kugel vom Gewichte $m g$ frei bewegen kann. Es ist die Bewegung der Kugel in der Röhre und ihr Druck gegen die Röhre zu bestimmen.

Fig. 59.



Ist die Geschwindigkeit der Kugel im Punkte A, in der Entfernung r_1 von dem Drehpunkte C, gleich c_1, in dem beliebigen Punkte M, in der Entfernung r von C, gleich c, so ist die von der Kugel während der Bewegung von A bis M aufgenommene lebendige Kraft $\frac{1}{2} m (c^2 - c_1^2)$ und die Arbeitgröße der Tangentialcomponente der Centrifugalkraft $\mathfrak{C}$ in derselben Zeit gleich $\sum_{r_1}^{r} m r \omega^2 \cos \varphi\, \sigma$, unter σ den Weg in Richtung dieser Tangentialcomponente und unter φ den Winkel zwischen c und r verstanden. Es ist aber $\sigma \cos \varphi$ gleich dem kleinsten denkbaren Theile von r gleich $\triangle r$ und deshalb diese Arbeitgröße gleich $m \omega^2 \sum_{r_1}^{r} r . \triangle r$, woraus sich wie in der vorigen Aufgabe $\frac{1}{2} m \omega^2 (r^2 - r_1^2)$ ergiebt. Als erste Gleichung haben wir demnach

$$\tfrac{1}{2} m (c^2 - c_1^2) = \tfrac{1}{2} m \omega^2 (r^2 - r_1^2) \text{ oder}$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + \omega^2 (r^2 - r_1^2)}.$$

Bezeichnen wir den Krümmungsradius der Röhre im Punkte M mit ϱ, so ist die Ablenkungskraft an dieser Stelle $\frac{m c^2}{\varrho}$, durch welche also die Kugel in die benachbarte Tangente übergeführt wird. Diese ist Resultante aus dem Druck D der Röhre gegen die Kugel, der in voriger Aufgabe bestimmten Ablenkungskraft $\mathfrak{C}_1$ und der entgegengesetzten Normalcomponente der Centrifugalkraft $\mathfrak{C}$.

$$m \frac{c^2}{\varrho} = D + 2\, m\, c\, \omega - m\, r\, \omega^2 \sin \varphi,\ \text{daher}$$

$$D = m \left(\frac{c^2}{\varrho} + r\, \omega^2 \sin \varphi - 2\, c\, \omega \right),$$

worin für c, der oben gefundene Werth zu substituiren ist.

Soll D jederzeit gegen die concave Seite der engen Röhre gerichtet sein, so muß D positiv bleiben und wir haben hierfür in den Punkten M und A die Bedingungen

$$\frac{c^2}{\varrho} + r\, \omega^2 \sin \varphi > 2\, c\, \omega \ \text{und}$$

$$\frac{c_1^{\,2}}{\varrho_1} + r_1\, \omega^2 \sin \varphi_1 > 2\, c_1\, \omega.$$

Die absolute Geschwindigkeit ω_1, mit welcher die Kugel bei A in die Röhre einzuführen ist, stimmt der Größe und Richtung nach mit der Resultante aus c_1 und $v_1 = r_1\, \omega$ überein. Ebenso verläßt die Kugel die Scheibe im Punkte B mit der absoluten Geschwindigkeit ω_2, welche der Größe und Richtung nach gleich der Resultante aus den beiden Geschwindigkeiten c_2 und $v_2 = r_2 \,.\, \omega$ ist.

Dritter Abschnitt.

Mechanik fester Körper.

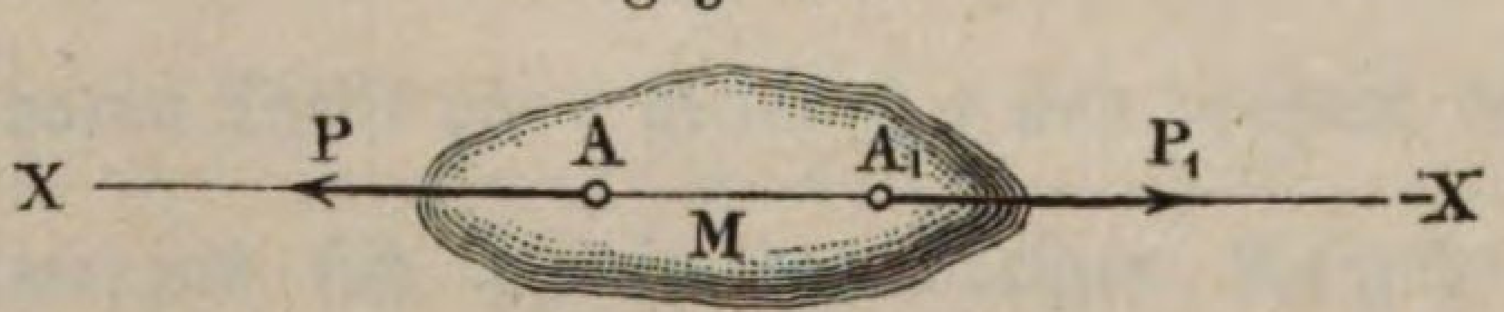
Erstes Capitel.

Von der Vereinigung und Zerlegung der Kräfte.

32 Ein Körper besteht aus der Verbindung einer unendlich großen Anzahl von materiellen Punkten, die mit abstoßenden und anziehenden Kräften behaftet sind, deren gegenseitige Größe die verschiedenen Aggregatszustände der Körper bedingt. Ist diese Verbindung absolut unveränderlich, behalten die einzelnen Punkte, selbst unter der Einwirkung von Kräften, ihre gegenseitige Lage, so haben wir es mit einem festen System materieller Punkte, mit einem festen Körper zu thun. In einem derartigen Körper wird hiernach jeder einzelne Punkt, sobald Kräfte von Außen darauf wirken, die Verschiebung nach allen Richtungen zu hindern suchen, es werden also im Innern des Körpers dadurch neue Kräfte hervorgerufen, welche innere Kräfte, Gegenkräfte, Widerstände, Reactionen heißen.

Wirkt auf den Punkt A (Fig. 60) die Kraft P und wird die Lage des Punktes A dadurch nicht verändert, so muß P durch eine ihr gleiche, aber entgegengesetzt wirkende innere Kraft Q_1 aufgehoben werden. Geht dieser Widerstand von dem in der Kraftrichtung gelegenen Punkte A_1 aus, so erfährt A_1 selbst, nach dem Princip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung, von A aus eine gleiche Einwirkung Q, welche mit Q_1 nach entgegengesetzter Richtung wirkt. Soll aber diese letztere Einwirkung auf die Lage des Punktes A_1 nicht verändernd einwirken, so ist in A_1 eine Kraft P_1 in Richtung von AA_1 anzubringen, welche gleich Q, d. i. P ist und dieser gerade entgegengesetzt wirkt. Die beiden an den Punkten A und A_1 in der Richtungslinie entgegengesetzt wirksamen, gleich großen Kräfte P und P_1 rufen also die inneren Kräfte Q_1 und Q hervor, welche ihrerseits die gegenseitige Lage der Punkte A und A_1 erhalten, dabei einander aufheben und zugleich das Gleichgewicht zwischen den

Fig. 60.



Kräften P und P_1 vermitteln. So lange die Verbindung zwischen A und A_1 eine feste ist, kann man also auch annehmen, daß sich die beiden Kräfte P und P_1 unmittelbar das Gleichgewicht halten. Die gegenseitige Lage der Punkte A und A_1 wird aber durch eine gerade vollkommen starre Verbindungslinie erhalten, welche also weder einer Ausdehnung, noch einer Zusammendrückbarkeit fähig ist, dagegen eine gemeinschaftliche Ortsveränderung der Punkte zuläßt. In dem vollkommen festen Körper haben wir also alle materiellen Punkte durch derartige starre gerade Linien verbunden zu denken, in deren Richtung die auftretenden und sich gegenseitig aufhebenden Widerstände wirksam sind. Denkt man dagegen nur je zwei Nachbarpunkte eines Körpers durch eine derartige starre Linie verbunden, so kann der Körper eine gewisse Biegsamkeit beibehalten, und wir haben es dann mit einem vollkommen biegsamen Faden von unveränderter Länge zu thun.

Aus der obigen Untersuchung folgt unmittelbar:

1) Zwei gleich große Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn sie an den Enden einer starren geraden Linie in deren Richtung nach entgegengesetzter Seite wirksam sind.

2) Der Angriffspunkt einer Kraft kann, ohne daß sich deren Wirkung ändert, in jedem beliebigen Punkt ihrer Richtung angenommen werden.

Zur Erläuterung der letzten Folgerung sei P die in dem Punkte A des Körpers M (Fig. 61) in Richtung von CA wirksame Kraft. Durch den beliebigen Punkt B in dieser Linie lege man zwei gleich große in Richtung von CA aber nach entgegengesetzter Seite wirksame Kräfte P_1 und P_2, die sich also aufheben und den ursprünglichen Zustand des Körpers nicht ändern. Der Körper ist als fest vorausgesetzt, die Verbindungslinie BA daher auch vollkommen starr. Setzt man $P_1 = P_2 = P$, so kann man nach 1) P und P_2 als sich aufhebende Kräfte ansehen, und es bleibt dann P_1 in B wirksam übrig, d. h. der Angriffspunkt der Kraft P ist von A nach B in der Richtung CA verlegt.

Fig. 61.

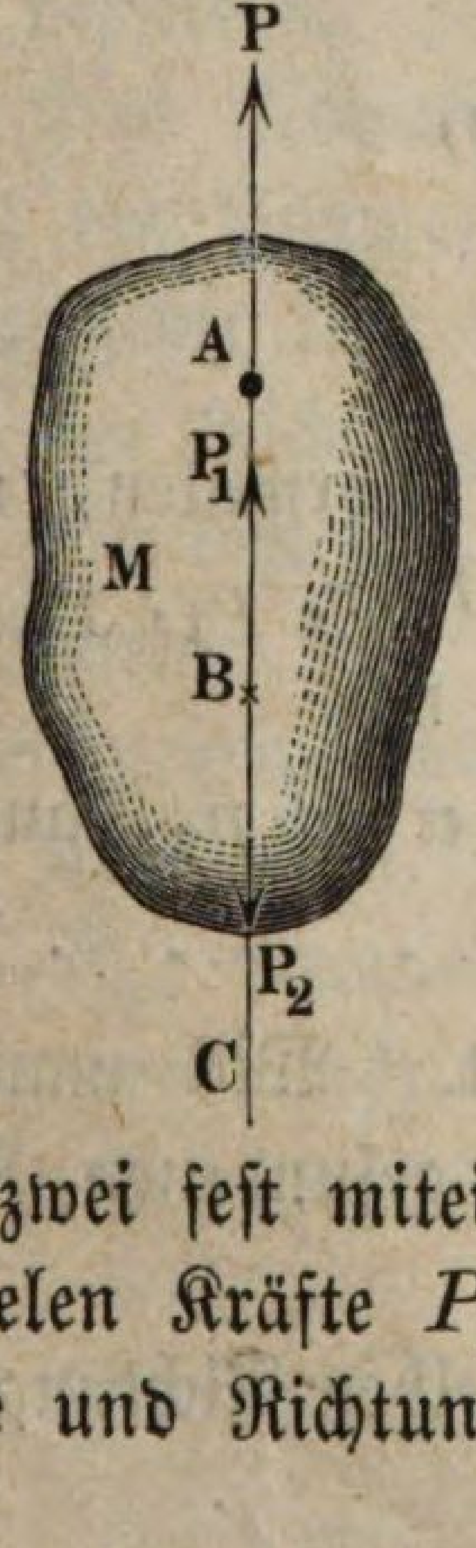
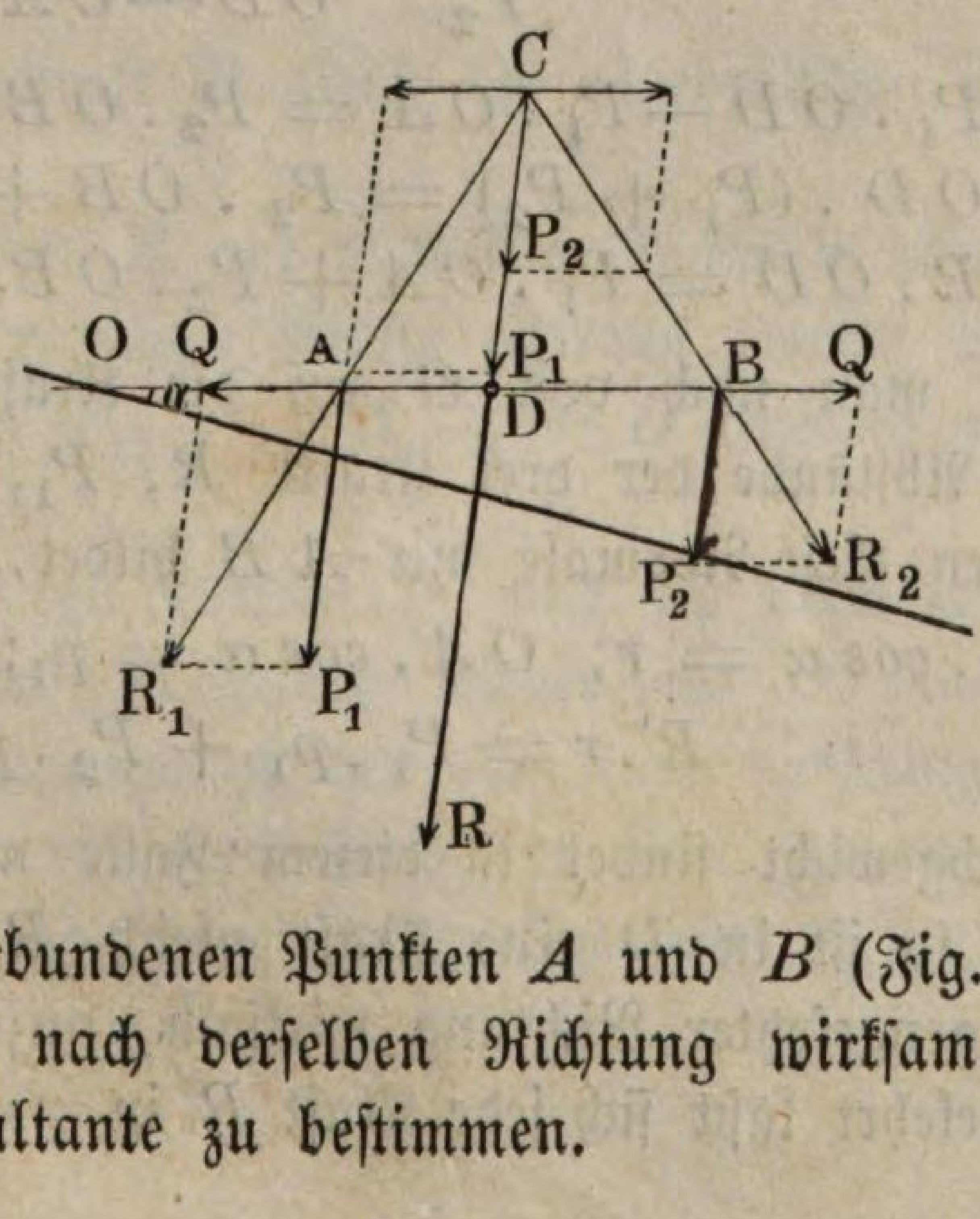


Fig. 62.



An zwei fest miteinander verbundenen Punkten A und B (Fig. 62) sind die parallelen Kräfte P_1 und P_2 nach derselben Richtung wirksam. Es ist die Größe und Richtung der Resultante zu bestimmen. 33

Man bringe in A und B in Richtung der Verbindungslinie AB zwei gleich große Kräfte Q an, die nach entgegengesetzter Seite wirken, den ursprünglichen Zustand also nicht ändern, ersetze P_1 und Q durch ihre Resultante R_1, P_2 und Q durch die Mittelkraft R_2 und verlege die Angriffspunkte dieser beiden Kräfte in den Durchschnittspunkt C ihrer beiden Richtungen. Zerlegen wir jetzt die beiden in C wirksamen Kräfte R_1 und R_2 nach Richtung ihrer ursprünglichen Componenten, so entstehen wieder die beiden sich aufhebenden Kräfte Q und zwei Kräfte nach Richtung der gegebenen Kräfte, welche diesen gleich sind und in ihrer Summe die Resultante R der beiden gegebenen Kräfte liefern:

$$R = P_1 + P_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Bezeichnen wir noch den Durchschnittspunkt von R und AB mit D, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$\frac{P_1}{Q} = \frac{CD}{AD} \text{ und } \frac{P_2}{Q} = \frac{CD}{DB} \text{ und daraus}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{DB}{AD} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

wodurch die Lage des Punktes D, den man als Angriffspunkt der Resultirenden R ansehen kann, bestimmt ist.

Aus (68) folgt:

$$\frac{P_1 + P_2}{P_1} = \frac{DB + DA}{DB} \text{ und } \frac{P_1 + P_2}{P_2} = \frac{DB + DA}{DA}.$$

Setzt man hierin $P_1 + P_2 = R$ und $DB + DA = AB$, so hat man

$$R : P_1 : P_2 = AB : DB : DA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Es sei O ein beliebiger Punkt auf der Linie AB, so folgt ferner aus (68), wenn wir DA und DB durch OA, OB und OD ausdrücken:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{OB - OD}{OD - OA} \text{ oder}$$

$$P_1 . OD - P_1 . OA = P_2 . OB - P_2 . OD$$
$$OD . (P_1 + P_2) = P_2 . OB + P_1 . OA$$
$$R . OD = P_1 . OA + P_2 . OB.$$

Fällt man noch von O auf die Kraftrichtungen Normalen, nennt die normalen Abstände der drei Kräfte R, P_1, P_2 von O: r, p_1, p_2 und den Winkel, den diese Normale mit AB bildet, α, so ist, da

$$OD . \cos \alpha = r; \; OA . \cos \alpha = p_1; \; OB . \cos \alpha = p_2, \text{ auch}$$

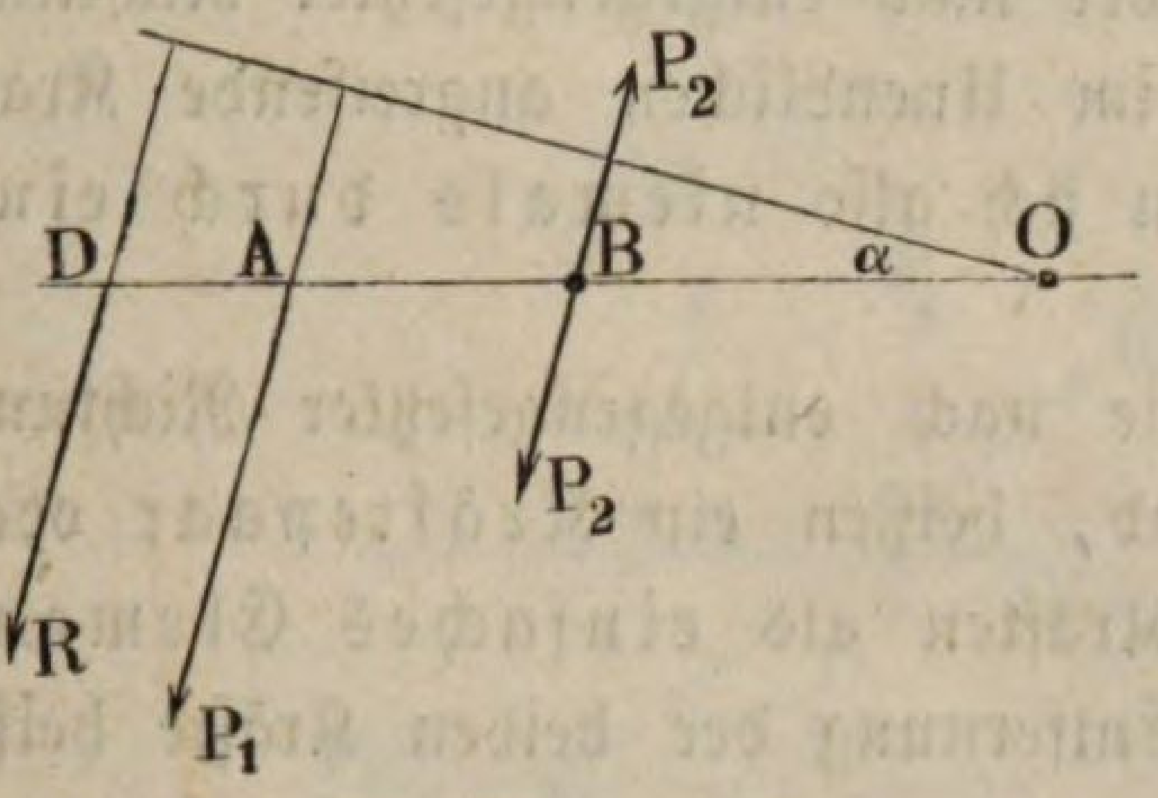
$$R . r = P_1 . p_1 + P_2 . p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Gleichgewicht findet in diesem Falle niemals statt. Will man dasselbe herstellen, so ist in D eine Kraft gleich R, mit der gefundenen Resultante nach entgegengesetzter Richtung wirksam, anzubringen.

Umgekehrt läßt sich jede Kraft R in zwei nach derselben Richtung wirkende

parallele Componenten P_1 und P_2 zerlegen, und zwar muß man außer R noch zwei von den vier Größen P_1, P_2, AD, BD geben.

Fig. 63.



Wirken die beiden parallelen Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 63) nach entgegengesetzter Richtung, so zerlege man die größere derselben, hier P_1, in zwei parallele Componenten, von denen die eine gleich der kleineren Kraft P_2 in dem Angriffspunkt B derselben angebracht wird. Diese vernichtet demnach die gegebene Kraft P_2 und es bleibt als Resultante $P_1 - P_2$, in D wirksam, übrig:

$$R = P_1 - P_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (67\text{a})$$

Zur Bestimmung von D haben wir nach (68):

$$\frac{P_1 - {}_2P}{P_2} = \frac{AB}{DA} \text{ oder}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{DB}{DA} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (68\text{a})$$

und hieraus wie oben

$$R : P_1 : P_2 = AB : DB : DA \quad \ldots \ldots \quad (69\text{a})$$

Fällt man wieder von einem beliebigen Punkt O der Linie AB Normalen auf die Kraftrichtungen und benutzt die obigen Bezeichnungen, so erhält man $R \,.\, OD = P_1 \,.\, OA - P_2 \,.\, OB$ oder

$$R \,.\, r = P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70\text{a})$$

Die Gesetze für zwei parallele Kräfte, in den Formeln (67) und (70) enthalten, sprechen sich wie folgt aus, wenn man die Producte $R \,.\, r$, $P_1 \cdot p_1$, $P_2 \cdot p_2$ die Momente der Kräfte in Bezug auf den beliebigen Punkt O nennt:

1) Die Resultante von zwei parallelen Kräften ist gleich der algebraischen Summe derselben.

2) Das Moment der Mittelkraft ist gleich der algebraischen Summe der Momente der Componenten.

Umgekehrt läßt sich jede Kraft R auf vielfältige Weise in zwei nach entgegengesetzter Richtung wirksame parallele Kräfte zerlegen, wobei wieder außer R noch zwei von den vier Größen P_1, P_2, AD, BD beliebig angenommen werden können.

Gleichgewicht kann zwischen den Kräften P_1 und P_2 niemals stattfinden, vielmehr wird man zur Herstellung desselben wieder in D eine Kraft $R = P_1 - P_2$, parallel und entgegengesetzt der Resultante anbringen müssen. Eine besondere Erörterung erfordert jedoch noch der Fall, wenn $P_1 = P_2$, also $R = 0$ wird. Aus Gleichung (69a) folgt allgemein:

$$DB = AB \frac{P_1}{R}.$$

Läßt man hierbei $A B$ und P_1 unverändert, dagegen P_2 immer größer und größer werden, so wird R kleiner und kleiner, $D B$ nimmt an Größe immerfort zu und wird endlich für $P_2 = P_1$, d. h. für $R = 0$ unendlich groß, d. h.: Zwei gleich große, parallel aber nach entgegengesetzter Richtung wirksame Kräfte haben zur Resultante die im Unendlichen angreifende Kraft Null, sie haben also keine Resultante, lassen sich also niemals durch eine Kraft ersetzen.

34 Zwei gleich große parallele Kräfte, die nach entgegengesetzter Richtung wirksam und fest miteinander verbunden sind, heißen ein Kräftepaar oder schlechtweg Paar. Dasselbe ist nebst den Kräften als einfaches Element in die Mechanik eingeführt. Die normale Entfernung der beiden Kräfte heißt der Arm oder die Breite des Paares, jede der Kräfte Seitenkraft oder einfach Kraft des Paares. Während die einzelnen Kräfte sich als Ursache der Beschleunigung von Punkten ergeben haben, hat das Kräftepaar das Bestreben, die Ebene, in der sich dasselbe befindet, zu drehen. In welcher Weise die Drehung erfolgen wird, ist vorläufig ganz unbestimmt, da sich nicht übersehen läßt, welcher Punkt der Ebene fest ist und dadurch dem Kräftepaar als Drehpunkt dienen kann. Ist über den Drehpunkt keine bestimmte Annahme gemacht, so wird das Kräftepaar keine Wirkung äußern, darf aber deshalb doch nicht als nicht vorhanden angesehen werden. Hat das Kräftepaar das Bestreben, die Ebene in der Weise zu drehen, wie sich der Zeiger einer Uhr bewegt, so nennt man dasselbe rechtsdrehend (Fig. 64), bei dem entgegengesetzten Bestreben heißt das Paar linksdrehend (Fig. 65). Zwei Kräftepaare sind gleich, wenn sie gleichen Arm und gleiche Kraft haben.

Fig. 64.

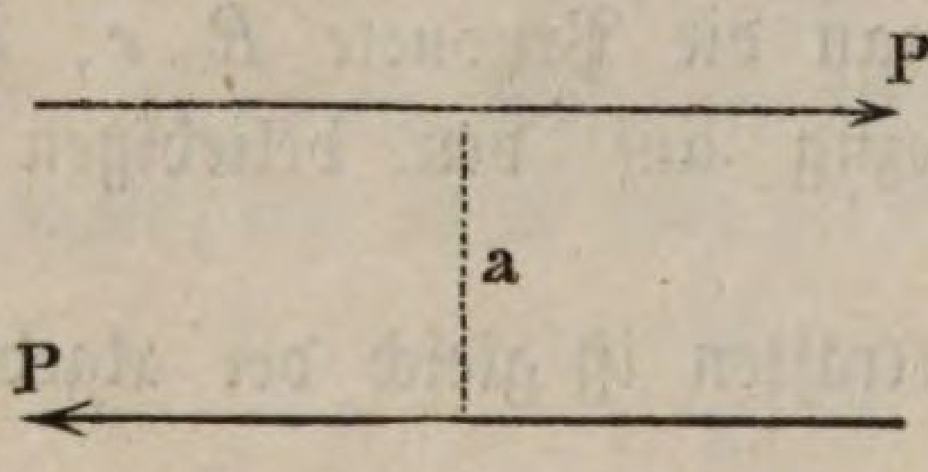
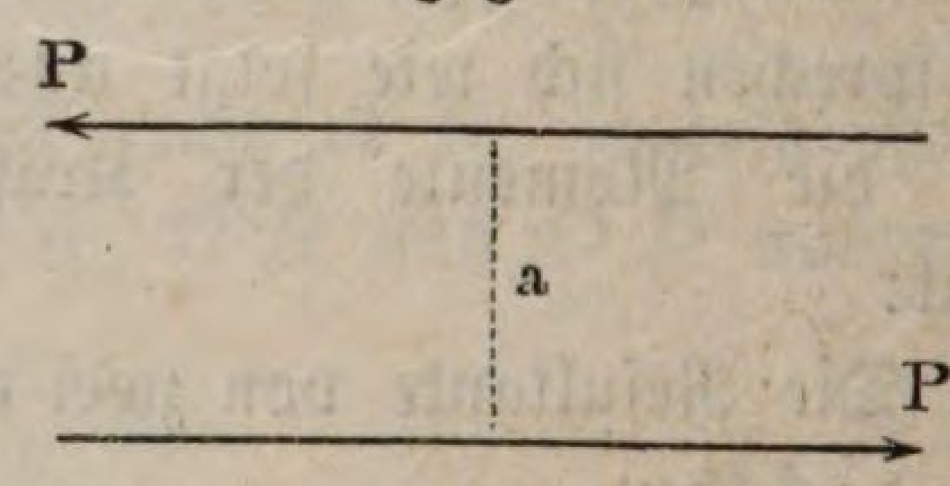


Fig. 65.



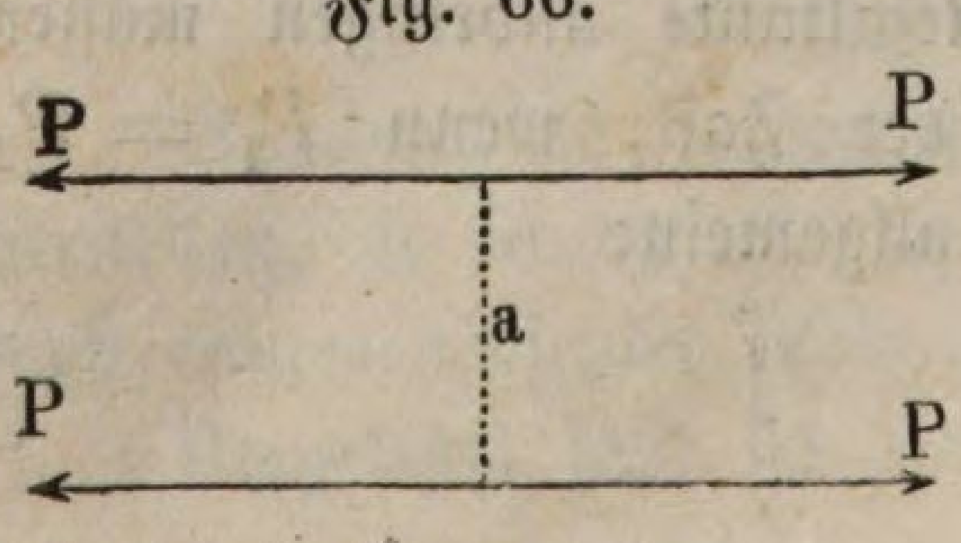
1) Zwei gleich große Kräftepaare, die entgegengesetztes Drehungsbestreben haben und in einer Ebene liegen, halten sich das Gleichgewicht.

Die beiden Kräftepaare können eine dreifache Lage zu einander haben.

a) Die Kraftrichtungen der Paare mögen ineinander fallen (Fig. 66).

In diesem Falle wirken in den Linien zwei gleich große Kräfte nach entgegengesetzter Richtung. Die Wirkung derselben ist Null, daher auch die Wirkung der gegebenen Paare.

Fig. 66.



b) Die Kräftepaare mögen sich schneiden (Fig. 67).

Die Paare haben dieselbe Breite, die Durchschnittsfigur ist deshalb ein Rhombus. Für die beiden Kräfte in A wirksam gedacht, bestimme man die Resultante R. Diese liegt der

Richtung nach in der Diagonale des Rhombus. Für die Kräfte in B bestimme man ebenfalls die Resultante, die auch gleich R wird, aber der ersten Mittelkraft entgegengesetzt wirken muß. Diese beiden Mittelkräfte heben sich auf, weshalb auch die Wirkung der gegebenen Paare Null sein muß.

Fig. 67.

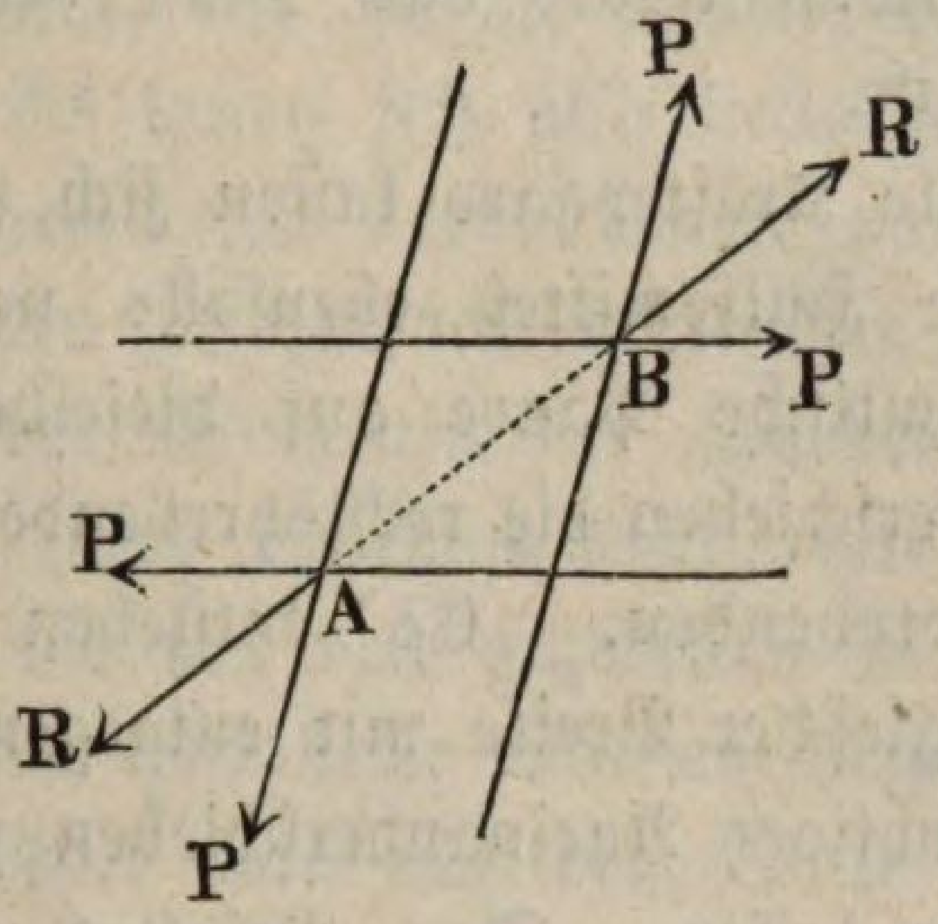
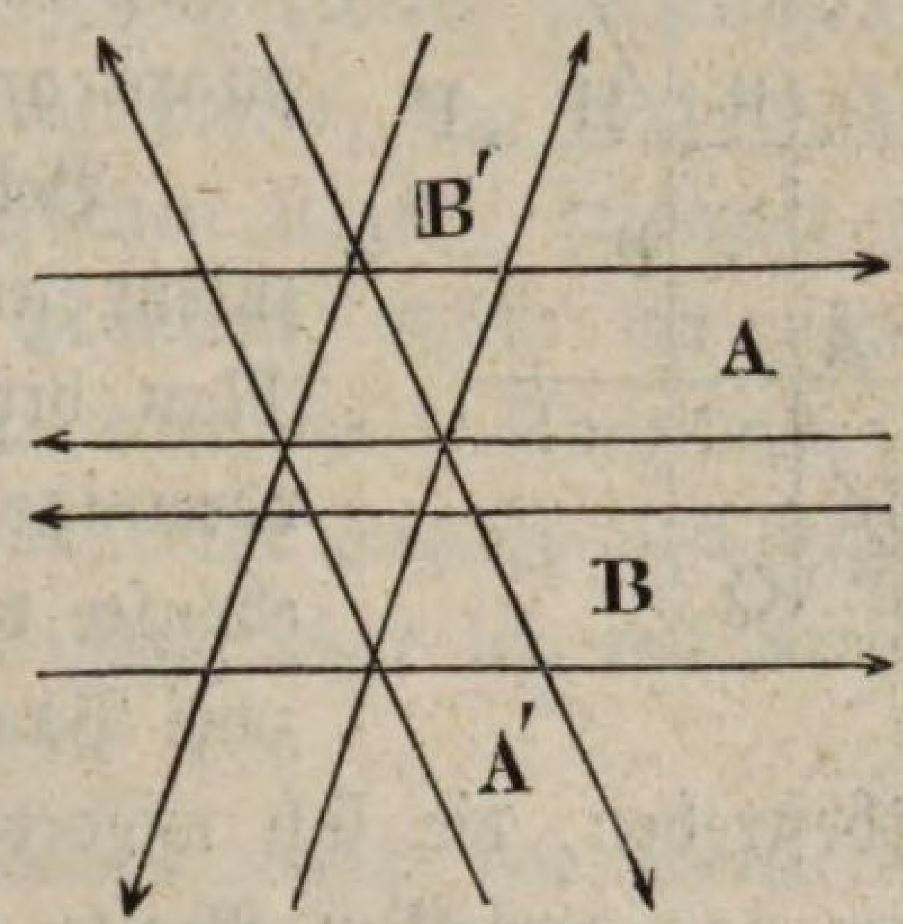


Fig. 68.



c) Die Paare A und B mögen parallel liegen (Fig. 68).

Man bilde sich zwei Paare A' und B', welche den gegebenen gleich sind, entgegengesetztes Drehungsbestreben haben und sich schneiden. Dieselben sind nach b) unter sich im Gleichgewichte und werden, zu den gegebenen Paaren in eine dieselben schneidende Lage gebracht, den ursprünglichen Zustand nicht ändern. Nach der letzten Erörterung ist A und B' im Gleichgewichte, ebenso B und A', daher müssen auch A und B einander aufheben, da A' und B' für sich im Gleichgewichte sind.

Aus diesem Gesetze folgt, daß die Lage zweier Paare in einer Ebene die Wirkung derselben nicht ändert. Es ist hiernach gestattet, ein Paar in einer Ebene beliebig zu verschieben, und jeder Punkt derselben kann als Angriffspunkt des Paares dienen.

Der Arm eines Paares soll in der Folge jederzeit durch einen Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets, die dazu gehörige Kraft dagegen durch denselben Buchstaben des großen lateinischen Alphabets bezeichnet werden. Das Product Pp aus der Kraft P und dem Arme p eines Paares nennt man das Moment des Paares und versieht dasselbe bei rechtsdrehenden Paaren mit einem positiven, bei linksdrehenden also mit einem negativen Zeichen.

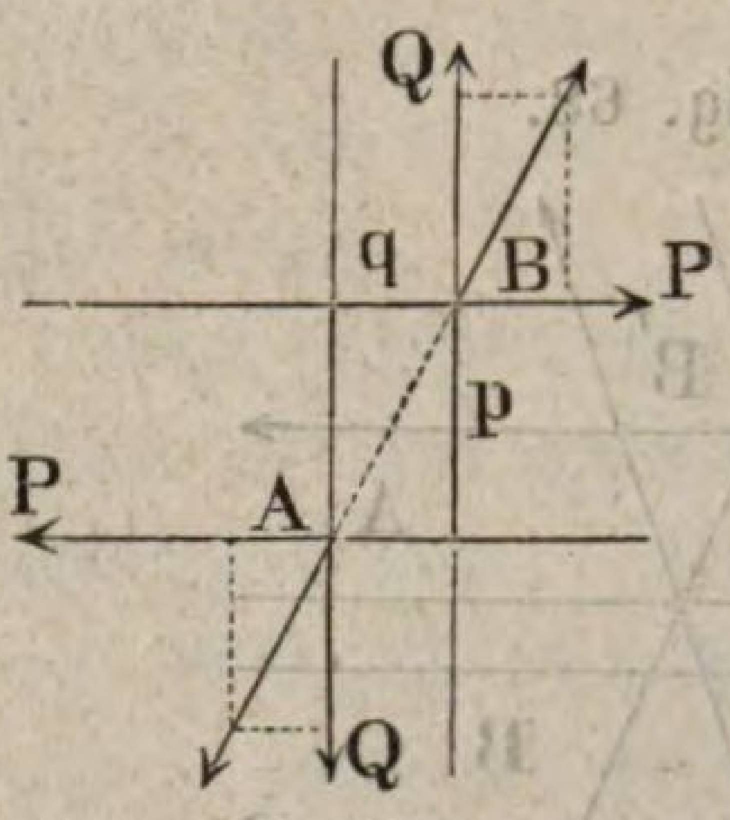
2) Zwei Paare in derselben Ebene wirksam, mit entgegengesetztem Drehungsbestreben und gleichen Momenten, halten sich das Gleichgewicht. Die Momente der beiden Paare seien Pp und Qq. Nach der Voraussetzung ist

$$Pp = Qq \text{ oder } P:Q = q:p.$$

Man verschiebe das Paar Qq (Fig. 69 a. f. S.) so, daß es das andere rechtwinkelig schneidet, bilde in A und B die Resultanten. Diese sind gleich, liegen der Richtung nach in der Diagonale des aus den Armen gebildeten Rechtecks, weil p und q den Kräften P und Q proportional sind, und wirken

entgegengesetzt. Die beiden Resultanten heben sich also auf und deshalb halten sich auch die gegebenen Paare das Gleichgewicht.

Fig. 69.



Diesem Gesetz zufolge kann man bei einem Paare Kraft und Arm beliebig verändern, wenn nur der Werth des Momentes unverändert bleibt, woraus folgt, daß das Moment als das Maß der Kräftepaare anzusehen ist.

Beliebig viele Kräftepaare lassen sich durch das zuletzt angegebene Hülfsmittel ebenfalls vereinigen. Man bringe sämmtliche Paare auf dieselbe Breite, vereinige durch Verschieben die rechtsdrehenden Paare, ebenso die linksdrehenden. Es entstehen dadurch zwei Paare von gleicher Breite mit entgegengesetztem Drehungsbestreben, die sich wieder durch richtiges Aneinanderschieben zu einem Kräftepaare von derselben Breite vereinigen lassen. Das Resultat wird entweder ein rechtsdrehendes, oder ein linksdrehendes Paar sein, oder es wird Gleichgewicht stattfinden.

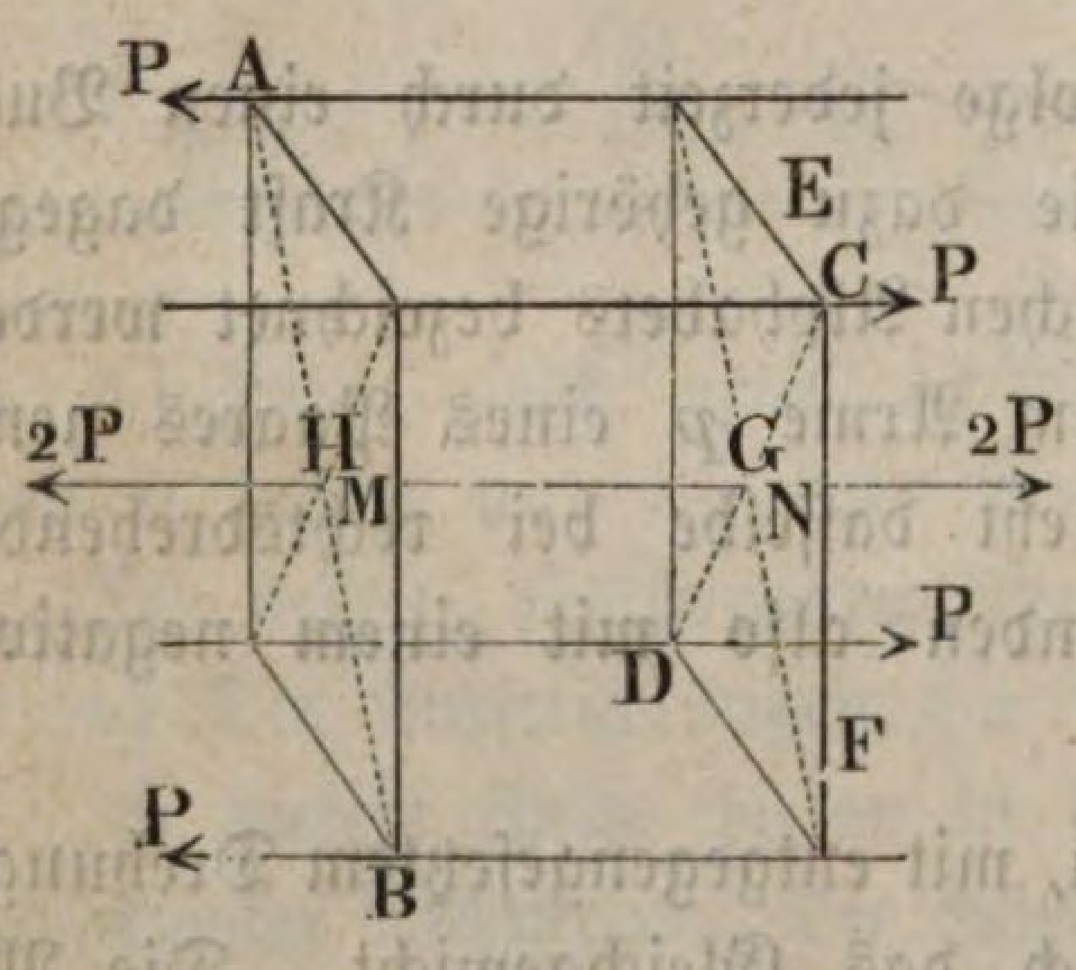
Auch durch Rechnung läßt sich zu demselben Resultate gelangen. Das resultirende Paar $Q\,q$ erhält man in der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare. Bezeichnen wir die Kräfte der Paare durch $P_1, P_2 \ldots$, ihre Breiten durch $p_1, p_2 \ldots$, so ist:

$$Q\,q = \Sigma P_1\,p_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (71)$$

dessen Werth positiv, negativ oder Null sein kann.

In den beiden fest miteinander verbundenen parallelen Ebenen E und F (Fig. 70) liegen die Kräftepaare $P_1\,p_1$ und $P_2\,p_2$. Haben dieselben entgegengesetztes Drehungsbestreben, aber gleiche Momente, so halten sie sich das Gleichgewicht. Man bringe die Paare auf die Breite p, so werden die Kräfte wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Momente ebenfalls gleich P. Die beiden Paare verschiebe man nun in den beiden Ebenen dergestalt, daß die einzelnen Kräfte P sich in parallelen Ebenen befinden, und schneide die Ebenen E und F rechtwinkelig durch zwei neue Ebenen G und H. Es wirken dann zwei Kräfte P normal zur Linie $A\,B$, deren Resultante also gleich $2\,P$ ist; andererseits wirken die beiden anderen Kräfte P normal zur Linie $C\,D$ und liefern ebenfalls $2\,P$ als Mittelkraft. Beide Resultanten wirken nach entgegengesetzter Richtung in der durch M und N mit den Kräften parallel gehenden Linie, heben sich also auf, weshalb auch die ursprünglich gegebenen Kräftepaare im Gleichgewichte sein müssen, da die beiden Kräfte $2\,P$ anstatt der Kräftepaare gesetzt werden dürfen. Da nach diesem

Fig. 70.

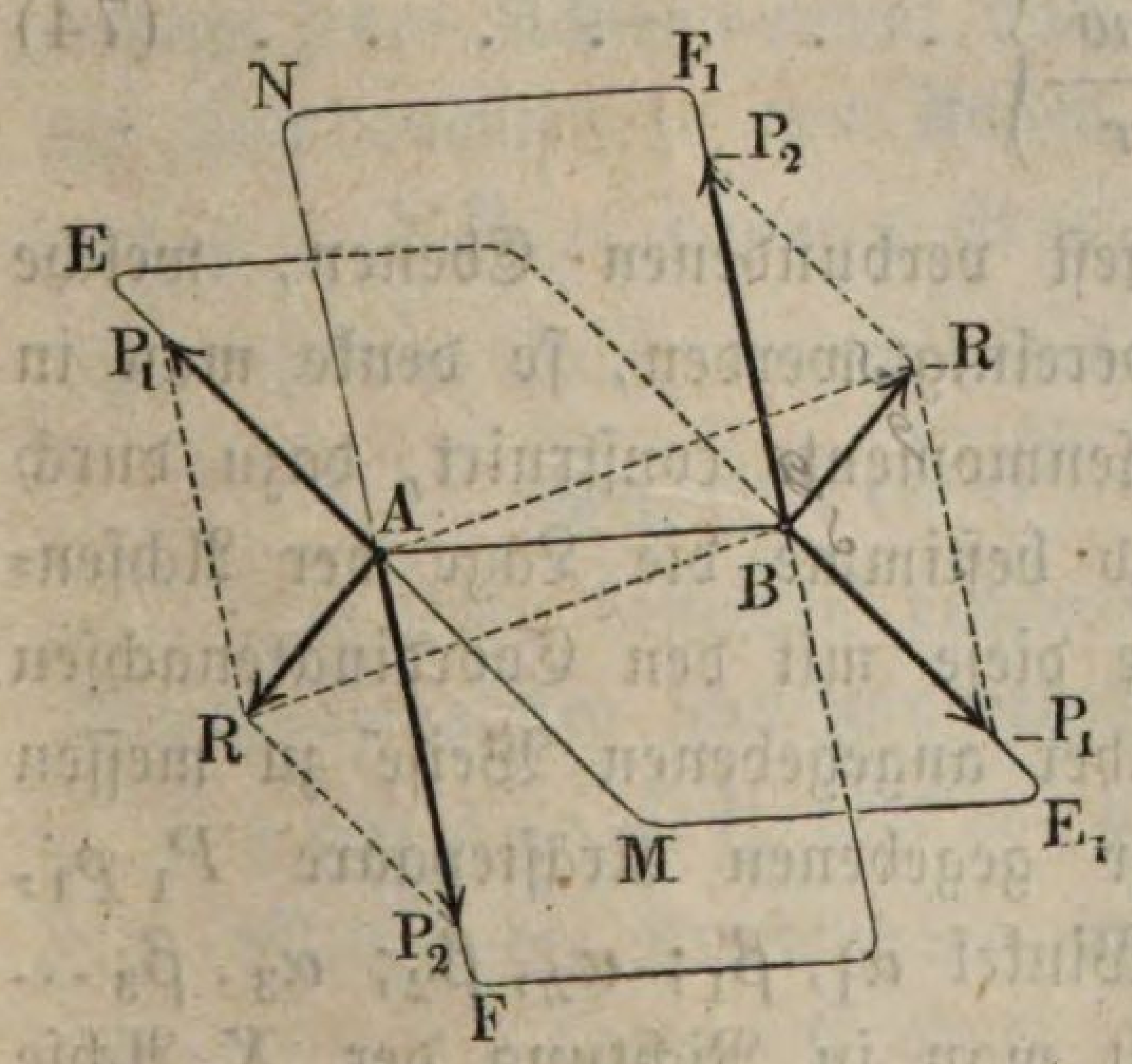


Gesetze die Entfernung der beiden fest verbundenen Ebenen E und F auf die Wirkung der darin liegenden Kräftepaare keinen Einfluß hat, so folgt daraus, daß man jedes Kräftepaar mit seiner Ebene parallel verschieben darf, und daher verschiedene Kräftepaare, die in fest miteinander verbundenen parallelen Ebenen liegen, in derselben Weise zu einem resultirenden Kräftepaar vereinigen kann, als ob die Kräftepaare in derselben Ebene vorhanden gewesen wären. Es lassen sich also beliebig viele Kräftepaare, die in derselben Ebene oder in damit fest verbundenen parallelen Ebenen liegen, jederzeit zu einem resultirenden Kräftepaar vereinigen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare ist. Umgekehrt läßt sich also auch jedes beliebige Kräftepaar in eine beliebige Anzahl von Kräftepaaren zerlegen, die mit den gegebenen in derselben Ebene oder in, mit derselben fest verbundenen parallelen Ebenen liegen.

Errichtet man auf der Ebene eines Paares, nach der Seite des Raumes, von welcher aus das Paar als ein rechtsdrehendes erscheint, eine Normale, versieht diese nach der angegebenen Seite hin mit einer Pfeilspitze und trägt auf derselben eine Strecke ab, deren Maß mit dem Maß des Kräftepaares übereinstimmt, so nennt man diese Normale die Achse des Paares und das begrenzte Stück derselben das Achsenmoment. Führt man anstatt der Momente der Kräftepaare diese Achsenmomente in die Rechnung, so erhält man für die bis jetzt behandelten Fälle in der algebraischen Summe der Achsenmomente das Achsenmoment des resultirenden Kräftepaares, d. h. es lassen sich die Achsenmomente für Paare, in derselben oder in parallelen Ebenen gelegen, gerade so vereinigen, wie wir Kräfte, die an demselben Punkte, theils nach derselben, theils nach der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, vereinigt haben.

Es seien in zwei, fest miteinander verbundenen, sich schneidenden Ebenen 35
$E\,E_1$ und $F\,F_1$ (Fig. 71) zwei Kräftepaare $V v$ und $W w$ gegeben, deren resultirende Wirkung bestimmt werden soll. Man bringe beide Paare auf dieselbe Breite r, die sich dabei ergebenden Kräfte mögen gleich P_1 und P_2 werden. Es ist hiernach also

Fig. 71.



$$V v = P_1\, r \text{ und } W w = P_2\, r.$$

Man verschiebe nun die Paare so in den Ebenen, daß die Arme beider Paare in die Durchschnittslinie $A\,B$ fallen, die Kraftrichtungen treffen dann je zwei denselben Punkt der Durchschnittslinie und stehen auf derselben normal. Man ersetze die Kräfte P_1 und P_2 in A und B durch ihre Resultanten R, welche nach paralleler aber entgegengesetzter Richtung wirken und in einer Ebene liegen, welche mit der gegebenen Ebene die Durchschnittslinie gemein hat. Die beiden Kräfte R, welche die gegebenen

Kräftepaare ersetzen, bilden demnach ein Kräftepaar, das $AB = r$ ebenfalls zur Breite hat. Das Moment des resultirenden Kräftepaares ist also Rr. Es sei δ der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen, so ergiebt sich n. F. 36:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos \delta}$$

und nachdem wir beide Seiten der Gleichung mit r multiplicirt

$$Rr = \sqrt{(P_1 r)^2 + (P_2 r)^2 + 2 P_1 r . P_2 r \cos \delta} \text{ oder}$$

$$Rr = \sqrt{(Vv)^2 + (Ww)^2 + 2 Vv . Ww \cos \delta} \quad . \; . \quad (72)$$

d. h. aber, das resultirende Moment Rr wird aus den Momenten Vv und Wv der gegebenen Kräftepaare gerade so bestimmt, wie wir früher die Resultante für zwei, einen Punkt unter einem Winkel angreifende Kräfte gefunden haben. Wir können das Letztere vollständig zur Uebereinstimmung bringen, wenn wir in demselben Punkte der Durchschnittslinie der gegebenen Ebenen die Achsenmomente construiren, welche sich bekanntlich unter dem Neigungswinkel der Ebenen schneiden, und diese wie Kräfte an einem Punkt zu dem resultirenden Achsenmoment Rr vereinigen. Bildet das Letztere mit dem Achsenmoment Vv den Winkel ϱ und mit Ww den Winkel σ, so ist n. F. 37:

$$Rr : Vv : Ww = \sin \sigma : \sin \varrho : \sin \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73)$$

woraus sich die Lage des resultirenden Achsenmomentes oder die resultirende Paarebene bestimmt.

Gleichgewicht findet hierbei nicht statt. Umgekehrt läßt sich jedes Kräftepaar in zwei andere zerlegen, deren Ebenen sich mit der von Rr in derselben Linie schneiden und die unter sich den Winkel δ bilden. Zu dem Ende müssen außer Rr noch zwei der Größen σ, ϱ, Vv, Ww gegeben sein.

Bilden die beiden Ebenen einen rechten Winkel, so reduciren sich die obigen Formeln auf folgende

$$\left.\begin{array}{l} Rr = \sqrt{(Vv)^2 + (Ww)^2} \\ \cos \varrho = \dfrac{Vv}{Rr} \text{ und } \cos \sigma = \dfrac{Ww}{Rr} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (74)$$

Sollen beliebig viele Kräftepaare in fest verbundenen Ebenen, welche sämmtlich durch dieselbe Linie AB gehen, vereinigt werden, so denke man in einem Punkte O dieser Linie sämmtliche Achsenmomente construirt, dazu durch O ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, und bestimme die Lage der Achsenmomente durch die Winkel α und β, welche diese mit den Coordinatenachsen bilden, wobei die Winkel wieder in der früher angegebenen Weise zu messen sind. Wir zerlegen die Achsenmomente der gegebenen Kräftepaare $P_1 p_1$, $P_2 p_2$, $P_3 p_3, \ldots$, die mit den Achsen die Winkel α_1, β_1; α_2, β_2; $\alpha_3, \beta_3 \ldots$ bilden, nach Richtung der Achsen, so erhält man in Richtung der X-Achse die Componenten: $P_1 p_1 \cos \alpha_1$, $P_2 p_2 \cos \alpha_2$, $P_3 p_3 \cos \alpha_3 \ldots$, deren Summe mit Ll bezeichnet werden soll. In gleicher Weise sei die Summe der Componenten in der Y-Achse gleich $\Sigma P_1 p_1 \cos \beta_1$ gleich Mm.

Hieraus ergiebt sich das Moment des resultirenden Kräftepaares $Q\,q$ oder das resultirende Achsenmoment, wenn wir λ und μ die Winkel des letzteren mit den Coordinaten-Achsen nennen:

$$\left.\begin{array}{c} Q\,q = \sqrt{(L\,l)^2 + (M\,m)^2} \\ Q\,q\,cos\,\lambda = L\,l \text{ und } Q\,q\,cos\,\mu = M\,m \end{array}\right\} \quad \ldots . \quad (75)$$

Für den Gleichgewichtszustand ist

$$\left.\begin{array}{l} Q\,q = 0 \text{ oder} \\ \left.\begin{array}{l} L\,l \\ M\,m \end{array}\right\} \text{ gleichzeitig } = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

worin $L\,l$ also das Drehungsbestreben um die X-Achse und $M\,m$ das um die Y-Achse bezeichnet.

In derselben Weise erhalten wir aus drei Kräftepaaren mit den Momenten $U\,u$, $V\,v$, $W\,w$, welche in drei Ebenen liegen, von denen jede zu den beiden anderen normal ist, das Moment des resultirenden Kräftepaares

$$R\,r = \sqrt{(U\,u)^2 + (V\,v)^2 + (W\,w)^2} \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

da die drei Achsenmomente die Kanten eines Parallelepipedums bilden, dessen Diagonale der Richtung und Größe nach das resultirende Achsenmoment $R\,r$ liefert. Nennen wir die Winkel, welche diese Diagonale mit den Kanten bildet, ϱ, σ, τ, so bestimmt sich die Lage derselben und damit auch die Lage der resultirenden Paarebene durch die Gleichungen:

$$R\,r\,cos\,\varrho = U\,u;\; R\,r\,cos\,\sigma = V\,v;\; R\,r\,cos\,\tau = W\,w.$$

Umgekehrt läßt sich hiernach auch jedes Kräftepaar vom Moment $R\,r$ in drei Kräftepaare zerlegen, deren Ebenen eine solche Lage haben, daß jede derselben auf den beiden anderen rechtwinkelig steht.

Sollen endlich beliebig viele in den verschiedensten Ebenen gelegene Kräftepaare vereinigt werden, so können wir die Ebenen mit sich parallel verschoben denken, bis sie sämmtlich durch denselben Punkt O gehen. In O construire man die Achsenmomente, lege durch O ein dreiachsiges rechtwinkeliges Coordinatensystem, zerlege jedes Achsenmoment nach Richtnng der Coordinatenachsen und vereinige die Componenten in den Achsen durch algebraische Addition. Dabei sei

$$L\,l = \Sigma P_1\,p_1\,cos\,\alpha_1;\; M\,m = \Sigma P_1\,p_1\,cos\,\beta_1;\; N\,n = \Sigma P_1\,p_1\,cos\,\gamma_1;$$

dann ist das Achsenmoment des resultirenden Kräftepaares:

$$Q\,q = \sqrt{(L\,l)^2 + (M\,m)^2 + (N\,n)^2} \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

Die Lage desselben bestimmt sich durch die Winkel λ, μ, ν mit den drei Coordinatenachsen und wir erhalten analog den obigen Ausdrücken:

$$Q\,q\,cos\,\lambda = L\,l;\; Q\,q\,cos\,\mu = M\,m;\; Q\,q\,cos\,v = N\,n \quad \ldots \quad (79)$$

Waren die Kräftepaare unter sich im Gleichgewicht, so ist:

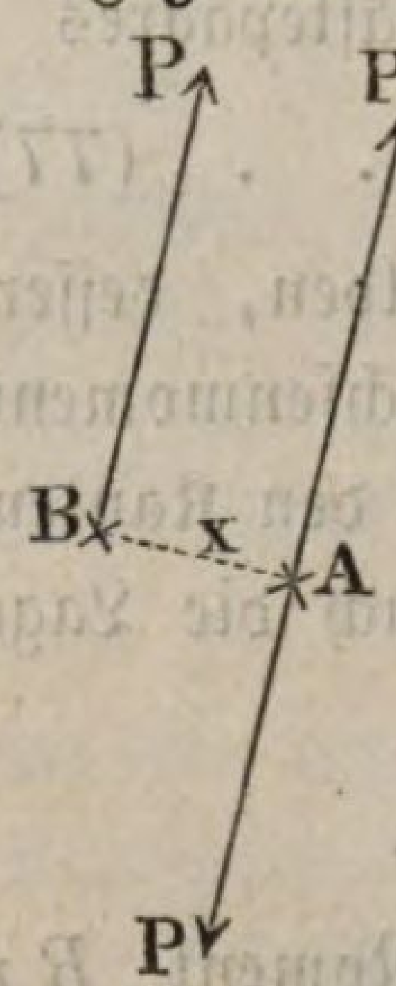
$$\left.\begin{array}{l} Q\,q = 0 \text{ oder} \\ \left.\begin{array}{l} L\,l \\ M\,m \\ N\,n \end{array}\right\} \text{ gleichzeitig } = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

Hierin bezeichnet Ll das Drehungsbestreben um die X-Achse oder in der YZ-Ebene, Mm dasselbe für die Y-Achse oder in der XZ-Ebene und Nn bezieht sich auf die Z-Achse oder auf die XY-Ebene. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, daß beliebig viele Kräftepaare, in beliebiger Lage im Raum, sich jederzeit durch ein einziges Kräftepaar ersetzen lassen, ebenso wie beliebig viele an einem Punkt nach beliebiger Richtung wirksame Kräfte eine Resultante haben.

36 Es bleibt noch die Beziehung zwischen einer Kraft und einem Kräftepaare zu untersuchen, ob und unter welchen Umständen, eine Vereinigung zwischen diesen heterogenen Elementen der Mechanik möglich ist.

a) Das Paar vom Moment Qq liege mit der Kraft P (Fig. 72) in derselben Ebene, oder die Kraftrichtung laufe mit der Paarebene parallel. Beide Fälle lassen sich durch eine Untersuchung abmachen, da man bei der letzten Voraussetzung die Paarebene jederzeit so weit mit sich parallel verschieben darf, bis sie die Kraftrichtung in sich aufgenommen hat.

Fig. 72.



Das Paar vom Moment Qq verändere man in der Weise, daß es zur Kraft die gegebene Kraft P erhalte. Der dazu gehörige Arm x bestimmt sich dabei durch die Gleichung $Qq = Px$. Dieses veränderte Paar verschiebe man in der Ebene dergestalt, daß eine seiner Kräfte die im Punkt A angreifende gegebene Kraft P vernichte. Es bleibt dann in der Entfernung x im Punkte B eine Kraft übrig, welche gleich und parallel der ursprünglichen Kraft P und auch nach derselben Richtung wie diese, wirksam ist.

In diesem Falle ist also eine Vereinigung des Kräftepaares Qq mit der Kraft P möglich, und es erscheint als Resultat dieselbe Kraft P bloß mit sich parallel um die Breite x des veränderten Paares verschoben. Hieraus ergiebt sich umgekehrt, daß man eine Kraft P parallel ihrer Richtung von B nach A verschieben darf, daß man aber dabei das sich bildende Kräftepaar vom Momente Px mit in Rechnung zu bringen hat.

b) Schneidet die Kraftrichtung die Paarebene, so ist eine Vereinigung zwischen beiden Elementen unmöglich, da man bei dem Versuche auf zwei Kräfte geführt wird, deren Richtungen windschiefe Linien sind.

37 Nach Einführung des neuen Elementes, des Kräftepaares in die Mechanik, gehen wir zu der allgemeinsten Aufgabe der Vereinigung der Kräfte über, die an beliebig vielen, fest miteinander verbundenen Punkten nach den verschiedensten Richtungen wirksam sind. Der Vereinfachung wegen machen wir noch die Voraussetzung, daß sämmtliche Kräfte vorläufig in einer Ebene gelegen sind, und übertragen die hierbei erlangten Resultate dann schließlich auf Kräfte, die nicht derselben Ebene angehören.

In der Ebene der Kräfte nehmen wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, und denken die Angriffspunkte der n Kräfte durch ihre Coordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ ... der Lage nach bestimmt. Die Kräfte seien der Größe

nach gleich P_1, P_2, P_3 ... und ihre Richtung werde durch die Winkel bestimmt, die diese mit den Coordinatenachsen bilden. Diese Winkel seien $\alpha_1\ \beta_1$, $\alpha_2\ \beta_2$, $\alpha_3\ \beta_3$ ..., auf die in §. 15 angegebene Weise gemessen. Die in A_1 (Fig. 73) angreifende Kraft P_1 verlege man parallel ihrer Richtung nach dem Coordinaten-Anfangspunkt O, wobei das sich bildende Kräftepaar $P_1\ p_1$ in Rechnung zu bringen ist. Die beiden Kräfte des Paares ersetzen wir durch ihre Componenten, in Richtung der Coordinatenachsen, dann haben wir anstatt der in A_1 wirksamen Kraft P_1 dieselbe Kraft P_1 in O nach derselben Richtung wie die gegebene und mit ihr parallel wirksam, sowie zwei Kräftepaare mit den Momenten $P_1 \cos \alpha_1 . y_1$ und $P_1 \cos \beta_1 . x_1$ (Fig. 74). Die beiden

Fig. 73.

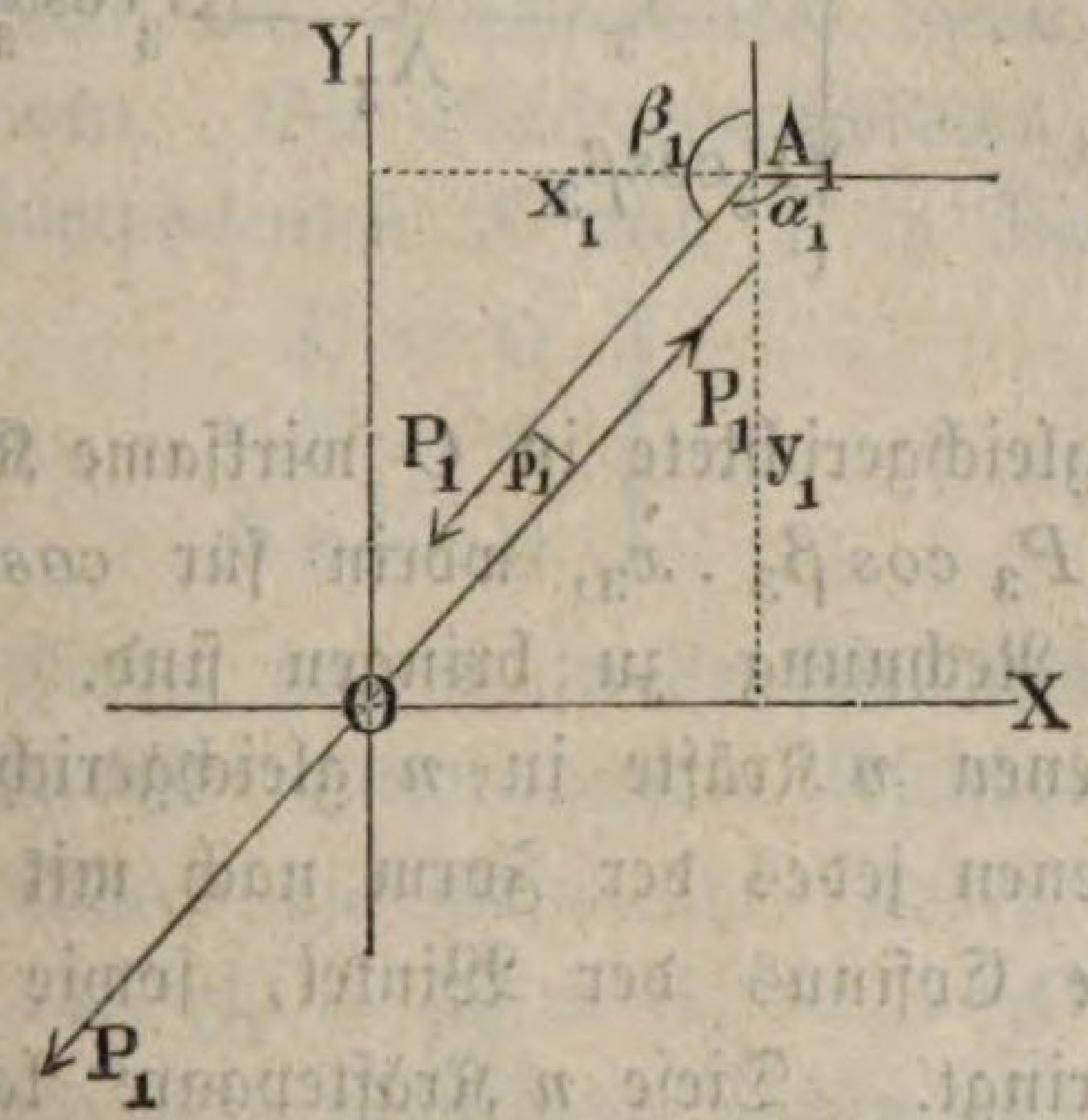
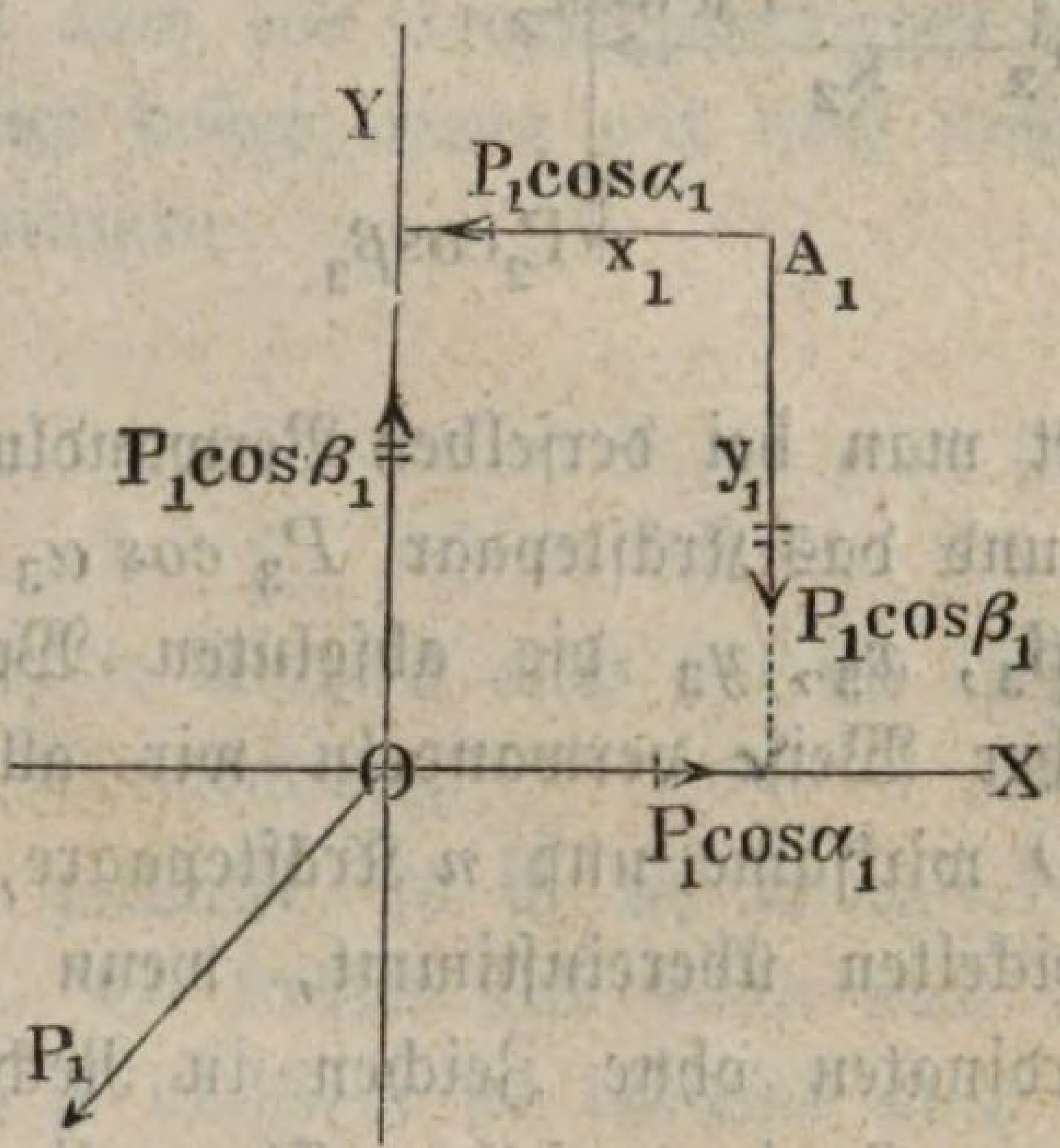


Fig. 74.



letzteren lassen sich durch algebraische Addition vereinigen, wobei auf den Drehungssinn der einzelnen Paare, sowie auf das Zeichen der von der gegebenen Kraft herrührenden Componente und auf das der zugehörigen Coordinate Rücksicht zu nehmen ist. In dem angenommenen Falle ist das Paar $P_1 \cos \alpha_1 . y_1$ linksdrehend, also negativ in Rechnung zu bringen, die negative Componente $P_1 \cos \alpha_1$ verwandelt dies Zeichen jedoch wieder in ein positives; andererseits ist $P_1 \cos \beta_1 . x_1$ ein rechtsdrehendes Paar, hat also ein positives Zeichen, das durch die negative Componente $P_1 \cos \beta_1$ dagegen wieder negativ wird. Das aus beiden Kräftepaaren resultirende Kräftepaar hat hiernach die Form $P_1 \cos \alpha_1 . y_1 - P_1 \cos \beta_1 . x_1$, worin $\cos \alpha_1$ und $\cos \beta_1$ mit ihren absoluten Werthen in Rechnung zu bringen sind. Statt der Kraft P_1 in A_1 wirksam, haben wir dadurch die gleichgerichtete, in O wirksame Kraft P_1 und das Kräftepaar $P_1 \cos \alpha_1 . y_1 - P_1 \cos \beta_1 . x_1$ erhalten. Für eine zweite Kraft P_2 in A_2 wirksam (Fig. 75 a. f. S.) werde dieselbe Verwandlung vorgenommen, so entsteht die gleichgerichtete in O wirksame Kraft P_2 und ein Kräftepaar, das aus $P_2 \cos \alpha_2 . y_2$ und $P_2 \cos \beta_2 . x_2$ besteht. Das erste derselben ist linksdrehend, das negative Zeichen wird aber durch die negative Coordinate y_2 in ein positives verwandelt; $P_2 \cos \beta_2 . x_2$ ist rechtsdrehend, die negative Coordinate verwandelt dagegen das positive

Zeichen in ein negatives. Es ist daher für diese Kraft das resultirende Paar $P_2 \cos \alpha_2 \cdot y_2 - P_2 \cos \beta_2 \cdot x_2$, worin y_2 und x_2 als absolute Werthe in Rechnung zu bringen sind. Für eine dritte Kraft P_3 in A_3 wirksam (Fig. 76)

Fig. 75.

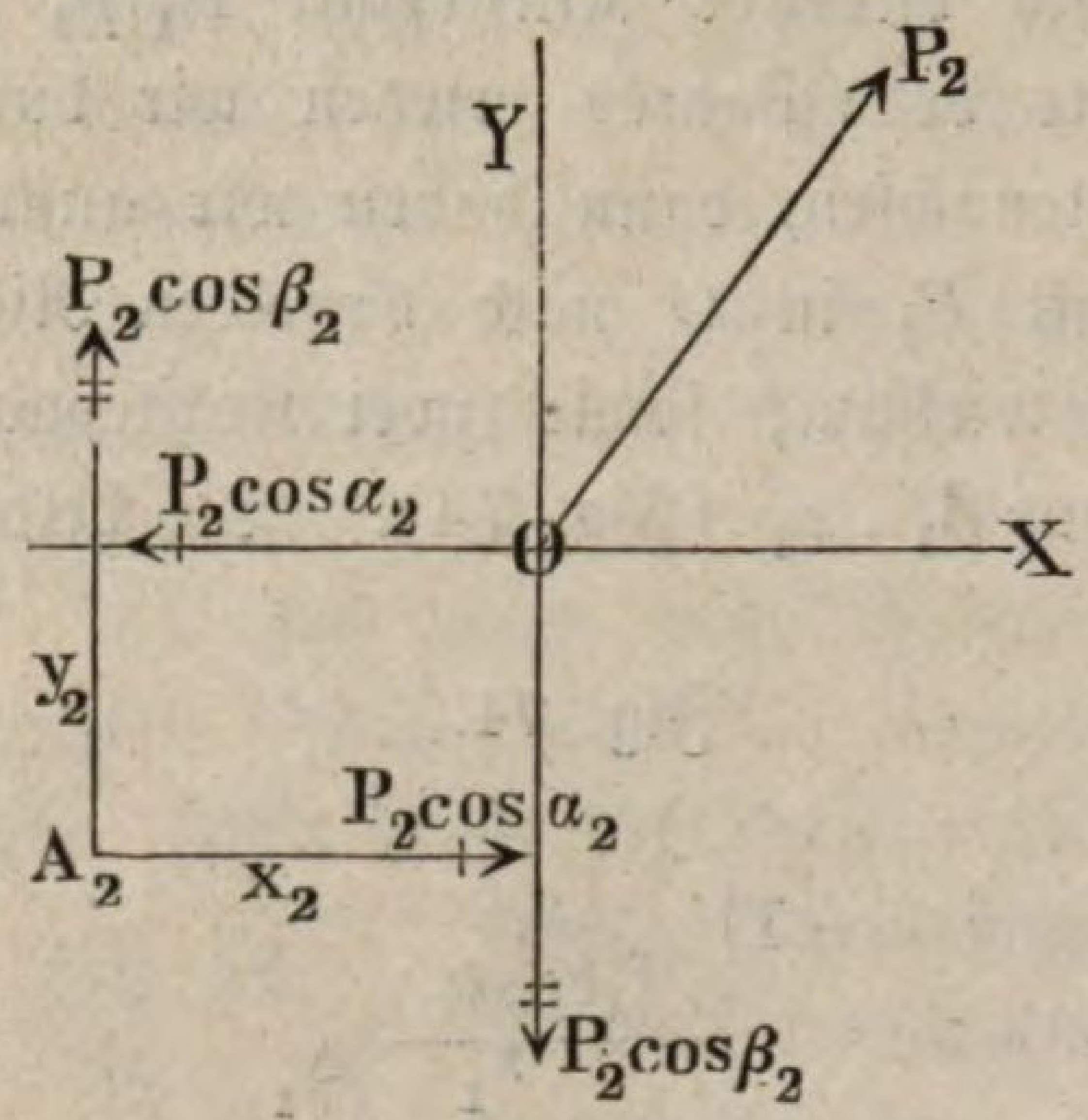
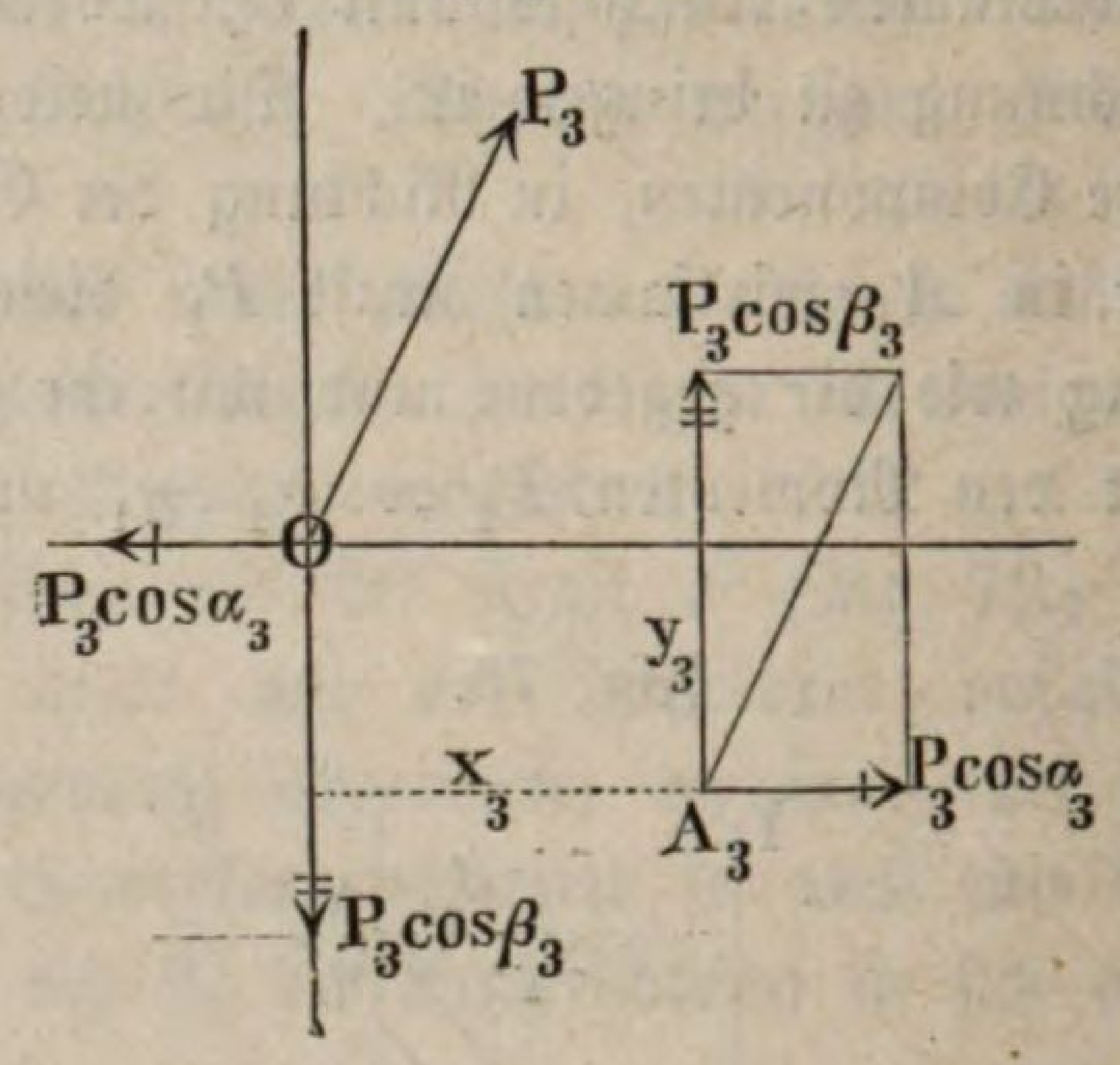


Fig. 76.



findet man bei derselben Verwandlung die gleichgerichtete in O wirksame Kraft P_3 und das Kräftepaar $P_3 \cos \alpha_3 \cdot y_3 - P_3 \cos \beta_3 \cdot x_3$, worin für $\cos \alpha_3$, $\cos \beta_3$, x_3, y_3 die absoluten Werthe in Rechnung zu bringen sind. In gleicher Weise verwandeln wir alle gegebenen n Kräfte in n gleichgerichtete, in O wirksame und n Kräftepaare, von denen jedes der Form nach mit den entwickelten übereinstimmt, wenn man die Cosinus der Winkel, sowie die Coordinaten ohne Zeichen in Rechnung bringt. Diese n Kräftepaare lassen sich, da sie in derselben Ebene liegen, durch algebraische Addition vereinigen, welche Summe wir, analog der früheren Bezeichnung, durch Nn ausdrücken wollen. Es ist demnach:

$$Nn = \Sigma P_1 (\cos \alpha_1 \cdot y_1 - \cos \beta_1 \cdot x_1).$$

Die in O wirksamen, mit den gegebenen gleichgerichteten n Kräfte lassen sich n. §. 24 durch eine Resultante R ersetzen, deren Componenten $X = \Sigma P_1 \cos \alpha_1$ und $Y = \Sigma P_1 \cos \beta_1$ sind, und deren Richtung sich durch die Winkel ϱ und σ bestimmt, welche R mit den Achsen bildet:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$R \cos \varrho = X \text{ und } R \cos \sigma = Y.$$

Da das resultirende Kräftepaar Nn mit der resultirenden Kraft R in derselben Ebene liegt, so ist eine Vereinigung beider n. §. 36 a möglich. Es entsteht die mit R gleichgerichtete und ihr an Größe gleiche Kraft R nur um r, von O aus gerechnet, parallel verschoben, wobei r durch die Gleichung $Nn = Rr$ bestimmt werden muß. Es findet sich dadurch die Richtung der Resultante R des Systems der gegebenen n Kräfte, und kann jeder Punkt derselben als Angriffspunkt angenommen werden. Es habe ein beliebiger Punkt der Resultante die Coordinaten x und y, so läßt sich für Rr analog der oben gezeigten Umwandlung

$$R \cos \varrho \cdot y - R \cos \sigma \cdot x$$

setzen, und es liefert dieser Ausdruck gleich Nn gesetzt, da x und y zusammengehörige Coordinaten der Richtungslinie von R sind, die Gleichung der geraden Linie, in welcher die Resultante des Systems von Kräften liegt:

$$R \cos \varrho \,.\, y - R \cos \sigma \,.\, x = X y - Y x = N n \quad \ldots \ldots \quad (81)$$

Für Nn können wir auch statt des oben entwickelten Summenausdrucks die Summe der ursprünglichen Kräftepaare $\Sigma P_1 p_1$ einführen, und dann enthält die Gleichung:

$$R r = N n = \Sigma P_1 (y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \cos \beta_1) = \Sigma P_1 p_1 \quad \ldots \quad (82)$$

Für jeden beliebigen Punkt O ist das Moment der Resultante gleich der Summe der Momente der gegebenen Kräfte.

Halten sich die gegebenen n Kräfte das Gleichgewicht, so muß sowohl das Bestreben nach fortschreitender Bewegung als auch das Drehungsbestreben verschwinden. Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher, wenn wir noch statt R die Componenten X und Y in Rechnung bringen:

$$\left.\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= 0 \\ Nn &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (83)$$

Findet nur theilweise Gleichgewicht statt, so kommen auch nur die diesem Gleichgewicht entsprechenden Gleichungen zur Verwendung.

Waren die sämmtlichen Kräfte parallel gerichtet, so ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots \beta$ zu setzen, die Kräfte sind dann aber mit positiven und negativen Zeichen zu versehen, je nachdem sie die eine oder die gerade entgegengesetzte Richtung haben. In den vorher entwickelten Formeln erscheinen unter diesen Annahmen $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ als gemeinschaftliche Factoren und wir erhalten dadurch:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\Sigma P_1)^2 (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2)}$$

$$R = \Sigma P_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

d. h. die Resultante paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe der Kräfte:

$$R \cos \varrho = X = \cos \alpha \,.\, \Sigma P_1$$

$$R \cos \sigma = Y = \cos \beta \,.\, \Sigma P_1, \text{ also}$$

$$\cos \varrho = \cos \alpha \text{ und } \cos \sigma = \cos \beta \quad \ldots \ldots \quad (85)$$

d. h. die Resultante paralleler Kräfte ist den gegebenen Kräften parallel:

$$N n = \cos \alpha \, \Sigma P_1 y_1 - \cos \beta \, \Sigma P_1 x_1 = \Sigma P_1 p_1$$

$$N n = R r = \cos \alpha \,.\, R y - \cos \beta \,.\, R x,$$

also $\cos \alpha (\Sigma P_1 y_1 - R y) + \cos \beta (R x - \Sigma P_1 x_1) = 0$.

Soll diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von α und β erfüllt werden, so muß man

$$\left.\begin{aligned} R x &= \Sigma P_1 x_1 \\ \text{und } R y &= \Sigma P_1 y_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (86)$$

setzen.

Diesen beiden Gleichungen gemäß giebt es einen bestimmten unveränderlichen Punkt x, y in dem System paralleler Kräfte, durch welchen die Resultante R derselben jederzeit hindurchgeht, das System paralleler Kräfte mag zu dem Coordinatensystem seine Lage in beliebiger Weise ändern. Diesen einzigen, von der Richtung der gegebenen parallelen Kräfte unabhängigen Angriffspunkt ihrer Resultante nennt man den Mittelpunkt der parallelen Kräfte, weil bei einer Drehung des Systems paralleler Kräfte um ihre Angriffspunkte, unter Erhaltung des Parallelismus, die Mittelkraft R um diesen Punkt eine Drehung von derselben Größe ausführt.

Man nennt die Producte aus der Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes von einer Linie das Moment der Kraft in Bezug auf diese Linie, sodaß hiernach $R\,x$, $\Sigma P_1\,x_1$ die Momente der Kräfte für die Y-Achse und $R\,y$, $\Sigma P_1\,y_1$ die Momente für die X-Achse vorstellen. Die Formeln (86) enthalten demnach das Gesetz: Für parallele Kräfte ist das Moment der Mittelkraft, bezogen auf irgend eine Linie, gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräfte für dieselbe Linie. . . . .

Aus (86) lassen sich die Coordinaten x, y des Mittelpunktes der parallelen Kräfte berechnen, wobei wir noch für die Resultante R ihren Werth ΣP_1 setzen wollen:

$$x = \frac{\Sigma P_1\,x_1}{\Sigma P_1} \text{ und } y = \frac{\Sigma P_1\,y_1}{\Sigma P_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (87)$$

d. h. der Abstand des Mittelpunktes paralleler Kräfte von irgend einer Linie ist gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräfte für diese Linie, dividirt durch die algebraische Summe dieser Kräfte.

Geht eine Linie durch den Mittelpunkt paralleler Kräfte, so muß für diese $x = y = 0$, also

$$\Sigma P_1\,x_1 = \Sigma P_1\,y_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (88)$$

sein und umgekehrt, eine Linie, für welche die algebraische Summe der Momente paralleler Kräfte gleich Null wird, geht durch den Mittelpunkt des Systems.

Für den Fall, daß die parallelen Kräfte unter sich im vollkommenen Gleichgewicht sind, müssen die beiden Gleichungen

$$R = 0 \text{ und } N\,n = 0$$

erfüllt werden. Die erste derselben, $R = \Sigma P_1 = 0$, liefert das Gesetz: die algebraische Summe der Kräfte muß zu Null werden; die zweite dieser Bedingungen, $N\,n = \cos\alpha\,\Sigma P_1\,y_1 - \cos\beta\,\Sigma P_1\,x_1 = 0$, können wir durch geschickte Annahme des Coordinatensystems vereinfachen. Zu dem Ende legen wir die Y-Achse den parallelen Kräften parallel, dann ist $\alpha = 90^\circ$, $\cos\alpha$ gleich Null, $\beta = 0^\circ$, $\cos\beta = 1$, daher reducirt sich die obige Gleichgewichtsbedingung auf

$$N\,n = \Sigma P_1\,x_1 = 0,$$

d. h. die algebraische Summe der Momente paralleler Kräfte für eine mit den Kräften in derselben Ebene gelegene und denselben parallel laufende Linie, muß gleich Null sein.

Die oben F. 83 für beliebig gerichtete Kräfte entwickelten drei Gleichgewichtsbedingungen reduciren sich hiernach für parallele Kräfte auf zwei, nämlich:

$$\Sigma P_1 = 0 \text{ und } \Sigma P_1 x_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (89)$$

Ist $\Sigma P_1 x_1$ allein gleich Null, während ΣP_1 einen bestimmten Werth annimmt, so ist der beliebig gewählte Coordinatenanfangspunkt, in dem ΣP_1 wirksam, zugleich Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Ist aber ΣP_1 gleich Null, dagegen $\Sigma P_1 x_1$ von Null verschieden, so hat das System keinen Mittelpunkt.

Hatten endlich sämmtliche parallele Kräfte dieselbe Richtung, so kann niemals Gleichgewicht, aber auch kein Drehungsbestreben stattfinden, es gelten dann also zur Bestimmung der Resultante R die drei Gleichungen:

$$R = \Sigma P_1; \; x = \frac{\Sigma P_1 x_1}{\Sigma P_1}; \; y = \frac{\Sigma P_1 y_1}{\Sigma P_1}.$$

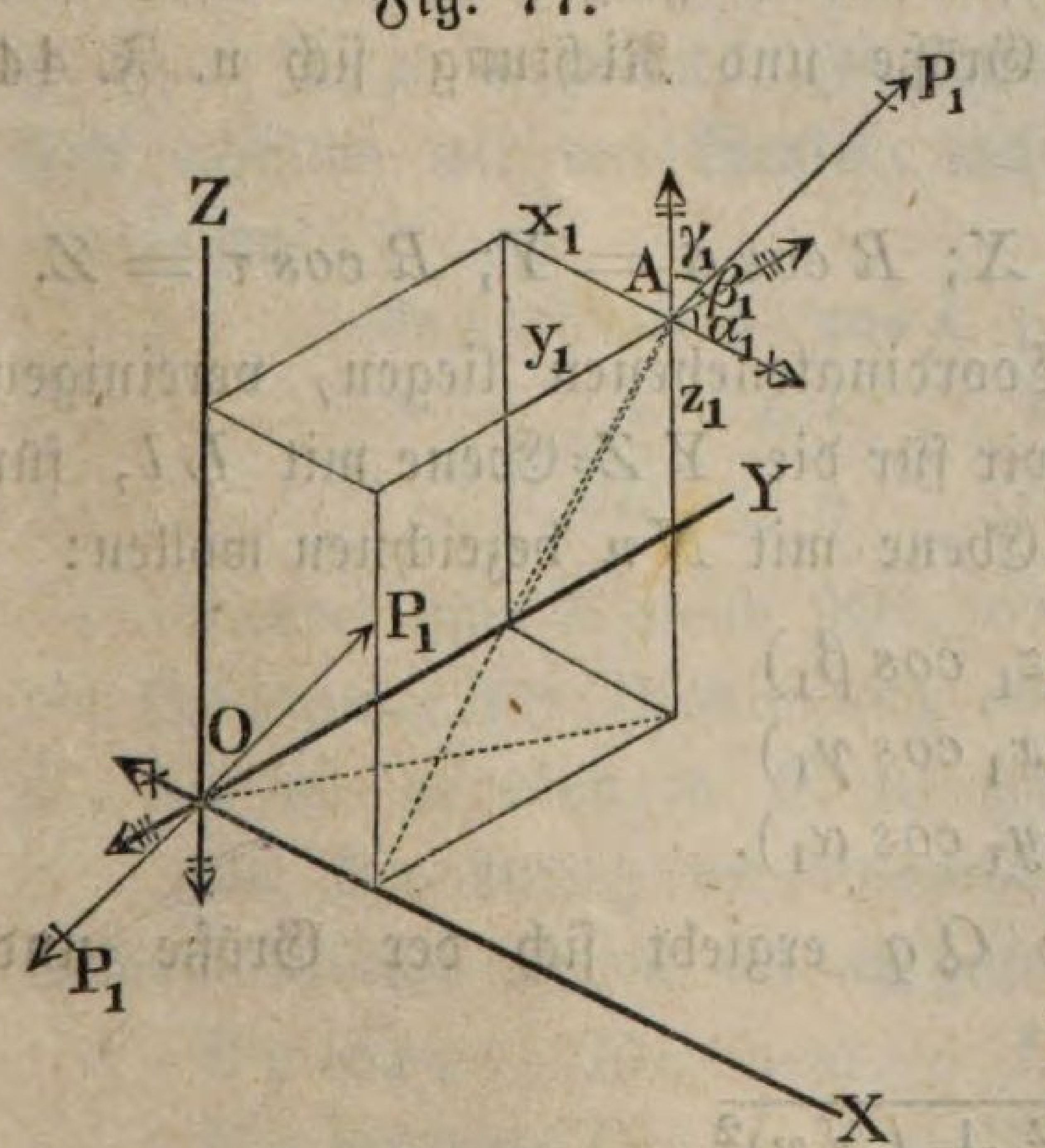
Nehmen wir noch in dem letzten Falle sämmtliche n Kräfte von gleicher Größe $= P$ an, so wird:

$$R = n\,P; \quad x = \frac{\Sigma x_1}{n} \text{ und } y = \frac{\Sigma y_1}{n},$$

wobei der Mittelpunkt des Systemes zum Mittelpunkt der mittleren Abstände wird.

Es bleibt noch übrig, die in §. 37 durchgeführten Untersuchungen für 38
Kräfte in einer Ebene gelegen, auf Kräfte, welche eine ganz beliebige Lage haben, zu übertragen. Zu dem Ende wählen wir im Raume ein beliebiges rechtwinkeliges dreiachsiges Coordinatensystem und bestimmen die n mit einander festverbundenen Punkte, welche als Angriffspunkte der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ dienen sollen, durch ihre Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1,\; x_2\, y_2\, z_2,\; x_3\, y_3\, z_3 \ldots$ Die Richtung der Kräfte ist wieder durch die Winkel $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1,\; \alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2,\; \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3 \cdots$ mit den drei Coordinatenachsen bestimmt.

Fig. 77.

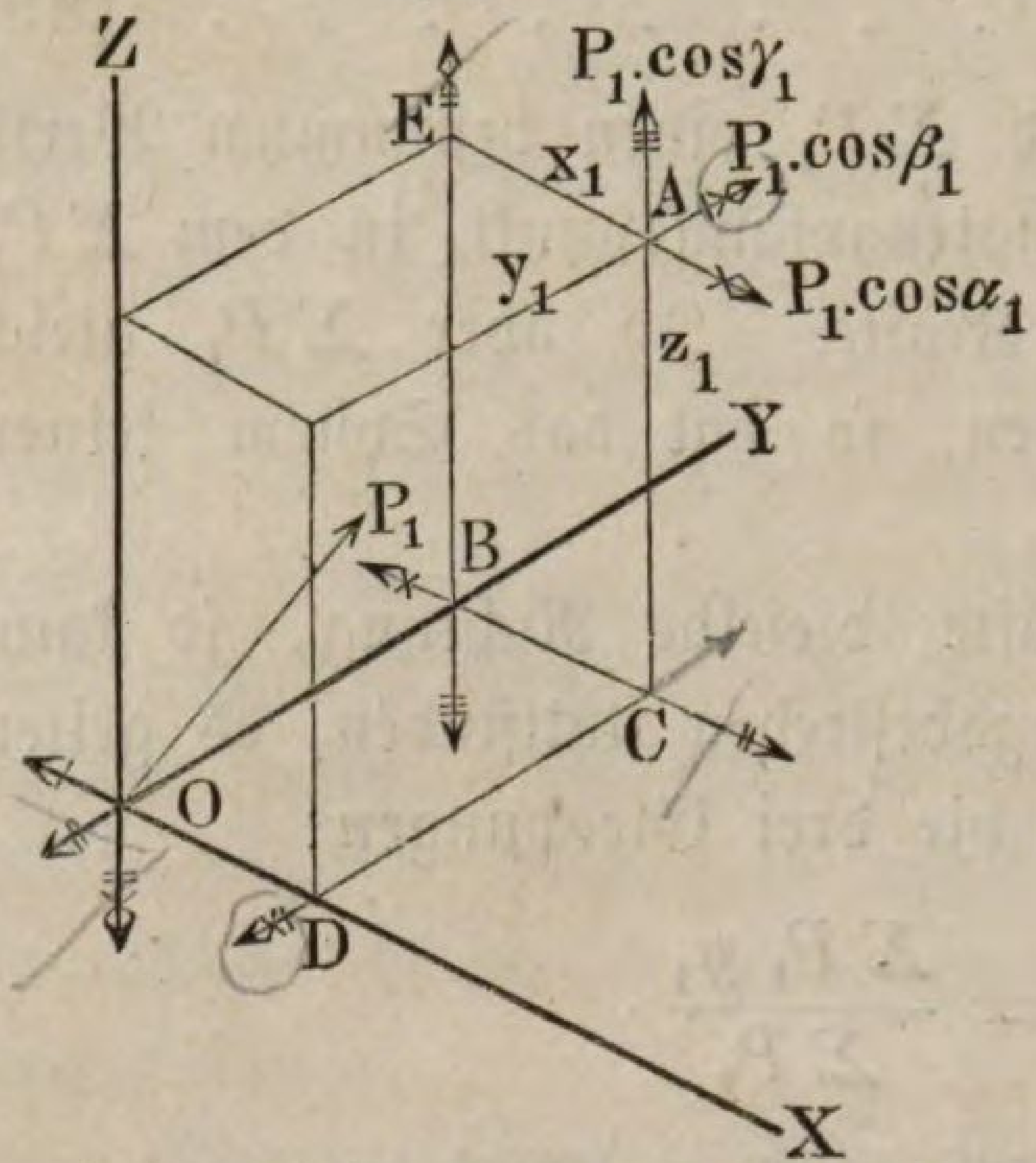


Es sei A (Fig. 77) der Angriffspunkt von P, welche man parallel ihrer Richtung nach dem Coordinatenanfangspunkt O verlegt und deshalb das Kräftepaar $P_1\, p_1$ mit in Rechnung bringen muß. Die Kräfte des letzteren werden nach Richtung der Coordinatenachse zerlegt, wodurch sich anstatt des Kräftepaares $P_1\, p_1$ drei Kräftepaare mit den Momenten

$$P_1 \cos\alpha_1 \,.\, \sqrt{y_1^2 + z_1^2}; \; P_1 \cos\beta_1 . \sqrt{x_1^2 + z_1^2}; \; P_1 \cos\gamma_1 . \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

ergeben. Diese, in den Diagonalebenen des aus den drei Coordinaten $x_1\ y_1\ z_1$ gebildeten Parallelepipedums gelegen, werden noch einmal jedes in zwei Kräftepaare zerlegt, die in den Coordinatenebenen selbst oder in damit parallelen Ebenen wirksam sind. Zu dem Ende bringen wir (Fig. 78) in BC zwei Kräfte $P_1 \cos\alpha_1$ an, die sich das Gleichgewicht halten, in CD legen wir zwei gleiche Kräfte $P_1 \cos\beta_1$, die entgegengesetzt gerichtet sind, und in BE werden zwei Kräfte $P_1 \cos\gamma_1$ unter derselben Bedingung angeordnet. Darauf fasse man diejenigen Kräfte als Paare zusammen, die in einer der Coordinatenebenen oder in einer damit parallelen Ebene liegen und vereinige diese mit Rücksicht auf ihr Drehungsbestreben durch algebraische Addition. Zu dem Ende betrachten wir diejenige Drehungsrichtung als die positive, welche von dem positiven Theile der X-Achse über die positive Y-Achse und Z-Achse zurück nach der X-Achse führt. Für diese Annahme ergiebt sich das Drehungsbestreben

Fig. 78.



um die X-Achse oder in der YZ-Ebene $= P_1 \cos\gamma_1 \cdot y_1 - P_1 \cos\beta_1 \cdot z_1$
„ „ Y- „ „ „ XZ- „ $= P_1 \cos\alpha_1 \cdot z_1 - P_1 \cos\gamma_1 \cdot x_1$
„ „ Z- „ „ „ XY- „ $= P_1 \cos\beta_1 \cdot x_1 - P_1 \cos\alpha_1 \cdot y_1$.

Durch diese Umwandlung haben wir anstatt der Kraft P_1, in A wirksam, eine ihr gleich und gleichgerichtete in O angreifende und drei in den Coordinatenebenen gelegene Kräftepaare erhalten. Verfährt man mit den übrigen Kräften in gleicher Weise, so erhalten wir hiernach n Kräfte den gegebenen gleich und gleichgerichtet in O wirksam und in jeder der Coordinatenebenen n Kräftepaare. Die n Kräfte mit dem gemeinschaftlichen Angriffspunkt O lassen sich zu einer Resultante R vereinigen, deren Größe und Richtung sich n. §. 44 und 45 bestimmt:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};\ R \cos\varrho = X;\ R \cos\sigma = Y;\ R \cos\tau = Z.$$

Die n Kräftepaare, welche in jeder der Coordinatenebenen liegen, vereinigen sich n. §. 71 zu einem Kräftepaar, das wir für die YZ-Ebene mit Ll, für die XZ-Ebene mit Mm, für die XY-Ebene mit Nn bezeichnen wollen:

$$Ll = \Sigma P_1 (y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1)$$
$$Mm = \Sigma P_1 (z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1)$$
$$Nn = \Sigma P_1 (x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1).$$

Das hieraus resultirende Kräftepaar Qq ergiebt sich der Größe und Richtung n. §. 78 und 79:

$$Qq = \sqrt{(Ll)^2 + (Mm)^2 + (Nn)^2}$$
$$Qq \cos\lambda = Ll;\ Qq \cos\mu = Mm;\ Qq \cos\nu = Nn.$$

Als Endresultat erhalten wir hiernach in jedem Falle die Resultante R und das resultirende Kräftepaar $Q\,q$, deren Vereinigung davon abhängig ist, ob die Kraftrichtung R der Paarebene parallel ist oder in derselben liegt. Stellt man sich dabei unter $Q\,q$ das resultirende Achsenmoment vor, so muß diese Paarachse mit der Richtung von R einen rechten Winkel bilden, wenn die Vereinigung zu einer Gesammtresultante R möglich sein soll.

Nehmen wir den Fall der Vereinigung von $Q\,q$ und R an, denken also $Q\,q$ auf die Kraft R gebracht und das neue Paar in der Weise verschoben, daß die im Coordinatenanfangspunkte wirkende Kraft R aufgehoben wird, so bleibt die Gesammtresultante R in einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sein mögen, übrig, welche der früheren Resultante parallel wirkt und auch mit dieser gleiche Richtung hat. Denkt man nun umgekehrt diese Gesammtresultante R nach dem Coordinatenanfangspunkt O parallel mit sich verschoben, also in die Kraft R in O wirksam und das Kräftepaar $R\,r$ zerlegt, und ersetzt außerdem $R\,r$ durch drei in den Coordinatenebenen gelegene Paare, so müssen diese mit $L\,l$, $M\,m$, $N\,n$ dem Werthe und der Drehungsrichtung nach übereinstimmen. Die Bedingung der Vereinigung hängt hiernach von der gleichzeitigen Erfüllung folgender drei Gleichungen ab:

$$L\,l = R\cos\tau\,.\,y - R\cos\sigma\,.\,z$$
$$M\,m = R\cos\varrho\,.\,z - R\cos\tau\,.\,x$$
$$N\,n = R\cos\sigma\,.\,x - R\cos\varrho\,.\,y.$$

Multiplicirt man die erste der drei Gleichungen mit $X = R\cos\varrho$, die zweite mit $Y = R\cos\sigma$, die dritte mit $Z = R\cos\tau$ und addirt darauf die Gleichungen, so erhält man:

$$L\,l\,.\,X + M\,m\,.\,Y + N\,n\,.\,Z = 0 \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

als einzige Bedingung für die Vereinigung von $Q\,q$ und R.

In Nr. 18 der Uebungen des zweiten Abschnitts soll eine Formel für $\cos\varepsilon$ abgeleitet werden, unter ε den Winkel verstanden, den zwei Linien miteinander bilden, deren jede für sich mit den Coordinatenachsen den Winkel ϱ, σ, τ; λ, μ, ν bildet. In Anwendung dieser Formel auf den vorliegenden Fall erhalten wir den Winkel, welchen R mit der Paarachse bildet, durch die Gleichung:

$$\cos\varepsilon = \cos\varrho\,.\,\cos\lambda + \cos\sigma\,.\,\cos\mu + \cos\tau\,.\,\cos\nu$$
$$= \frac{X}{R}\cdot\frac{L\,l}{Q.q} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{M\,m}{Q\,q} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{N\,n}{Q\,q}\,.$$

Nimmt man ε gleich $90°$, $\cos\varepsilon$ also gleich Null, so ergiebt sich hieraus die Bedingung der Vereinigung von R und $Q\,q$ zu einer Gesammtresultante R, wie wir sie eben in $F.$ 90 gefunden.

Zur Berechnung der Coordinaten x, y, z des Angriffspunktes der Gesammtresultante dienen die aufgestellten Gleichungen:

$$R\,y\cos\tau - R\,z\cos\sigma = L\,l = \Sigma P_1\,(y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1)$$
$$R\,z\cos\varrho - R\,x\cos\tau = M\,m = \Sigma P_1\,(z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1)$$
$$R\,x\cos\sigma - R\,y\cos\varrho = N\,n = \Sigma P_1\,(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1).$$

Diese drei Gleichungen sind abhängig von einander, was durch Formel (89) dargethan ist, weshalb nur zwei derselben für die Entwickelung zu benutzen sind. Wir nehmen die beiden letzten Gleichungen:

$$Mm = Rz \cos\varrho - Rx \cos\tau = Xz - Zx$$
$$Nn = Rx \cos\sigma - Ry \cos\varrho = Yx - Xy,$$

welche die Richtung der Resultante R im Raume bestimmen, da die erste derselben die Projection der Richtungslinie auf die XZ-Ebene, die zweite die Projection auf die XY-Ebene vorstellt. Hierbei ist zu beachten, daß jeder Punkt dieser Richtungslinie als Angriffspunkt der Resultante R gelten kann.

Das vollkommene Gleichgewicht ist durch die Gleichungen

$$R = 0 \text{ und } Qq = 0$$

bestimmt, welche, in ihre Componenten aufgelöst, für diesen allgemeinsten Fall sechs Gleichgewichtsbedingungen, und zwar drei für fortschreitende und drei für drehende Bewegung, liefern:

$$\left.\begin{array}{lll} X = 0; & Y = 0; & Z = 0 \\ Ll = 0; & Mm = 0; & Nn = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

Für den Fall, daß sämmtliche gegebene Kräfte parallel laufen, setzen wir, wie oben bei der Untersuchung in der Ebene, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots \alpha$; $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots \beta$; $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots \gamma$ und erhalten dann ebenso wieder

$$\left.\begin{array}{c} R = \Sigma P_1 \\ \varrho = \alpha,\ \sigma = \beta,\ \tau = \gamma \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

d. h. die Resultante praralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe derselben und mit ihnen parallel laufend. Weiter haben wir:

$$Ll = \cos\gamma \,.\, \Sigma P_1 y_1 - \cos\beta \,.\, \Sigma P_1 z_1$$
$$Mm = \cos\alpha \,.\, \Sigma P_1 z_1 - \cos\gamma \,.\, \Sigma P_1 x_1$$
$$Nn = \cos\beta \,.\, \Sigma P_1 x_1 - \cos\alpha \,.\, \Sigma P_1 y_1.$$

Das resultirende Kräftepaar Qq liegt hier mit R immer in derselben Ebene, da die ursprünglichen Kräftepaare $P_1 p_1$, $P_2 p_2$, $P_3 p_3 \ldots$ in Ebenen liegen, welche die Richtung der Resultante, in O wirksam, zur gemeinschaftlichen Durchschnittslinie haben. Es ergiebt sich deshalb, mit x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Gesammtresultante R bezeichnend, aus $Qq = Rr$:

$$Ll = Ry \cos\gamma - Rz \cos\beta$$
$$Mm = Rz \cos\alpha - Rx \cos\gamma$$
$$Nn = Rx \cos\beta - Ry \cos\alpha.$$

Von diesen drei Gleichungen, die wieder von einander abhängig sind, benutzen wir die beiden letzten Gleichungen allein, und erhalten, für Mm und Nn die entsprechenden Werthe gesetzt:

$$\cos\alpha\,(\Sigma P_1 z_1 - Rz) + \cos\gamma\,(Rx - \Sigma P_1 x_1) = 0$$
$$\cos\beta\,(\Sigma P_1 x_1 - Rx) + \cos\alpha\,(Ry - \Sigma P_1 y_1) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen werden für jeden beliebigen Werth von α, β, γ erfüllt, wenn wir

$$\left.\begin{array}{l} R\,x = \Sigma P_1\,x_1 \\ R\,y = \Sigma P_1\,y_1 \\ R\,z = \Sigma P_1\,z_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

setzen. Demnach giebt es für parallele Kräfte einen durch diese drei Gleichungen bestimmten unveränderlichen Punkt in dem System, durch welchen die Resultante R der gegebenen Kräfte jederzeit geht, solange die Kräfte selbst unter sich parallel bleiben, dieselben mögen sonst ihre Lage zu dem Coordinatensystem in beliebiger Weise ändern. Dieser einzige, von der Richtung der gegebenen parallelen Kräfte unabhängige Angriffspunkt ihrer Resultante, heißt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Das Product aus einer Kraft in die normale Entfernung ihres Angriffspunktes von einer Ebene heißt das Moment der Kraft für diese Ebene, und darnach enthalten die Formeln 93 das Gesetz: das Moment der Mittelkraft paralleler Kräfte, für irgend eine beliebige Ebene, ist gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräfte für dieselbe Ebene.

Aus 93 berechnen wir die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte und setzen dabei für R den entwickelten Werth ΣP_1:

$$x = \frac{\Sigma P_1\,x_1}{\Sigma P_1};\; y = \frac{\Sigma P_1\,y_1}{\Sigma P_1};\; z = \frac{\Sigma P_1\,z_1}{\Sigma P_1} \quad \ldots \quad (94)$$

d. h. der Abstand des Mittelpunktes paralleler Kräfte von irgend einer Ebene ist gleich der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräfte in Bezug auf diese Ebene, dividirt durch die algebraische Summe dieser Kräfte.

Geht eine Ebene durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte, so muß für diese $x = y = z = 0$, also

$$\Sigma P_1\,x_1 = \Sigma P_1\,y_1 = \Sigma P_1\,z_1 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (95)$$

sein, und umgekehrt, eine Ebene, für welche die algebraische Summe der Momente paralleler Kräfte gleich Null ausfällt, geht durch den Mittelpunkt des Systems.

Das vollkommene Gleichgewicht ist durch die Gleichungen $R = 0$ und $Q\,q = 0$ gegeben. Die erste der Gleichungen $R = \Sigma P_1 = 0$ zeigt, daß die algebraische Summe der Kräfte Null sein muß; die zweite Bedingung $Q\,q = 0$, aus den drei Kräftepaaren $L\,l = 0$, $M\,m = 0$, $N\,n = 0$ bestehend, läßt sich durch geschickte Annahme des Coordinatensystems vereinfachen. Zu dem Ende legen wir die Z-Achse den Kraftrichtungen parallel, dann verschwinden die Glieder mit $\cos\alpha$ und $\cos\beta$, da α und β gleich 90° sind; und wir erhalten aus den drei Gleichungen die folgenden zwei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma P_1\,x_1 = 0$$
$$\Sigma P_1\,y_1 = 0,$$

d. h. die algebraische Summe der Momente der Kräfte gleich Null für zwei sich schneidende den Kräften parallele Ebenen.

Die oben entwickelten sechs Gleichgewichtsbedingungen für beliebig gerichtete Kräfte im Raum reduciren sich demnach für parallele Kräfte auf drei, nämlich:

$$\Sigma P_1 = 0; \; \Sigma P_1 x_1 = 0; \; \Sigma P_1 y_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (96)$$

von denen die erste sich auf fortschreitende Bewegungen, die beiden anderen aber auf drehende Bewegungen beziehen.

Erhält ΣP_1 einen bestimmten Werth, werden dagegen $\Sigma P_1 x_1$ und $\Sigma P_1 y_1$ zu Null, so ist der beliebig gewählte Coordinaten-Anfangspunkt O, in dem ΣP_1 wirksam, Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Ist dagegen ΣP_1 gleich Null, während ein Drehungsbestreben besteht, so haben die parallelen Kräfte keinen Mittelpunkt.

Waren sämmtliche parallele Kräfte nach derselben Richtung wirksam, so kann niemals Gleichgewicht, aber auch kein Drehungsbestreben stattfinden, es gelten dann also jederzeit die zur Berechnung der Resultante R aufgestellten Gleichungen (92) und (93), und der Angriffspunkt der Mittelkraft ist jederzeit Mittelpunkt des Systems.

Sind in dem letzten Falle sämmtliche Kräfte gleich P, so ergiebt sich:

$$R = \Sigma P_1 = n P$$

$$x = \frac{\Sigma x_1}{n}; \; y = \frac{\Sigma y_1}{n}; \; z = \frac{\Sigma z_1}{n}$$

und der Mittelpunkt paralleler Kräfte wird zum Mittelpunkt der mittleren Abstände.

39 Die erhaltenen Gleichgewichtsbedingungen sind unter der Voraussetzung entwickelt worden, daß wir es mit einem vollkommen freien, absolut festen Körper zu thun hatten. Es treten hierin jedoch auch dann keine Veränderungen ein, es bleiben also die entwickelten Resultate brauchbar, wenn einzelne Punkte oder Theile des Systems gewissen Bedingungen genügen müssen. Hierher gehören: a) Gewisse Punkte eines Systems behalten von einander einen bestimmten Abstand. b) Vollkommen glatte, feste Curven oder Oberflächen sollen dem Körper an bestimmter Stelle zur Unterstützung dienen. c) Gegebene Theile des Systems müssen bei vollkommen glatter Oberfläche jederzeit miteinander in Berührung bleiben. In allen solchen Fällen bestehen sogenannte Verbindungen in dem System, die man jederzeit durch Kräfte ersetzen kann, welche also dasselbe zwingen, den betreffenden Bedingungen zu genügen. Sollen zwei Punkte stets dieselbe Entfernung behalten, so sind in der Verbindungslinie derselben zwei gleich große entgegengesetzt wirkende Kräfte statt der festen Verbindung anzubringen; soll sich ein Punkt auf einer vollkommen glatten festen Curve oder Oberfläche bewegen, so kann diese durch eine normale Reaction vollkommen ersetzt werden; sollen sich endlich zwei Theile des Systems bei vollkommen glatter Oberfläche jederzeit berühren, so kann man normal zur gemeinschaftlichen Berührungsebene zwei gleich große entgegen-

gesetzt wirksame Kräfte anbringen, welche einmal die Entfernung der beiden Theile, dann aber auch das Ineinanderdringen derselben zu verhindern haben. Werden in jedem besonderen Falle diese angedeuteten Kräfte eingeführt, so ist das System materieller Punkte wieder vollkommen frei geworden, und die gefundenen Gleichgewichtsbedingungen sind darauf anwendbar. In diesen finden sich die benutzten Reactionen als unbekannte Größen, welche, wenn ihre Zahl die der Gleichgewichtsbedingungen nicht überschreitet, im Allgemeinen daraus entwickelt werden können.

Es sei ein fester Punkt U in dem Systeme vorhanden. Man wähle diesen als Coordinaten-Anfangspunkt, so ist er zugleich Angriffspunkt der Resultante R der n Kräfte und vernichtet durch seine Eigenschaft als fester Punkt die Mittelkraft. Das resultirende Kräftepaar $Q\,q$ besteht jedoch, da der Punkt U ein fester bleibt, wenn die Drehungsachse durch ihn geht. Für diese Annahme sind also die Gleichgewichtsbedingungen der n wirksamen Kräfte

$$Q\,q = 0,$$

oder die Paarcomponenten in den Coordinatenebenen gesetzt:

$$\begin{aligned} L\,l &= 0 \text{ für die } YZ\text{-Ebene},\\ M\,m &= 0 \quad » \quad » \quad XZ\text{-Ebene},\\ N\,n &= 0 \quad » \quad » \quad XY\text{-Ebene}. \end{aligned}$$

Der Widerstand des festen Punktes U oder der darauf ausgeübte Druck ist gleich der Resultante R der darauf wirksamen Kräfte.

Es seien zwei feste Punkte U und V vorhanden. Die Verbindungslinie $U\,V$ ist dadurch als feste Linie im Systeme gegeben, deren Punkte also sämmtlich feste sind. Man wähle U als Coordinaten-Anfangspunkt, die Linie $U\,V$ als die Z-Achse. Die Resultante der n Kräfte wird durch den Widerstand in U aufgehoben, weshalb nur noch die drei Kräftepaare $L\,l$, $M\,m$, $N\,n$ übrig bleiben. Die Linie $U\,V$ ist eine feste, und als eine solche muß sie Drehungsachse des Systems sein, d. h. die Kräftepaare in den Ebenen XZ und YZ werden durch die Linie selbst aufgehoben, da diese Paare eine Entfernung der Punkte aus der Linie bewirken wollen. Für diese Annahme bleibt daher nur eine der sechs Gleichgewichtsbedingungen durch die vorhandenen Kräfte zu erfüllen. Es muß nämlich für den Fall des Gleichgewichts die Summe der statischen Momente der Kräfte, für die durch die festen Punkte gehende Linie, als Achse, gleich Null sein, d. h. für unsere Annahme in der $X\,Y$-Ebene $\qquad N\,n = 0$

oder $\qquad \Sigma\, P_1\,(x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1) = 0.$

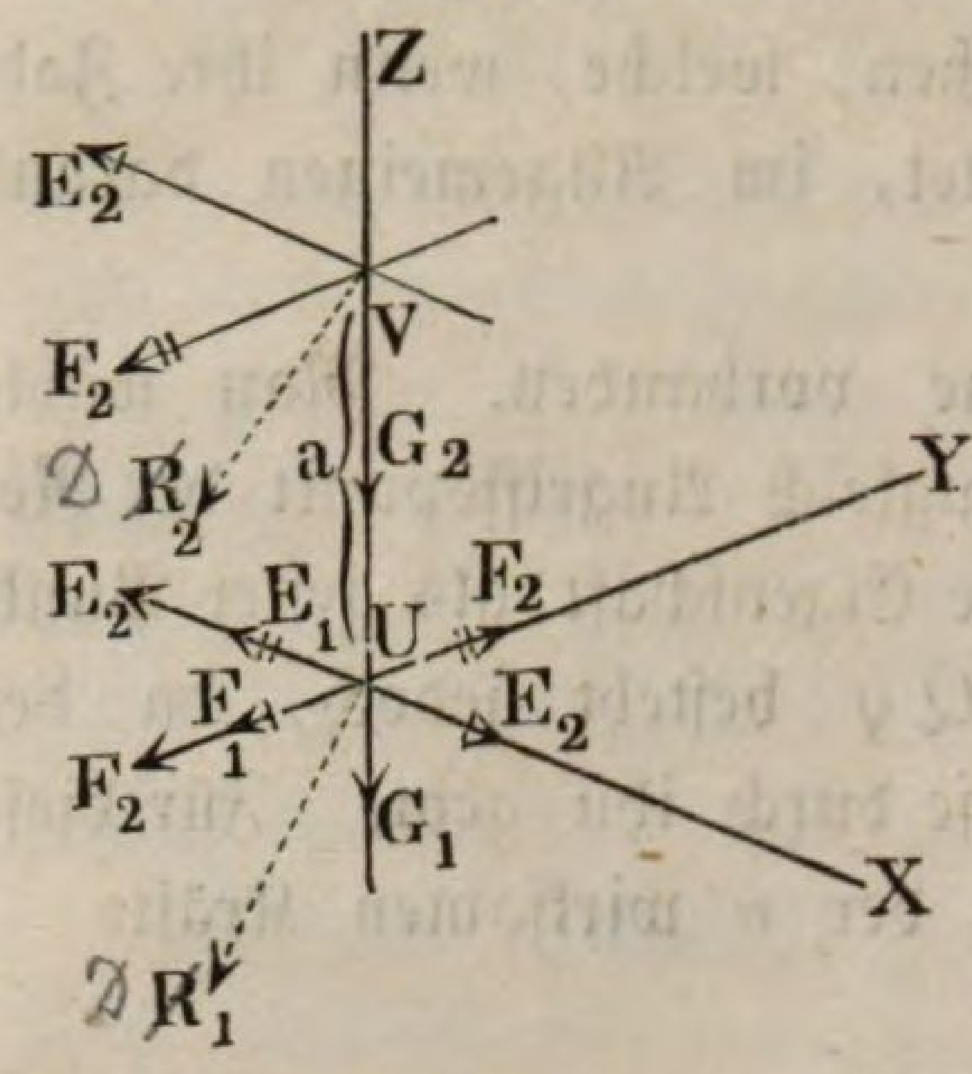
Ist es dem Körper gestattet, längs der festen Achse zu gleiten, so werden nur die zu derselben normalen Kräfte $\Sigma\, P_1 \cos\alpha_1$ und $\Sigma\, P_1 \cos\beta_1$ aufgehoben; in Betreff der Drehung tritt keine Aenderung ein.

Wir haben deshalb in diesem Falle zwei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma\, P_1 \cos\gamma_1 = 0,$$
$$\Sigma\, P_1\,(x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1) = 0.$$

Die Reactionen der beiden festen Punkte U und V (Fig. 79) seien D_1 und D_2. Man zerlege dieselben nach Richtung der Coordinatenachsen in die Reactionen E_1, F_1, G_1 und E_2, F_2, G_2. Die des Punktes V bringe man an den Coordinaten-Anfangspunkt, wodurch sich nach §. 36a. drei Kräftepaare von selbst bilden, die in den Coordinatenebenen liegen. Die Entfernung der beiden Punkte sei a. Die sechs Gleichgewichtsbedingungen sind demnach:

Fig. 79.



$$\Sigma P_1 \cos \alpha_1 - E_1 - E_2 = 0,$$
$$\Sigma P_1 \cos \beta_1 - F_1 - F_2 = 0,$$
$$\Sigma P_1 \cos \gamma_1 - G_1 - G_2 = 0,$$
$$N n = 0 \text{ für die } XY\text{-Ebene},$$
$$M m + E_2 . a = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad XZ\text{-Ebene},$$
$$L l - F_2 . a = 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad YZ\text{-Ebene}.$$

Hieraus erhält man:

$$G_1 + G_2 = \Sigma P_1 \cos \gamma_1,$$
$$E_1 = \frac{M m + a \Sigma P_1 \cos \alpha_1}{a},$$
$$E_2 = -\frac{M m}{a},$$
$$F_1 = \frac{a \Sigma P_1 \cos \beta_1 - L l}{a},$$
$$F_2 = \frac{L l}{a}.$$

Die Drucke normal zur Achse sind also vollständig bestimmt, während für die in Richtung derselben nur die Summe $G_1 + G_2$ gefunden werden kann, für die Voraussetzung, daß das System vollkommen fest ist.

Liegen die gegebenen Kräfte in Ebenen, normal zur Drehungsachse UV, so ist $\gamma = 90°$, $\cos \gamma = 0$. Für diesen Fall hat man:

$$G_1 + G_2 = 0,$$

d. h. die Drehachse erleidet in ihrer Richtung keinen Druck:

$$E_1 = \frac{\Sigma P_1 z_1 \cos \alpha_1 + a \Sigma P_1 \cos \alpha_1}{a},$$
$$E_2 = -\frac{\Sigma P_1 z_1 \cos \alpha_1}{a},$$
$$F_1 = \frac{a \Sigma P_1 \cos \beta_1 + \Sigma P_1 z_1 \cos \beta_1}{a},$$
$$F_2 = -\frac{\Sigma P_1 z_1 \cos \beta_1}{a}.$$

Finden sich in dem System mehr als zwei feste Punkte, so sind die Drucke auf dieselben, bei Annahme eines vollkommen festen Systems, immer unbestimmt. In der Praxis wird sich die natürliche Form des Körpers durch Einwirkung der Kräfte stets ändern, es besteht also kein vollkommen festes System. Die Bedingungen dieser Veränderungen werden im Verein mit den Gleichgewichtsbedingungen stets bestimmte Resultate für die auf die festen Punkte ausgeübten Drucke ergeben.

Es seien in dem System drei feste Punkte U, V, W, die nicht in gerader Linie liegen, gegeben, oder auch beliebig viele feste Punkte.

Für diese Annahme wird jederzeit Gleichgewicht bestehen, in welcher Weise auch die vorhandenen Kräfte wirken. Die Drucke auf die festen Punkte sind jedoch so lange unbestimmt, so lange man die Vorstellung eines vollkommen festen Systems beibehält.

Ein festes System von materiellen Punkten sei durch eine feste Ebene in beliebig vielen Punkten gestützt. Die Ebene sei die XY-Ebene; sie kann an den Berührungspunkten Reactionen erzeugen, die sämmtlich nach derselben Richtung wirken und normal zur XY-Ebene, also parallel der Z-Achse sind. Soll Gleichgewicht bestehen, so dürfen die an dem System wirksamen Kräfte in Richtung der beiden Achsen X und Y keine Wirkung äußern, ebenso muß das Drehungsbestreben um die Z-Achse aufgehoben sein. Die Gleichgewichtsbedingungen sind demnach:

$$\Sigma P_1 \cos \alpha_1 = 0,\ \Sigma P_1 \cos \beta_1 = 0,$$
$$N n = 0.$$

Wenn die parallelen Reactionen zu einer Resultante vereinigt werden, so ist diese gleich der Summe derselben, wirkt nach derselben Richtung, und ihr Angriffspunkt muß innerhalb des convexen Polygons liegen, das sämmtliche Berührungspunkte umfaßt. Hieraus folgt, daß die Resultante aus $\Sigma P_1 \cos \gamma_1$, $M m$ und $L l$ ihren Angriffspunkt ebenfalls im Innern dieses Polygons haben muß und das Bestreben äußert, das System von Punkten gegen die Ebene zu drücken.

Zur Bestimmung der Drucke auf die einzelnen Berührungspunkte haben wir, unter $D_1, D_2 \ldots$ die Reactionen, unter $w_1, v_1, w_2, v_2 \ldots$ die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in der XY-Ebene verstanden:

$$\Sigma D_1 = \Sigma P_1 \cos \gamma_1,$$
$$\Sigma D_1 w_1 = M m,$$
$$\Sigma D_1 v_1 = L l.$$

Da wir zur Bestimmung der Reactionen nur drei Gleichungen haben, so ist ersichtlich, daß dieselben unbestimmt sein werden, sobald mehr als drei Berührungspunkte vorhanden sind. Diese Unbestimmtheit tritt gleichfalls ein, wenn die drei Berührungspunkte sich auf derselben geraden Linie befinden, was durch die Annahme eines vollkommen festen Systems bedingt ist. Liegen die Berührungspunkte sämmtlich auf einer geraden Linie, so liegt auch der Angriffspunkt der Resultante in derselben. Ist nur ein Berührungspunkt vorhanden, so muß durch ihn die Richtung der Resultante gehen.

40 In §. 27 haben wir unter Nr. 4 ein allgemeines Gesetz gefunden, nach welchem für Kräfte an einem Punkte sich das Gleichgewicht durch die Bedingung ausdrückt: „die algebraische Summe der virtuellen Momente dieser Kräfte ist für jede beliebige, unendlich kleine Verschiebung gleich Null." Dieses Gesetz, welches, wenn man die Verschiebungen nach einander in Richtung der drei Coordinatenachsen vornimmt, die in §. 25 gefundenen drei Gleichgewichtsbedingungen liefert, läßt sich in gleicher Weise auf jeden beliebigen Körper, der von beliebig vielen und beliebig gerichteten Kräften angegriffen wird, in Anwendung bringen. Zu dem Ende denken wir die einzelnen materiellen Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$ durch feste starre Linien, die also keiner Veränderung in ihrer Länge fähig sind, oder durch unausdehnbare, vollkommen biegsame Fäden mit einander verbunden, behandeln also zugleich den Fall eines festen starren Körpers, sowie den eines Systems von materiellen Punkten, denen eine gewisse gegenseitige Bewegung gestattet ist, wodurch das System andere und andere Formen annehmen kann, die Entfernung je zweier benachbarten Punkte dabei aber unter allen Umständen unveränderlich bleibt. Die Kräfte, welche in den einzelne Punkten wirksam sind und sich das Gleichgewicht halten sollen, seien $P_1, P_2, P_3 \ldots$ Es ist leicht ersichtlich, daß bei der gegenseitigen Aufhebung dieser Kräfte in den Verbindungslinien, resp. in den Verbindungsfäden je zweier benachbarter Punkte innere Kräfte hervorgerufen werden, welche, in Richtung dieser Verbindungen wirksam, sich einer Aenderung der unveränderlich angenommenen Entfernung widersetzen. Diese inneren Kräfte denken wir für jeden einzelnen Punkt durch eine Resultante ersetzt und bezeichnen diese für die einzelnen Punkte mit $F_1, F_2, F_3 \ldots$ Das verlangte Gleichgewicht erfordert nun, daß die in den einzelnen Punkten wirksamen Kräfte und hervorgerufenen Widerstände einander selbst das Gleichgewicht halten, was nach §. 27 aber nur dann der Fall ist, wenn die algebraische Summe der virtuellen Momente dieser Kräfte für jede beliebige unendlich kleine Verschiebung des betreffenden Punktes zu Null wird. Nehmen wir deshalb mit dem Systeme materieller Punkte eine derartige Verschiebung vor, und bezeichnen die auf die Kraftrichtungen $P_1, P_2, P_3 \ldots$ projicirten unendlich kleinen Wege der Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$ mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$, dagegen die Projectionen derselben Wege auf die Widerstände $F_1, F_2, F_3 \ldots$ mit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots$, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung bei n materiellen Punkten n Gleichungen von folgender Form:

$$P_1 \sigma_1 + F_1 \varphi_1 = 0,$$
$$P_2 \sigma_2 + F_2 \varphi_2 = 0,$$
$$P_3 \sigma_3 + F_3 \varphi_3 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert die Gleichgewichtsbedingung für jedes beliebige System von materiellen Punkten, nämlich:

$$\Sigma P_1 \sigma_1 + \Sigma F_1 \varphi_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

wobei also eine gewisse Veränderung der gegenseitigen Abstände der benachbarten Punkte zulässig ist. Unter den unendlich vielen virtuellen Verschiebungen, welche man den einzelnen Punkten eines materiellen Systems ertheilen

kann, ist diejenige besonders bemerkenswerth, bei der die Punkte ihre gegenseitigen Abstände von einander nicht ändern, wo also entweder das System als Ganzes verschoben wird, oder wo überhaupt ein fester starrer Körper vorgelegt ist. In diesem Falle sind z. B. die in der Verbindungslinie $A_1 A_2$ auftretenden Widerstände F' und F'' einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, und werden, da die Länge der Verbindungslinie $A_1 A_2$ für jede beliebige, unendlich kleine Verschiebung unverändert bleiben soll, gleiche virtuelle Momente, jedoch mit entgegengesetzten Zeichen dabei entwickeln müssen. Bei der Addition der oben aufgestellten Gleichungen müssen sich daher die virtuellen Momente der inneren Kräfte, da diese Verhältnisse in jeder Verbindungslinie stattfinden, gegenseitig vernichten, und wir erhalten deshalb als Gleichgewichtsbedingung für jeden festen starren Körper oder für ein beliebiges System von materiellen Punkten, das als Ganzes verschoben wird:

$$\Sigma P_1 \sigma_1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (98)$$

d. h. die algebraische Summe der virtuellen Momente der äußeren Kräfte für jede beliebige unendlich kleine Verschiebung gleich Null.

War das ursprünglich gegebene System nicht vollkommen frei, fanden sich darin feste Punkte, oder standen feste, vollkommen glatte Curven oder Oberflächen damit in Verbindung, so sind diese Verbindungen wieder durch entsprechende Reactionen zu ersetzen, und es findet dann das durch §. 97 ausgesprochene Gesetz auf diese materiellen Systeme Anwendung, wobei in dem Ausdruck $\Sigma P_1 \sigma_1$ auch die virtuellen Momente der Reactionen enthalten sind. Läßt man aber von den unendlich vielen Verschiebungen nur diejenigen zu, welche die vorhandenen Verbindungen bestehen lassen, so verschwinden die virtuellen Momente dieser Reactionen in der herangezogenen Gleichung, da die einzelnen materiellen Punkte eine Verschiebung in Richtung dieser Reactionen nicht erfahren, oder aber entgegengesetzt gerichtete gleiche Kräfte auftreten, deren virtuelle Momente sich jederzeit aufheben. Für diese letzte Annahme haben wir demnach auch für nicht vollkommen freie feste starre Körper oder beliebige Systeme von materiellen Punkten, die als Ganzes verschoben werden:

$$\Sigma P_1 \sigma_1 = 0,$$

wobei die Kräfte, welche zum Ersatz der Verbindungen dienten, nicht mit in Rechnung zu bringen sind:

Ist umgekehrt die Summe der virtuellen Momente der Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$, welche an einem System materieller Punkte wirksam sind, für jede unendlich kleine, den Verbindungen entsprechende Verschiebung gleich Null, so befindet sich das System unter der Einwirkung der Kräfte im Gleichgewicht. Gesetzt, dieses Gleichgewicht findet nicht statt, sondern es tritt bei irgend einer Verschiebung, für welche $\Sigma P_1 \sigma_1 = 0$ ist, Bewegung ein, so läßt sich das Gleichgewicht dadurch herstellen, daß man jeden der materiellen Punkte mit einer Kraft von entsprechender Größe versieht, welche eine der entstandenen Bewegung entgegengesetzte hervorrufen würde. Nennen wir diese Kräfte für

die einzelnen Punkte $O_1, O_2, O_3 \ldots$, die von den Punkten bei der Bewegung zurückgelegten unendlich kleinen, auf die Richtung dieser Kräfte projicirten Wege $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \ldots$, so findet wegen des nun hergestellten Gleichgewichts die Gleichung

$$\Sigma P_1 \sigma_1 + \Sigma O_1 \psi_1 = 0$$

statt. Da aber nach der Voraussetzung $\Sigma P_1 \sigma_1$ bereits gleich 0 ist, so müßte auch

$$\Sigma O_1 \psi_1 = 0 \text{ sein.}$$

Es wirken aber die einzelnen Kräfte $O_1, O_2, O_3 \ldots$ der eintretenden Bewegung entgegen, es sind also die virtuellen Momente $O_1 \psi_1$, $O_2 \psi_2 \ldots$ sämmtlich negativ, weshalb die oben gefundene Gleichung $\Sigma O_1 \psi_1 = 0$ nur dann in Erfüllung gehen kann, wenn wir sämmtliche Kräfte $O_1, O_2, O_3 \ldots$ gleich Null annehmen, also zulassen, daß die Bedingung $\Sigma P_1 \sigma_1 = 0$, dem Gleichgewichtszustand des Systems bereits entspricht.

Aus der allgemein giltigen, einzigen Gleichgewichtsbedingung $\Sigma P_1 \sigma_1 = 0$ finden sich die in §. 91 aufgestellten sechs Bedingungen für das vollkommene Gleichgewicht, wenn wir nach der Reihe Verschiebungen des Systems in Richtung der drei Coordinatenachsen und um dieselben als Drehachsen vornehmen.

Uebungen.

---

1. Zwei Kräfte von 17 und 33 Kilogramm wirken in paralleler Richtung an zwei fest mit einander verbundenen Punkten, die 8^m von einander entfernt sind. Es ist die Resultante und deren Angriffspunkt zu bestimmen:

50 Kilogramm; $5{,}28^m$ und $2{,}72^m$.

2. Zwei parallele Kräfte von 12,5 und 25 Kilogramm wirken an zwei fest mit einander verbundenen Punkten nach derselben Richtung. Die Mittelkraft wirkt in einer Entfernung von 4^m von dem Angriffspunkt der Kraft von 12,5 Kilogramm.

Welche Entfernung haben die beiden Kräfte?

6^m.

3. Eine Kraft von 52 Kilogramm soll in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, die nach derselben Richtung wirken,

a. wenn die zu bestimmenden Kräfte um 2 und 3^m von der gegebenen entfernt sind,

b. wenn die eine Seitenkraft gleich 20 Kilogramm werden soll und 2^m von der gegebenen Kraft entfernt ist.

a. 31,2 und 20,8 Kilogramm; b. 32 Kilogramm und $1{,}25^m$.

4. Eine Kraft von 20 Kilogramm soll in zwei parallele Kräfte zerlegt werden, von denen die eine der Kraft von 20 Kilogramm entgegenwirkt,

a. wenn die zu bestimmenden Kräfte 3 und 8^m von der gegebenen entfernt sind,

b. wenn die der Kraft von 20 Kilogramm entgegenwirkende Kraft gleich 30 Kilogramm ist und 6^m von der gegebenen entfernt liegt.

a. 32 und 12 Kilogramm; b. 50 Kilogramm und $3{,}6^m$.

5. Es ist ein festes System von fünf materiellen Punkten durch die folgenden Coordinaten gegeben: $x_1 = 5$, $y_1 = 10$; $x_2 = 9$, $y_2 = 12$; $x_3 = 17$, $y_3 = 14$; $x_4 = 20$, $y_4 = 13$; $x_5 = 15$, $y_5 = 8$. Die daran wirksamen Kräfte sind der Reihe nach: 50, 30, 70, 90, 120 Kilogramm. Die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit den Coordinatenachsen bilden, seien: $\alpha_1 = 70^\circ$, $\beta_1 = 20^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$, $\beta_2 = 150^\circ$; $\alpha_3 = 120^\circ$, $\beta_3 = 30^\circ$; $\alpha_4 = 150^\circ$,

$\beta_4 = 120°$; $\alpha_5 = 90°$, $\beta_5 = 0°$. Es ist die Resultante der Größe und Richtung nach zu bestimmen:

$$X = 50.cos 70 + 30.cos 60 + 70.cos 120 + 90.cos 150 + 120.cos 90 = -80{,}842,$$

$$Y = 50.cos 20 + 30.cos 150 + 70.cos 30 + 90.cos 120 + 120.cos 0 = +156{,}626,$$

$$R = \sqrt{80{,}842^2 + 156{,}626^2} = 176{,}259 \text{ Kilogramm},$$

$$cos\,\varrho = -\frac{80{,}842}{176{,}259};\ cos\,\sigma = \frac{156{,}626}{176{,}259}, \text{ daher } \varrho = 117°18'1''$$

$$\sigma = 27°18'1''.$$

$Nn = \Sigma P_1 (y_1\ cos\ \alpha_1 - x_1\ cos\ \beta_1) = 50 . cos\ 70 . 10 + 30 . cos\ 60 . 12 + 70 . cos\ 120 . 14 + 90 . cos\ 150 . 13 - 50 . cos\ 20 . 5 - 30 . cos\ 150 . 9 - 70 . cos\ 30 . 17 - 90 . cos\ 120 . 20 - 120 . cos\ 0 . 15 = -3083{,}915 = Rr = -80{,}842 . y - 156{,}626\ x$

$r = 17{,}5$ und $y = -1{,}95\ x + 38{,}14$.

Zur Herstellung des Gleichgewichts müssen wir eine sechste Kraft gleich 176,259 Kilogramm anbringen, welche mit der X-Achse einen Winkel von $62°41'59''$ und mit der Y-Achse einen von $152°41'59''$ bildet.

Zur Bestimmung der Coordinaten x, y des Angriffspunktes hat man die Gleichungen $\Sigma P_1\ cos\ \alpha_1\ y_1 + P_6\ cos\ \alpha_6\ y_6 = 0$ und

$$\Sigma P_1\ cos\ \beta_1\ x_1 + P_6\ cos\ \beta_6\ x_6 = 0$$

$$-1152{,}245 + 80{,}842 . y_6 = 0, \text{ d. h. } y_6 = 14{,}25$$

$$1931{,}670 - 156{,}626 . x_6 = 0, \text{ d. h. } x_6 = 12\tfrac{1}{3}.$$

6. Fünf parallele Kräfte gleich 4, 12, 17, 25 und 60 Kilogramm wirken an fünf Punkten einer geraden Linie, wobei die Kräfte von 12 und 25 Kilogramm den übrigen gerade entgegengesetzt gerichtet sind. Von einem in derselben Linie gegebenen Punkte haben die Angriffspunkte der Kräfte eine Entfernung von 5, 7, 9, 11 und 15^m.

Wo liegt der Angriffspunkt der Resultante und wie groß ist dieselbe?

Resultante . . . . = 44 Kilogr.

Entfernung von dem festen Punkte auf der geraden Linie = $16{,}23^m$.

7. Die Coordinaten des Mittelpunkts der parallelen Kräfte zu finden, die in einer Ebene liegen und folgendermaßen gegeben sind:

$P_1 = 33$ Kilogr. $x_1 = +25$, $y_1 = +13$,
$P_2 = 20$ » $x_2 = -10$, $y_2 = -15$,
$P_3 = -35$ » $x_3 = +15$, $y_3 = -27$,
$P_4 = -72$ » $x_4 = -31$, $y_4 = +17$,
$P_5 = 120$ » $x_5 = +23$, $y_5 = -19$.

$x = 77{,}15^m$ und $y = -36{,}82^m$.

8. Ein Stab von der Länge a ist an seinen beiden Enden unterstützt. Auf denselben wirken drei parallele Kräfte P, Q, R rechtwinkelig zum Stabe, wodurch derselbe in die Abschnitte b, c, d, e getheilt wird. Es sind die Drucke auf die Unterstützungspunkte zu bestimmen:

$$D_1 = \frac{P(a-b) + Q(d+e) + Re}{a},$$

$$D_2 = \frac{R(a-e) + Q\ (b+c) + Pb}{a}.$$

Es sei $P = 400$, $Q = 300$, $R = 500$ Kilogramm; $a = 16$, $b = 2$, $c = 4$ und $d = 6^m$, dann ist: $D_1 = 662{,}5$ Kilogramm, $D_2 = 537{,}5$ Kilogramm.

9. An einem festen System von vier materiellen Punkten wirken vier Kräfte nach beliebigen Richtungen, deren Gesammtwirkung zu bestimmen ist. Die Punkte sind durch ihre Coordinaten x, y, z, die Kräfte durch ihre Größe P, und deren Richtung durch die Winkel α, β, γ mit drei Coordinatenachsen gegeben.

$P_1 =$ 50 Kilogr., $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 40°$, γ_1 spitz, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$,
$P_2 =$ 70 » $\alpha_2 = 65°$, $\beta_2 = 45°$, γ_2 stumpf, $x_2 = 1^m$, $y_2 = 4^m$, $z_2 = 7^m$,
$P_3 =$ 90 » $\alpha_3 = 70°$, $\beta_3 = 50°$, γ_3 spitz, $x_3 = 2^m$, $y_3 = 5^m$, $z_3 = 8^m$,
$P_4 = 120$ » $\alpha_4 = 75°$, $\beta_4 = 55°$, γ_4 stumpf, $x_4 = 3^m$, $y_4 = 6^m$, $z_4 = 9^m$.

Der dritte Winkel bestimmt sich nach der in Nr. 17 der Uebungen des zweiten Abschnitts angegebenen Formel:

$$\cos\gamma^2 = -\cos(\alpha+\beta)\,.\,\cos(\alpha-\beta)$$

$X =$ 116,423 Kilogr., $R = 249{,}325$ Kilogr., $Ll =$ 1838,608,
$Y =$ 214,480 » $\varrho = 62°\ 9'48''$ $Mm = -928{,}947$,
$Z = -51{,}057$ » $\sigma = 30°39'20''$ $Nn =$ 86,903,
$\tau = 101°49'$.

$Qq = 2061{,}789$; $\lambda = 26°54'20''$; $\mu = 116°46'45''$; $\nu = 87°35'4''$.

Gleichgewicht ist nicht vorhanden, daher zu untersuchen, ob sich Qq und R zu einer Gesammtresultante R vereinigen lassen. Zu dem Ende muß $Ll\,.\,X + Mm\,.\,Y + Nn\,.\,Z = 0$ sein. Es ist aber:

$$1838{,}608\,.\,116{,}423 - 928{,}947\,.\,214{,}480 - 86{,}903\,.\,51{,}057 = 10378{,}7$$

und deshalb eine Vereinigung unmöglich.

10. In der vorigen Aufgabe mögen die Coordinaten x_4, y_4, z_4 der Kraft von 120 Kilogramm so umgeändert werden, daß eine Vereinigung zwischen R und Qq möglich werde. Es behalten hierbei X, Y, Z, R, ϱ, σ, τ die berechneten Werthe, dagegen erhalten wir:

$$Ll = 659{,}575 + 68{,}829\,.\,z_4 + 93{,}262\,.\,y_4,$$
$$Mm = -369{,}639 - 93{,}262\,.\,x_4 - 31{,}058\,.\,z_4,$$
$$Nn = 107{,}042 + 31{,}058\,.\,y_4 - 68{,}829\,.\,x_4.$$

Hieraus folgt:

$$(Ll - 659{,}575)\,31{,}058 + (Mm + 369{,}639)\,68{,}829$$
$$= (Nn - 107{,}042)\,93{,}262.$$

$$Ll + 2{,}216\,Mm - 3{,}003\,Nn = -481{,}034 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die zweite Gleichung erhalten wir aus der Bedingung der Vereinigung:

$$Ll\,.\,116{,}423 + Mm\,.\,214{,}480 - Nn\,.\,51{,}057 = 0.$$

$$Ll + 1{,}842\,Mm - 0{,}4386\,Nn = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$0{,}374\,Mm - 2{,}564\,Nn = -481{,}034.$$

Wir behalten den früheren Werth von $Mm = -928{,}947$ bei, substituiren diesen in den vorstehenden Gleichungen und bestimmen dadurch $Nn = 52{,}108$ und $Ll = 1733{,}975$.

Substituiren wir diese Werthe in den obigen Gleichungen für x_4, y_4, z_4, so entsteht:

$$68{,}829\,z_4 + 93{,}262\,y_4 = 1074{,}400$$
$$93{,}262\,x_4 + 31{,}058\,z_4 = 559{,}308$$
$$31{,}058\,y_4 - 68{,}829\,x_4 = -54{,}934,$$

oder, da die drei Gleichungen von einander abhängig sind:

$$x_4 = -0{,}333\,z_4 + 5{,}997$$
$$y_4 = -0{,}738\,z_4 + 11{,}520.$$

Es sind hiernach $z_4 = 0$, $x_4 = 5{,}997$, $y_4 = 11{,}52$ zusammengehörige brauchbare Coordinaten des vierten Punktes.

11. Bei Benutzung der in der vorigen Aufgabe gefundenen Werthe soll die Vereinigung von Qq und R zur Gesammtresultante vorgenommen werden.

Es ist

$R = 249{,}325$ Kilogr.; $\varrho = 62°\,9'\,48''$; $\sigma = 30°\,39'\,20''$; $\tau = 101°\,49'$,
$X = 116{,}423$ Kilogr.; $Y = 214{,}480$ Kilogr.; $Z = -51{,}057$ Kilogr.,
$Ll = 1733{,}975$; $Mm = -928{,}947$; $Nn = 52{,}108$.
$Qq = 1967{,}823$; $\lambda = 28°\,13'$; $\mu = 118°\,10'\,7''$; $\nu = 88°\,28'\,57''$.

Die Coordinaten x, y, z der Resultante bestimmen sich durch die Gleichungen:

$$1733{,}975 = Yz - Zy = 214{,}480 \,.\, z + 51{,}057 \,.\, y,$$
$$-928{,}947 = Zx - Xz = -51{,}057 \,.\, x - 116{,}423 \,.\, z,$$
$$52{,}108 = Xy - Yx = 116{,}423 \,.\, y - 214{,}480 \,.\, x.$$

Aus diesen drei abhängigen Gleichungen erhalten wir:

$$x = -2{,}2802\,z + 18{,}194,$$
$$y = -4{,}2008\,z + 33{,}961.$$

Es sind hiernach $z = 0$, $x = 18{,}194$, $y = 33{,}961$ zusammengehörige brauchbare Coordinaten des Angriffspunktes der Gesammtmittelkraft R.

Gleichgewicht kann hergestellt werden durch eine fünfte Kraft $P_5 = 249{,}325$ Kilogramm, deren Richtung durch die Winkel

$$\alpha_5 = 117°\,50'\,12'',\ \beta_5 = 149°\,20'\,40'',\ \gamma_5 = 78°\,11'$$

bestimmt ist, und welche einen Punkt des festen Systems angreift, dessen Coordinaten $x = 18{,}194$, $y = 33{,}961$, $z = 0$ genommen werden können.

12. Ein festes System von fünf materiellen Punkten, deren Lage durch die folgenden Coordinaten gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0 \\ x_2 = 1,\ y_2 = 2,\ z_2 = 3 \\ x_3 = 2,\ y_3 = 3,\ z_3 = 4 \\ x_4 = 3,\ y_4 = 4,\ z_4 = 5 \\ x_5 = 4,\ y_5 = 5,\ z_5 = 6 \end{array}\right\}$$

werde durch parallele Kräfte von folgender Größe und Richtung angegriffen:

$P_1 = +60$ Kilogr., $P_2 = +70$ Kilogr.,
$P_3 = -90$ Kilogr., $P_4 = -150$ Kilogr.,
$P_5 = +200$ Kilogr.

Es sind die Resultante sowie die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte zu berechnen:

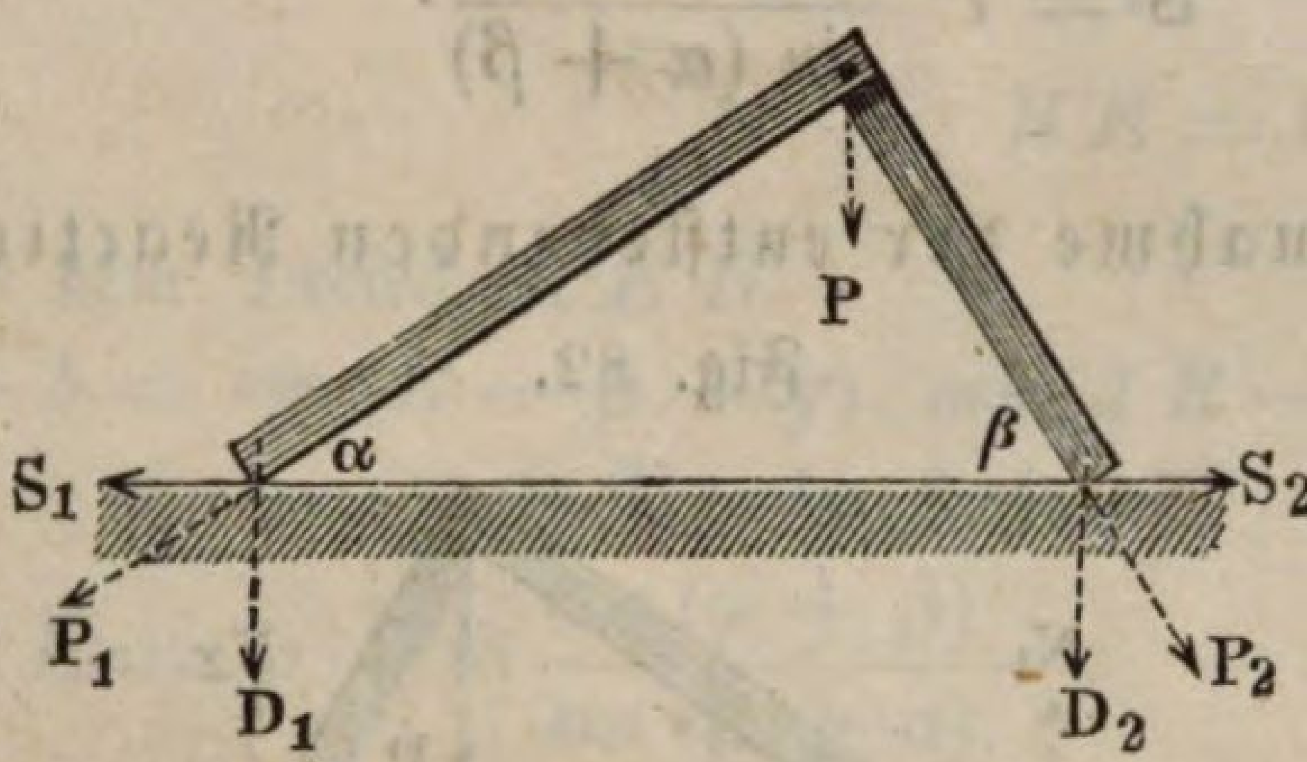
$$R = \Sigma P_1 = 90 \text{ Kilogr.}; \quad 90 . x = \Sigma P_1 x_1 = 240,$$
$$90 . y = \Sigma P_1 y_1 = 270,$$
$$90 . z = \Sigma P_1 z_1 = 300,$$
$$x = {}^8/_3; \; y = 3; \; z = {}^{10}/_3.$$

13. Zwei gewichtslose Stangen von ungleicher Länge sind mit dem einen Ende durch ein Charnier verbunden, während die anderen Enden auf dem Fußboden ruhen, wobei die Richtungen der Stangen in einer zu demselben normalen Ebene liegen und die Winkel α und β bilden. Auf das Charnier wird nach einer zum Fußboden normalen Richtung ein Druck P ausgeübt. Wie groß ist der dadurch ausgeübte Druck auf den Fußboden?

Auflösungen.

a. Durch Zerlegung nach Richtung der Stangen (Fig. 80).

Fig. 80.



$$P_1 = P \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad P_2 = P \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$
$$S_1 = P_1 \cos\alpha = P \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$
$$S_2 = P_2 \cos\beta = P \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

d. h. $S_1 = S_2$.

$$D_1 = P \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad D_2 = P \frac{\sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

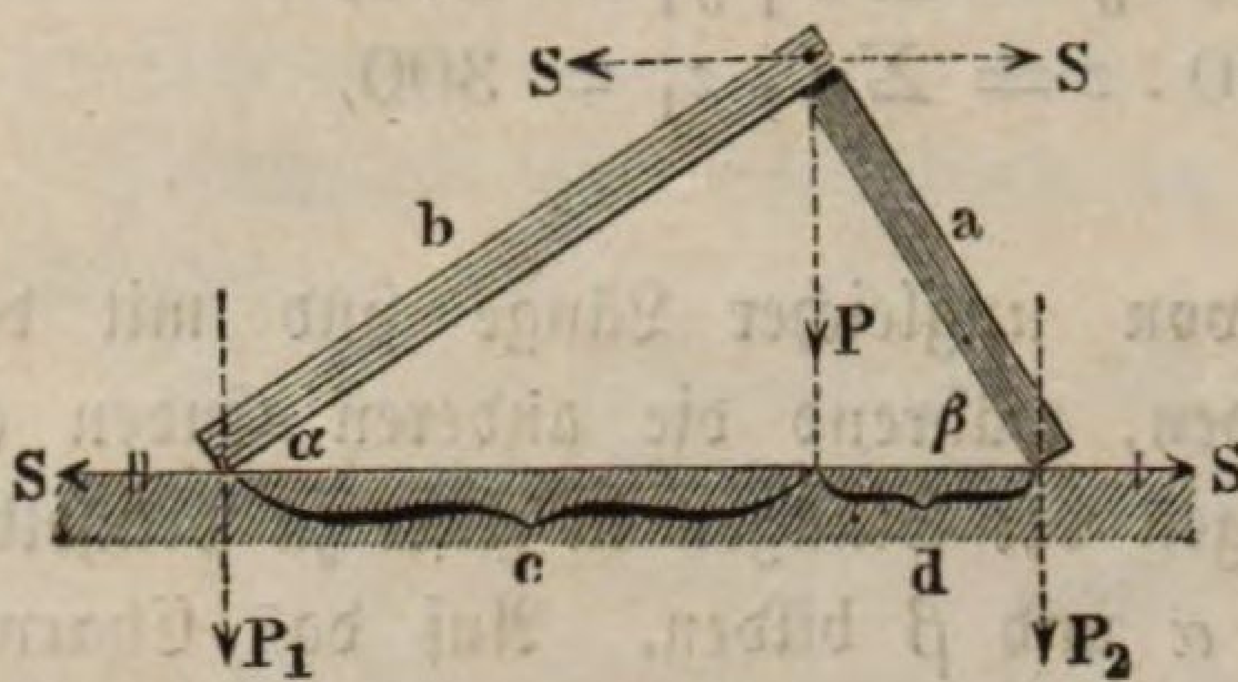
d. h. $D_1 + D_2 = P$.

b. Durch Zerlegung nach paralleler Richtung an die Fußpunkte der Stangen (Fig. 81 a. f. S.).

$$P_1 + P_2 = P$$
$$P_1 c = P_2 d.$$
$$P_1 = P \frac{d}{c+d} = P \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$
$$P_2 = P \frac{c}{c+d} = P \frac{\sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Die dadurch n. §. 36 entstandenen Kräftepaare $+ P_1 c$ und $- P_2 d$ bringen wir auf die gleiche Breite $b \sin \alpha = a \sin \beta$, so werden auch die Kräfte gleich groß, gleich S, und schieben die Paare so, daß zwei der Kräfte der Paare oben im Charnier nach entgegengesetzter Richtung wirken. Diese heben sich auf, ebenso die beiden anderen Kräfte der Paare, im Fußboden wirksam, welche den Schub nach beiden Seiten vorstellen, der also gleich groß ausfällt.

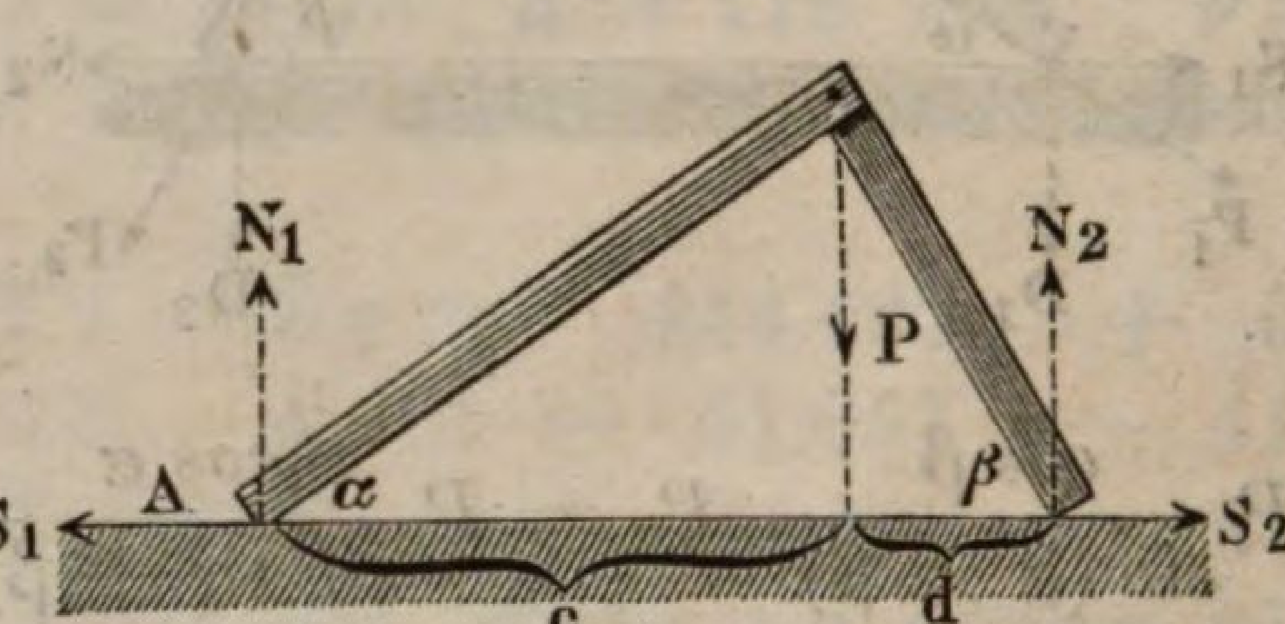
Fig. 81.



$$S\, a \cdot \sin \beta = P_1 c$$
$$= P_1 \frac{a \sin \beta}{tang\, \alpha},$$
$$S = P \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$
$$S = P \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

c. Durch Annahme der entstehenden Reactionen (Fig. 82).

Fig. 82.



Wir sehen A als Coordinaten-Anfangspunkt an, so ist für den Gleichgewichtszustand:

$$P - N_1 - N_2 = 0,$$
$$S_1 - S_2 = 0,$$
$$P c - N_2 (c + d) = 0,$$

d. h. $S_1 = S_2$ und $P = N_1 + N_2$.

$$N_2 = P \frac{c}{c + d} = P \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)},$$
$$N_1 = P \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

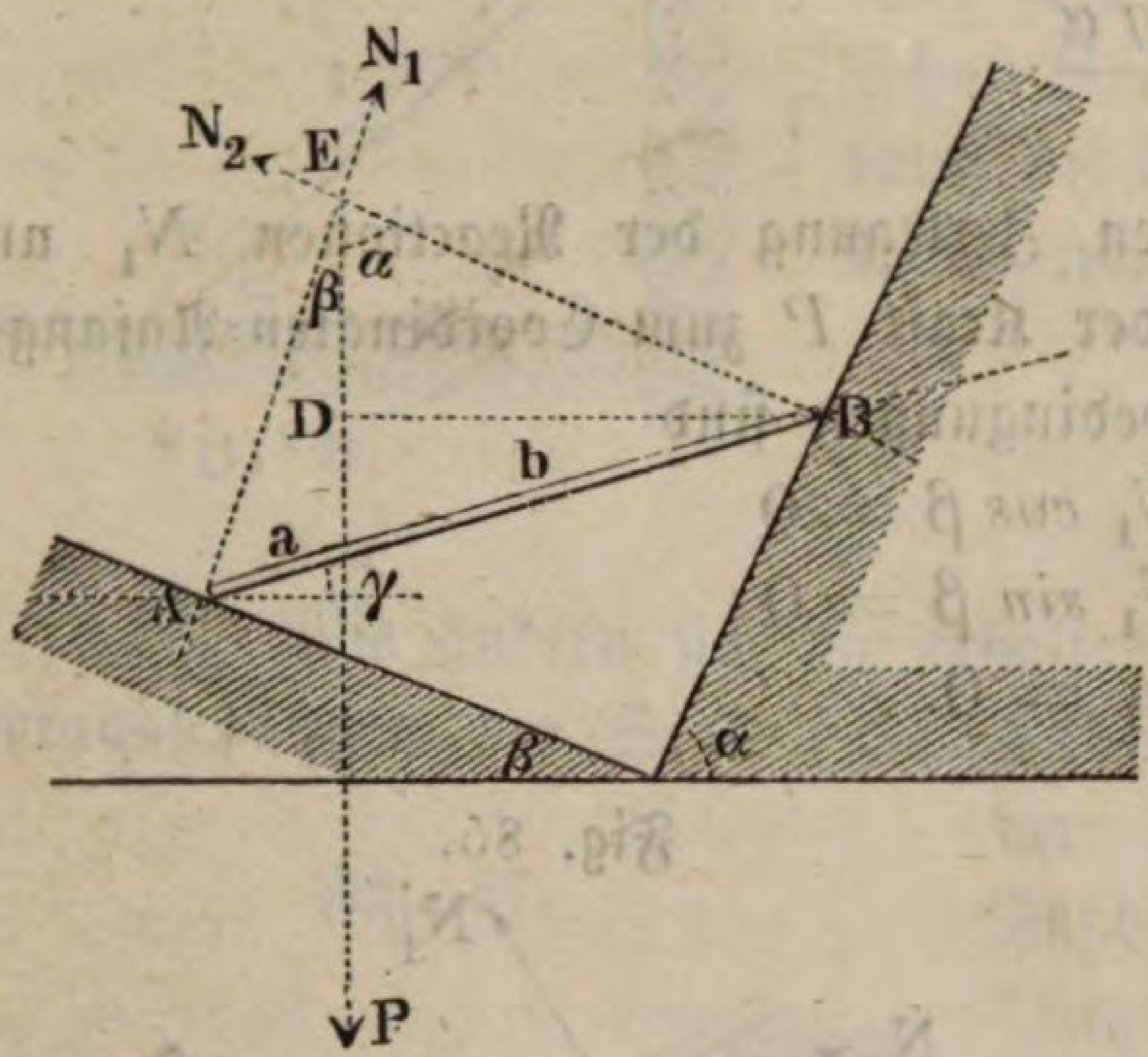
Wollte man den Schub $S = S_1 = S_2$ der Größe nach kennen lernen, so müßte man in gleicher Weise wie in b. verfahren.

14. Eine gerade gewichtslose Stange ruht mit ihren Enden auf zwei vollkommen glatten geneigten Ebenen, für die eine durch die Achse der Stange gelegte Verticalebene rechtwinkelig ausfallen mag. In einem beliebigen Punkte

der Stange wird ein Druck P in einer zur Horizontalebene normalen Richtung ausgeübt. Es ist die Gleichgewichtslage der Stange zu bestimmen.

Erste Auflösung. Die in dem vorliegenden Falle entstehenden Reactionen N_1 und N_2 (Fig. 83) sind in den Endpunkten des Stabes normal zu den geneigten Ebenen anzunehmen, und liegen mit P in der durch die Achse des Stabes gelegten Verticalebene. Wenn die Reactionen die Wirkung des Gewichtes P vernichten sollen, so müssen sich die Richtungen von N_1, N_2 und P in einem Punkte E schneiden. Zu dem Ende ist AE, oder BE, oder der Winkel γ dem Gleichgewichtszustande gemäß zu bestimmen, da die Länge der Stange gleich $a + b$ bekannt ist. $BD = b \cos\gamma = BE \sin\alpha$, d. h.

Fig. 83.



$$BE = b\,\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

Weiter ist aus dem Dreieck AEB

$$BE : a + b = \sin(R - \beta - \gamma) : \sin(2\,R - \alpha - \beta)$$
$$= \cos(\gamma + \beta) : \sin(\beta + \alpha)$$
$$BE = (a + b)\,\frac{\cos(\gamma + \beta)}{\sin(\beta + \alpha)}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für BE gefundenen Werthe erhalten wir:

$$b\,\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha} = (a + b)\,\frac{\cos(\gamma + \beta)}{\sin(\beta + \alpha)}$$
$$b \sin(\beta + \alpha) = (a + b) \sin\alpha\,(\cos\beta - \sin\beta\,\mathrm{tang}\,\gamma)$$
$$\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{-\,b \sin(\beta + \alpha) + (a + b) \sin\alpha \cos\beta}{(a + b) \sin\alpha \sin\beta}$$
$$\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{a\,\mathrm{cotg}\,\beta - b\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{a + b}.$$

Zweite Auflösung. Wir nehmen A als Coordinaten-Anfangspunkt (Fig. 84 a. f. S) und zerlegen die Reactionen N_1 und N_2 nach der Kraftrichtung von P und normal dazu, so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$P \;\; - N_2 \cos\alpha - N_1 \cos\beta = 0$$
$$N_1 \sin\beta - N_2 \sin\alpha = 0$$
$$Pm - N_2\, n = 0.$$

Hieraus folgt:

$$P \;\; - N_2\,\frac{\sin a}{\sin\beta} \cos\beta - N_2 \cos\alpha = 0$$
$$N_2 = P\,\frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \alpha)}$$

$$m = a \cos \gamma;\ n = (a + b) \cos (\gamma - \alpha)$$

$$a P \cos \gamma = P (a + b) \frac{\sin \beta \cos (\gamma - \alpha)}{\sin (\beta + \alpha)}$$

$$a \sin (\beta + \alpha) = (a + b) \sin \beta (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tang} \gamma)$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{a \sin (\beta + \alpha) - (a + b) \sin \beta \cos \alpha}{(a + b) \sin \beta \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{a \operatorname{cotg} \beta - b \operatorname{cotg} \alpha}{a + b}.$$

Dritte Auflösung. Bei derselben Zerlegung der Reactionen N_1 und N_2 wählen wir den Angriffspunkt C der Kraft P zum Coordinaten-Anfangspunkte (Fig. 85). Die Gleichgewichtsbedingungen sind

$$P - N_2 \cos \alpha - N_1 \cos \beta = 0$$

$$N_2 \sin \alpha - N_1 \sin \beta = 0$$

$$- N_2 n_2 + N_1 n_1 = 0.$$

Fig. 84.

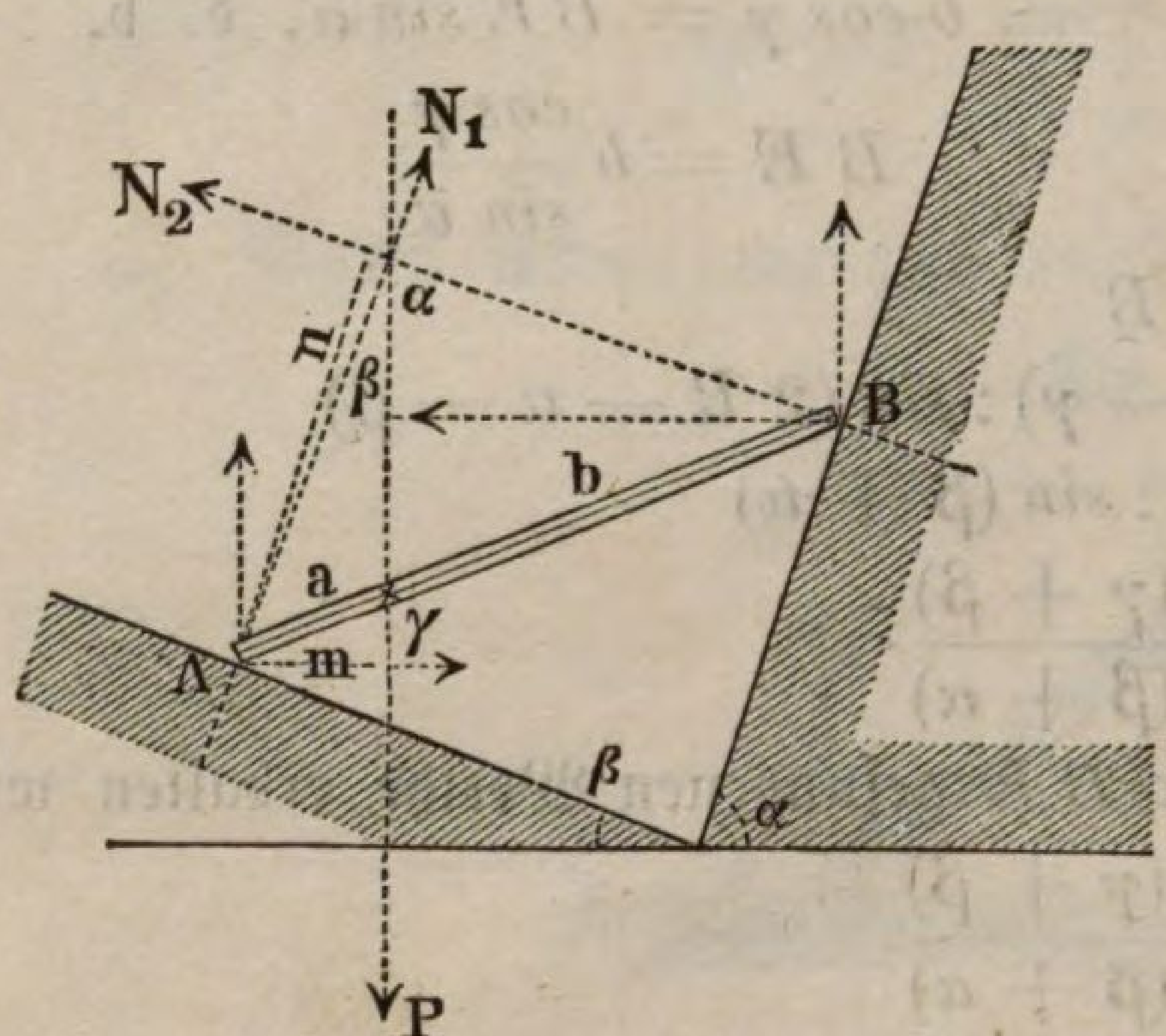
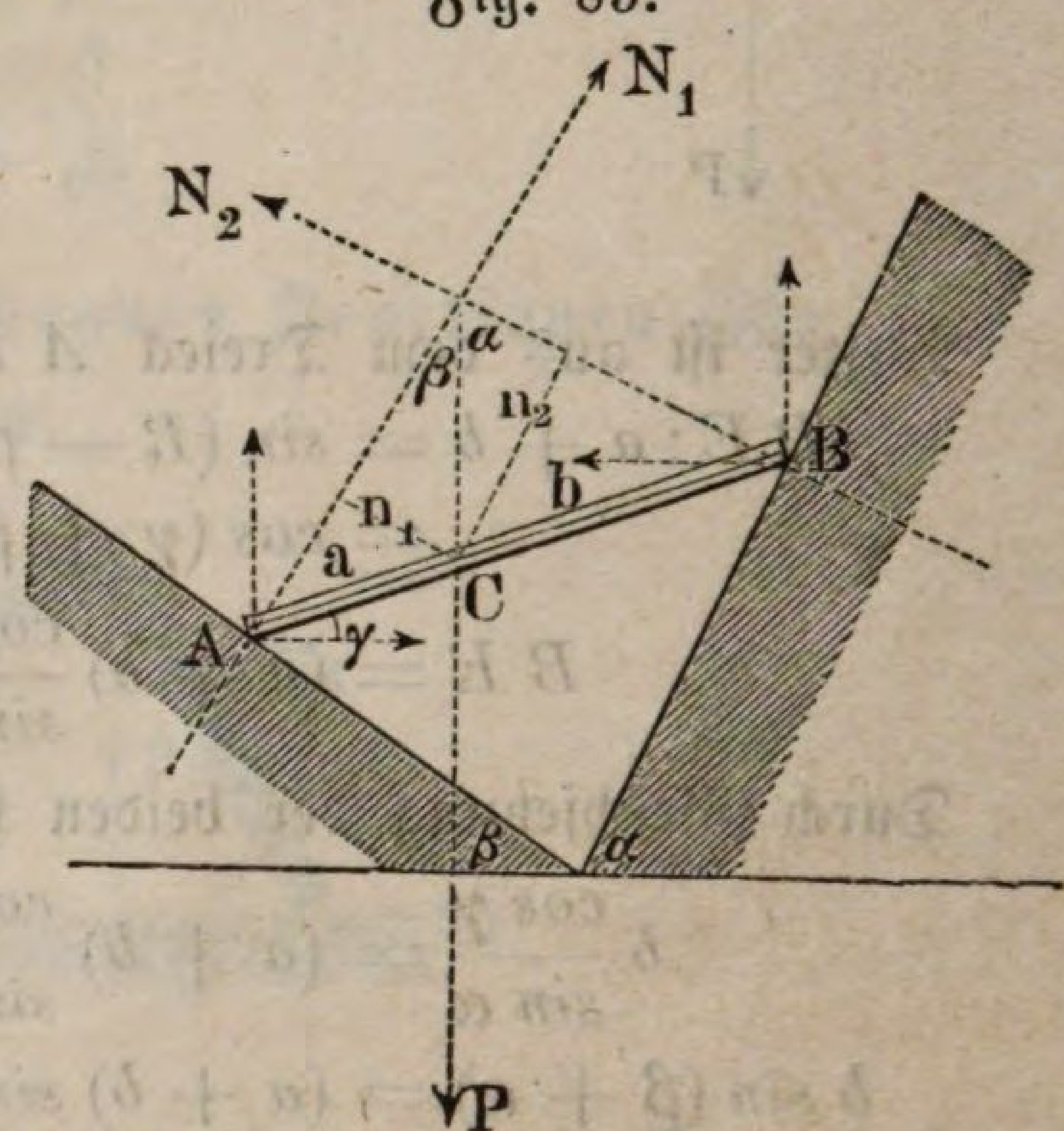


Fig. 85.



Die letzten beiden Gleichungen genügen, die Gleichgewichtslage zu bestimmen.

$$- N_2 n_2 + N_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} n_1 = 0$$

$$n_2 = b \cos (\gamma - \alpha) \text{ und } n_1 = a \cos (\gamma + \beta)$$

$$b \cos (\gamma - \alpha) = a \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos (\gamma + \beta)$$

$$b \sin \beta \cos \alpha + b \sin \beta \sin \alpha \operatorname{tang} \gamma$$

$$= a \sin \alpha \cos \beta - a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{tang} \gamma$$

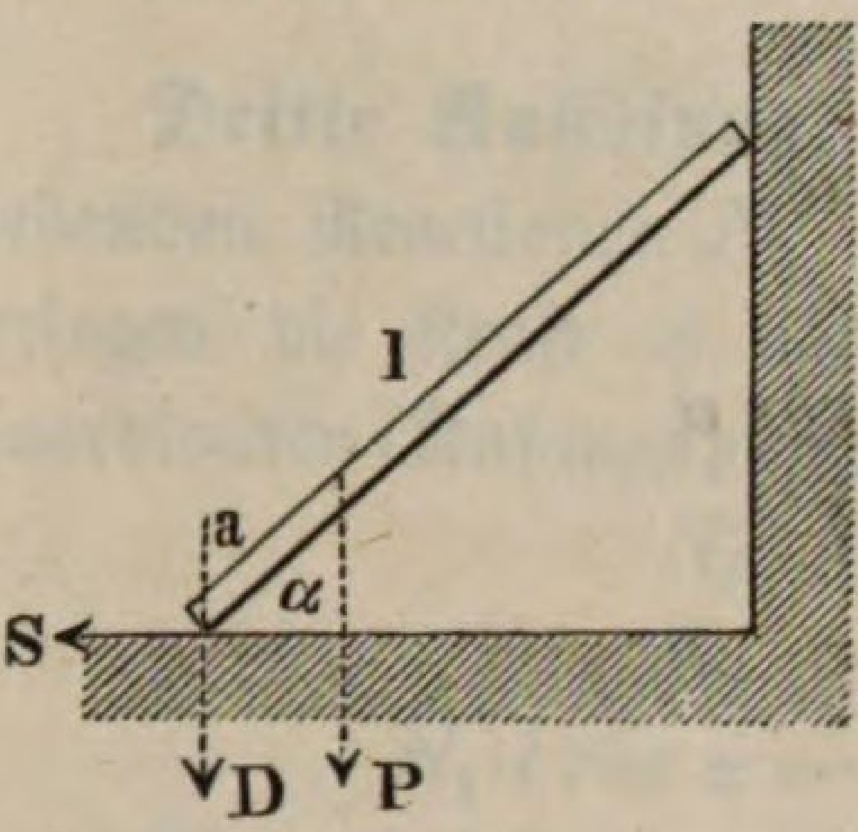
$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{- b \sin \beta \cos \alpha + a \sin \alpha \cos \beta}{(a + b) \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{a \operatorname{cotg} \beta - b \operatorname{cotg} \alpha}{a + b}.$$

Die Rechnung würde viel größer werden, wenn man einen Punkt, der zu den drei Kräften in keiner Beziehung steht, zum Coordinaten-Anfangspunkte wählen wollte.

15. Ein Stab von der Länge l (Fig. 86) sei um den Winkel α gegen den Fußboden geneigt, indem er sich mit seinem oberen Ende gegen eine verticale Wand lehnt. In der Entfernung a von dem unteren Ende wirkt ein Gewicht P in einer zum Fußboden normalen Richtung, während der Stab selbst ohne Gewicht vorausgesetzt wird.

Fig. 86.



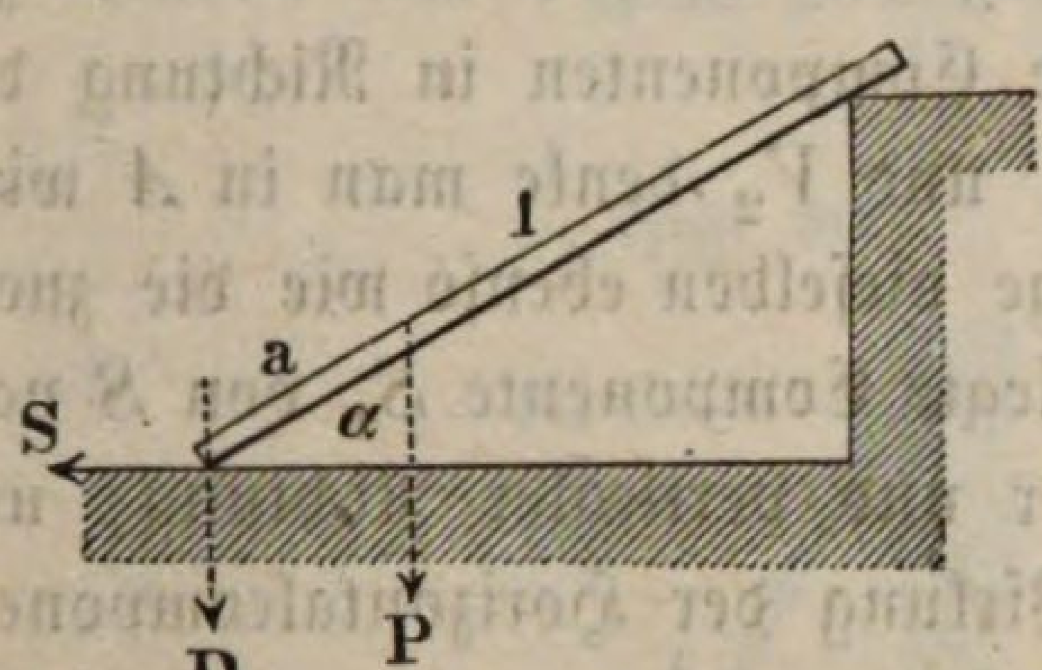
Wie groß ist der normale Druck D und der Schub S am unteren Ende des Stabes, wenn die durch die Achse desselben gelegte Verticalebene zur Wand normal ist?

$$D = P$$

$$S = P\frac{a}{l}\,cotg\,\alpha.$$

16. Wie ändern sich die erhaltenen Resultate, wenn unter den obigen Voraussetzungen der Stab (Fig. 87) sich gegen eine Mauerkante legt, die der Durchschnittslinie zwischen Wand und Fußboden parallel läuft?

Fig. 87.

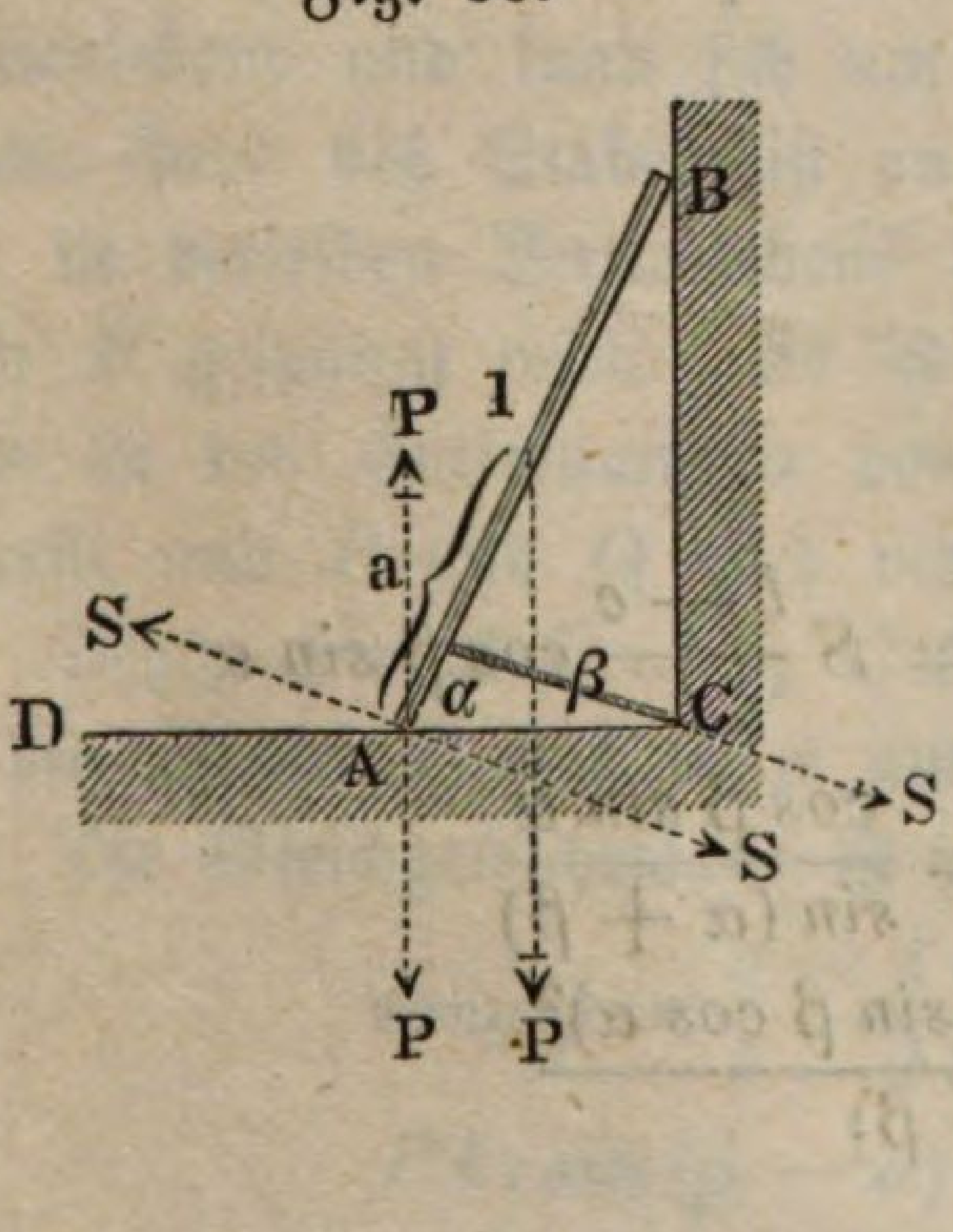


$$D = P\frac{l - a\cos\alpha^2}{l},$$

$$S = \tfrac{1}{2}\,P\,\frac{a}{l}\,\sin 2\,\alpha.$$

17. Ein Stab ohne Gewicht von der Länge l, stützt sich mit dem einen Ende A gegen eine glatte horizontale, mit dem anderen gegen eine glatte verticale Ebene und ist in der Entfernung a von dem Ende A durch ein Gewicht P belastet, das nach einer zur Horizontalebene normalen Richtung wirkt. Das Ausgleiten des Stabes wird durch die Befestigung desselben mittelst eines gewichtlosen Seiles, mit einem Punkte C der Durchschnittslinie der beiden betreffenden Ebenen, verhindert. Es ist die Spannung S dieses Seiles zu bestimmen, wenn die Punkte A, B, C in einer zu beiden Ebenen normalen Ebene liegen, und der Neigungswinkel des Stabes gegen die Horizontalebene gleich α, der des Seiles gleich β gegeben ist.

Fig. 88.



Erste Auflösung. Wir legen die Kräfte P und S parallel ihrer Richtung nach A (Fig. 88). Die dabei entstandenen Paare bringen wir auf die Breite $l\,\sin\,\alpha$ und schieben dieselben so, daß die einen Kräfte der Paare im Fußboden, die anderen also in B normal gegen die Mauer wirken. Der Schub in A nach der Richtung $A\,D$ ist demnach:

$$P\frac{a}{l}\,cotg\,\alpha + S\,\sin\beta\,cotg\,\alpha.$$

Wird die in A wirksame Kraft S nach horizontaler und verticaler Richtung zerlegt, so erhalten wir als Horizontalcomponente nach Richtung von $A\,C$, der obigen Kraft entgegengesetzt wirksam:

$$S \cos \beta.$$

Für den Fall des Gleichgewichts ist daher:

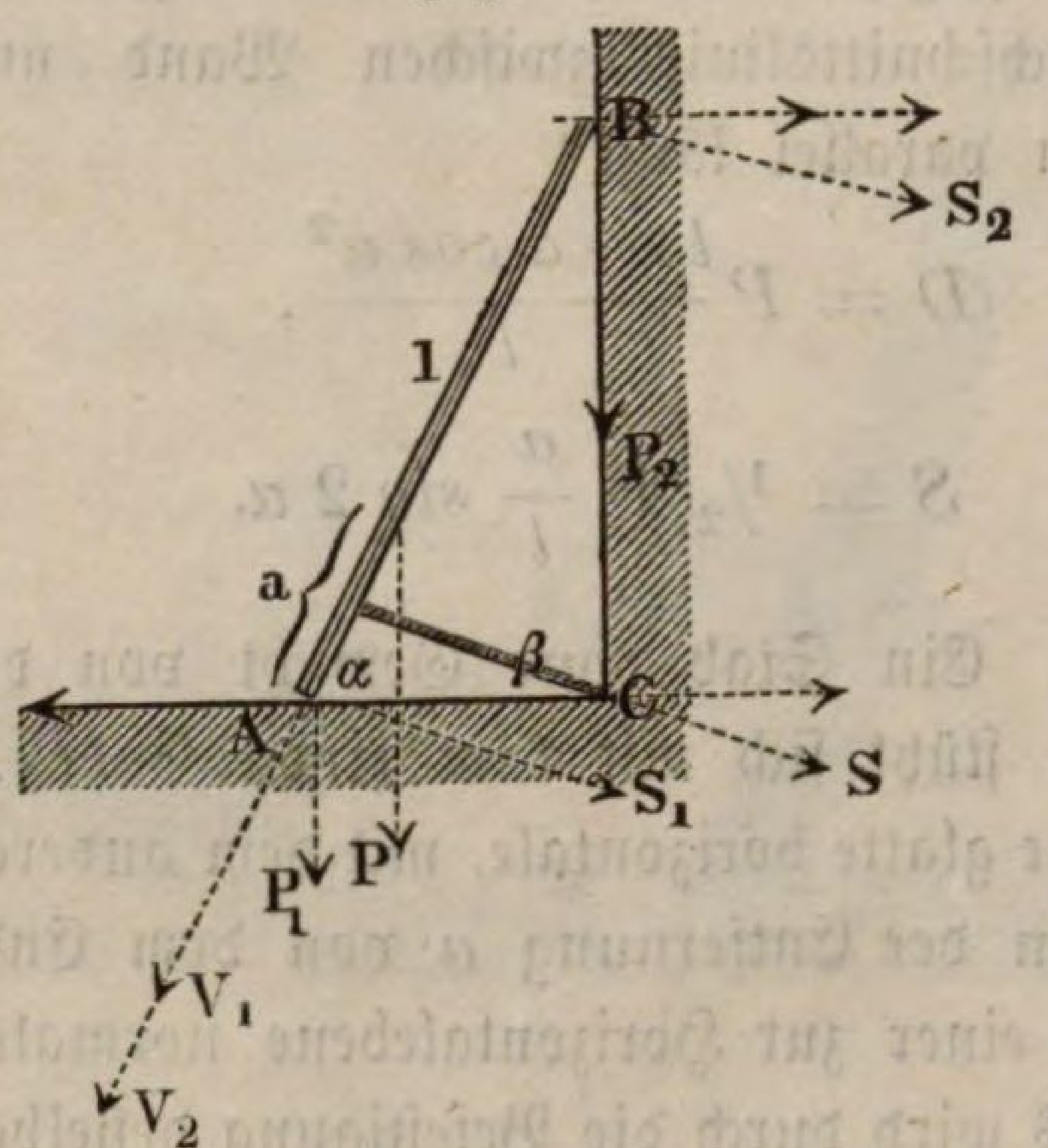
$$S \cos \beta = P \frac{a}{l} \cot g\, \alpha + S \sin \beta \cot g\, \alpha$$

$$S (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) = P \frac{a}{l} \cos \alpha$$

$$S = P \frac{a}{l} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Zweite Auflösung. Man zerlege P und S in zwei parallele Kräfte P_1 und P_2, S_1 und S_2, die in A und B wirksam sind (Fig. 89). Die Componenten im Punkte B zerlege man nach der Richtung des Stabes und normal zur Wand, die Componenten in Richtung des Stabes V_1 und V_2 denke man in A wirksam, zerlege dieselben ebenso wie die zuerst dorthin gelegte Componente S_1 von S nach horizontaler und verticaler Richtung, und setze die Wirkung der Horizontalcomponenten gleich Null.

Fig. 89.



$$P_1 + P_2 = P$$

$$P_1\, a = P_2 (l - a)$$

$$S_1 + S_2 = S$$

$$S_1\, c = S_2 (l - c)$$

$$P_1 = P \frac{l - a}{l} \qquad S_1 = S \frac{(l - c)}{l}$$

$$P_2 = P \frac{a}{l} \qquad S_2 = S \frac{c}{l}$$

$$V_1 = \frac{P_2}{\sin \alpha} = P \frac{a}{l \sin \alpha}$$

$$V_2 = S_2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = S \frac{c}{l} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$(V_1 + V_2) \cos \alpha = S_1 \cos \beta$$

$$P \frac{a}{l} \cos \alpha + S \frac{c}{l} \sin \beta \cos \alpha = S \frac{l - c}{l} \cos \beta \sin \alpha$$

$$\frac{c}{l} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \text{ und } \frac{l - c}{l} = \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$P \frac{a}{l} \cos \alpha = S \frac{(\sin \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \beta \cos \alpha)^2}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$P \frac{a}{l} \cos\alpha = S \sin(\alpha - \beta)$$

daher
$$S = P \frac{a}{l} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Dritte Auflösung. Wir nehmen die in den Punkten A und B entstehenden Reactionen N_1 und N_2 (Fig. 90) normal zu den Ebenen zu Hülfe, zerlegen die Kraft S nach Richtung von $A\,C$ und $B\,C$, und wählen C als Coordinaten-Anfangspunkt, so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$N_1 - P - S \sin\beta = 0$$
$$N_2 - S \cos\beta = 0$$
$$N_1\, l \cos\alpha - N_2\, l \sin\alpha - P(l - a)\cos\alpha = 0.$$

Hieraus folgt:

$$(P + S \sin\beta)\, l \cos\alpha - S\, l \cos\beta \sin\alpha = P(l - a)\cos\alpha$$
$$S\, l\, (\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) = - P\, a \cos\alpha$$
$$S\, l \sin(\alpha - \beta) = P\, a \cos\alpha$$
$$S = P \frac{a}{l} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Fig. 90.

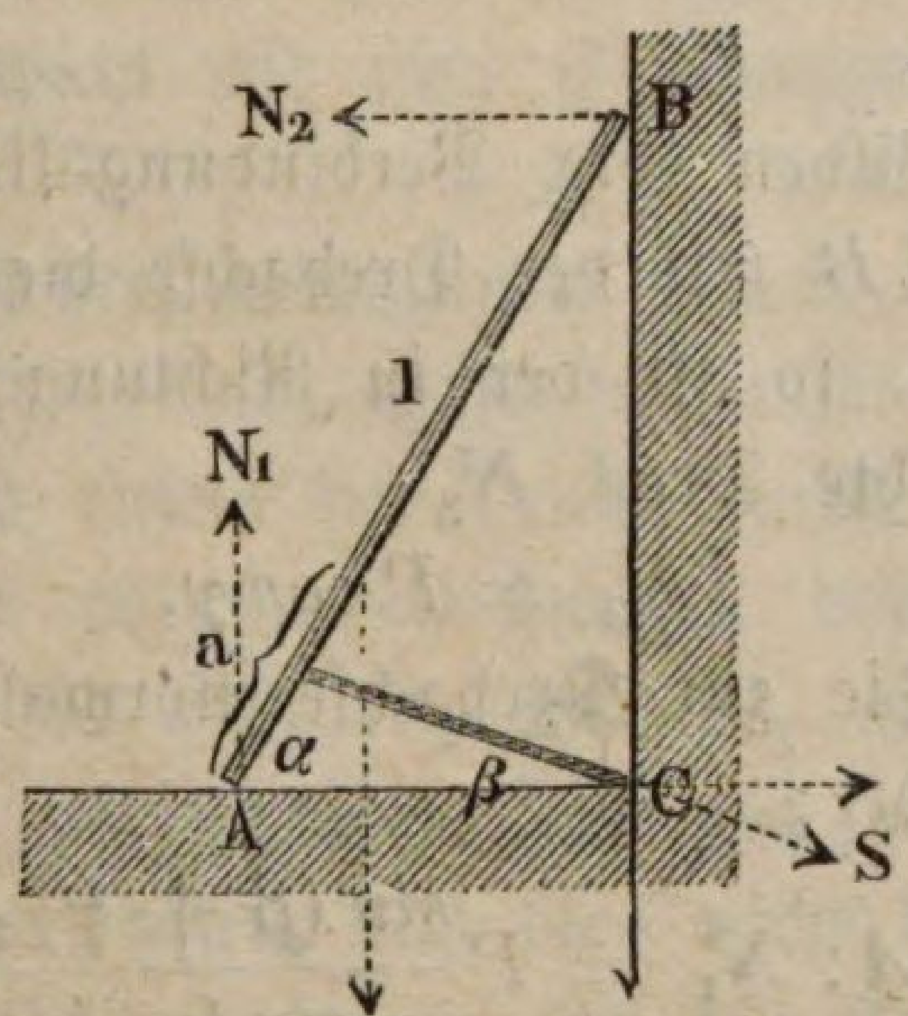
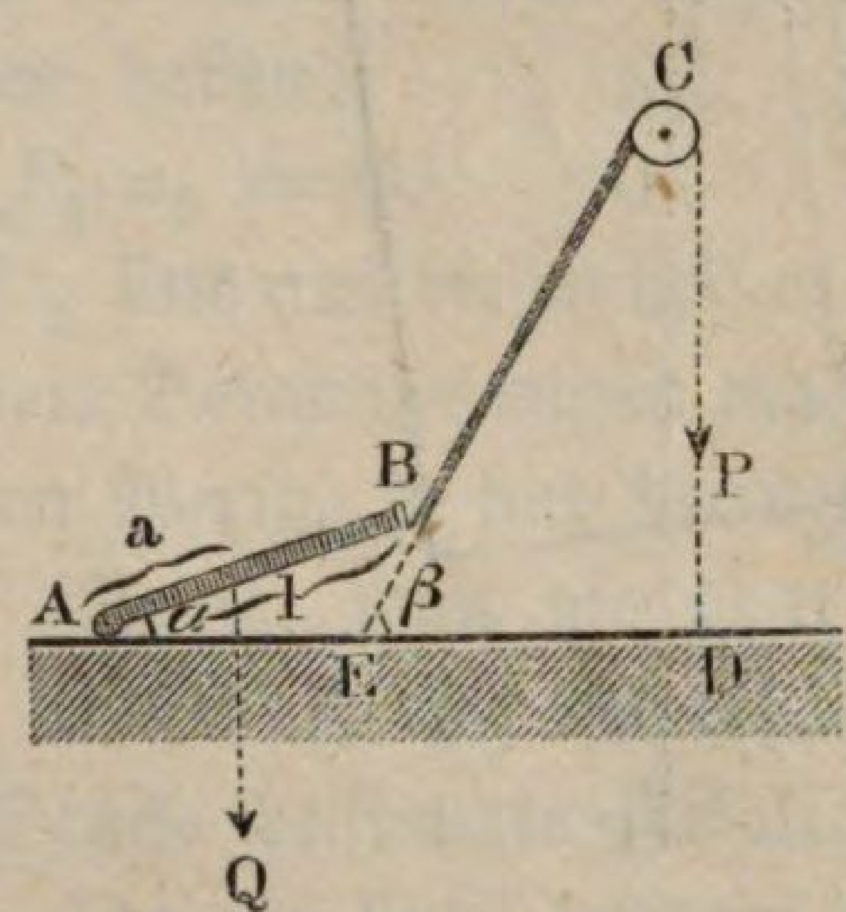


Fig. 91.



18. Ein Stab $A\,B$ ohne Gewicht (Fig. 91) von der Länge l liegt in einer Verticalebene und kann sich um den Punkt A in dieser Ebene drehen. Das andere Ende des Stabes ist an einem gewichtlosen Seile befestigt, das über eine in derselben Verticalebene gelegene Rolle C geführt ist und von einer Kraft P gespannt wird. Es ist die Gleichgewichtslage des Stabes zu finden, wenn in der Entfernung a vom untern Ende des Stabes das Gewicht Q angreift und P und Q nach verticaler Richtung wirksam gedacht werden.

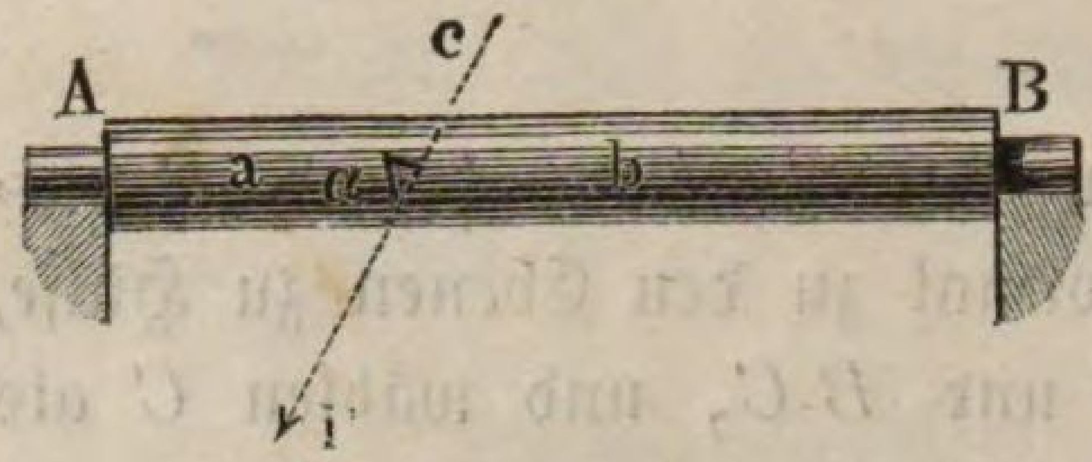
Setzen wir $A\,D = b$, $C\,D = c$ als bekannt voraus, so handelt es sich um die Winkel $B\,A\,E = \alpha$ und $C\,E\,D = \beta$.

Die Gleichgewichtslage ist durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\tan\beta = \frac{c - l \sin\alpha}{b - l \cos\alpha}$$
$$P\, l \,.\, \sin(\beta - \alpha) = Q\, a \cos\alpha.$$

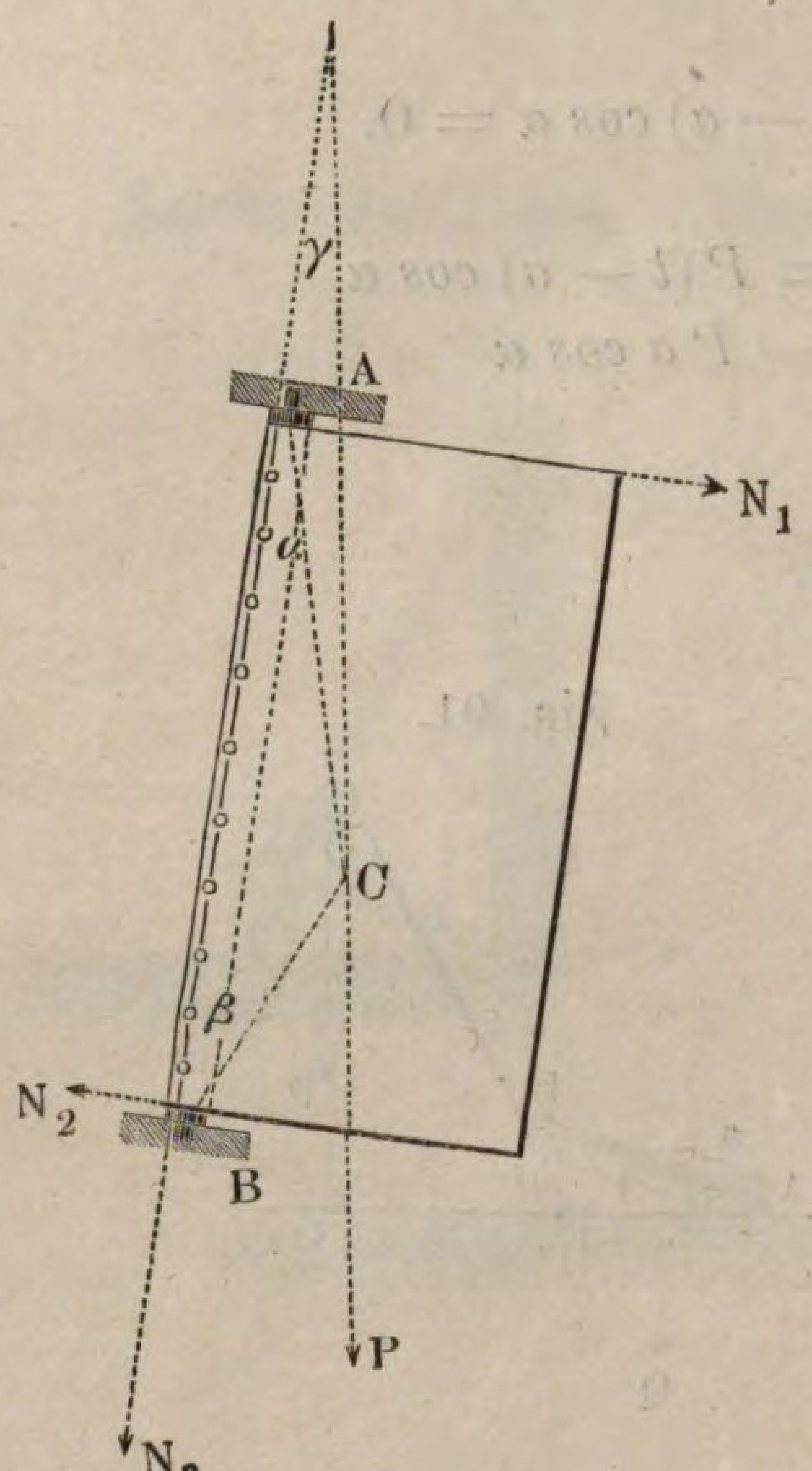
19. Es stelle $A B$ (Fig. 92) eine feste Achse vor. In dem Punkte C derselben wirkt eine Kraft P, die mit der Achse den Winkel α bildet. Wie groß ist der Druck auf die Punkte A und B?

Fig. 92.



In der Richtung der Achse ist ein Druck gleich $P \cos \alpha$ wirksam; der Druck normal in A zur Achse ist $\frac{b}{a+b} P \sin \alpha$, der in B wirksame Druck $\frac{a}{a+b} P \sin \alpha$.

Fig. 93.



20. Eine feste Ebene finde sich mit der Drehachse AB fest verbunden (Fig. 93). Am Punkte C dieser Ebene wirke eine Kraft P, deren Richtung in diese Ebene fällt, und die mit der Drehachse den Winkel γ bildet.

Wie groß ist der Druck auf die Punkte A und B? Wie groß ist derselbe, wenn die Kraft parallel der Drehachse wirkt?

Bilden die Verbindungslinien $C A$ und $C B$ mit der Drehachse die Winkel α und β, so ist der in Richtung von $A B$ ausgeübte Druck N_3

$$N_3 = P \cos \gamma.$$

Die zur Drehachse normalen Drucke sind aber:

$$\text{für } A\colon N_1 = P \frac{\sin(\beta + \gamma) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\text{für } B\colon N_2 = P \frac{\sin(\alpha - \gamma) \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Für die zweite Angabe $\gamma = 0$ gesetzt, so erhalten wir:

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{\cot g\, \alpha + \cot g\, \beta}.$$

Diese sind um so geringer, je kleiner die Winkel α und β, d. h. je größer die gegenseitige Entfernung der Punkte A und B ist.

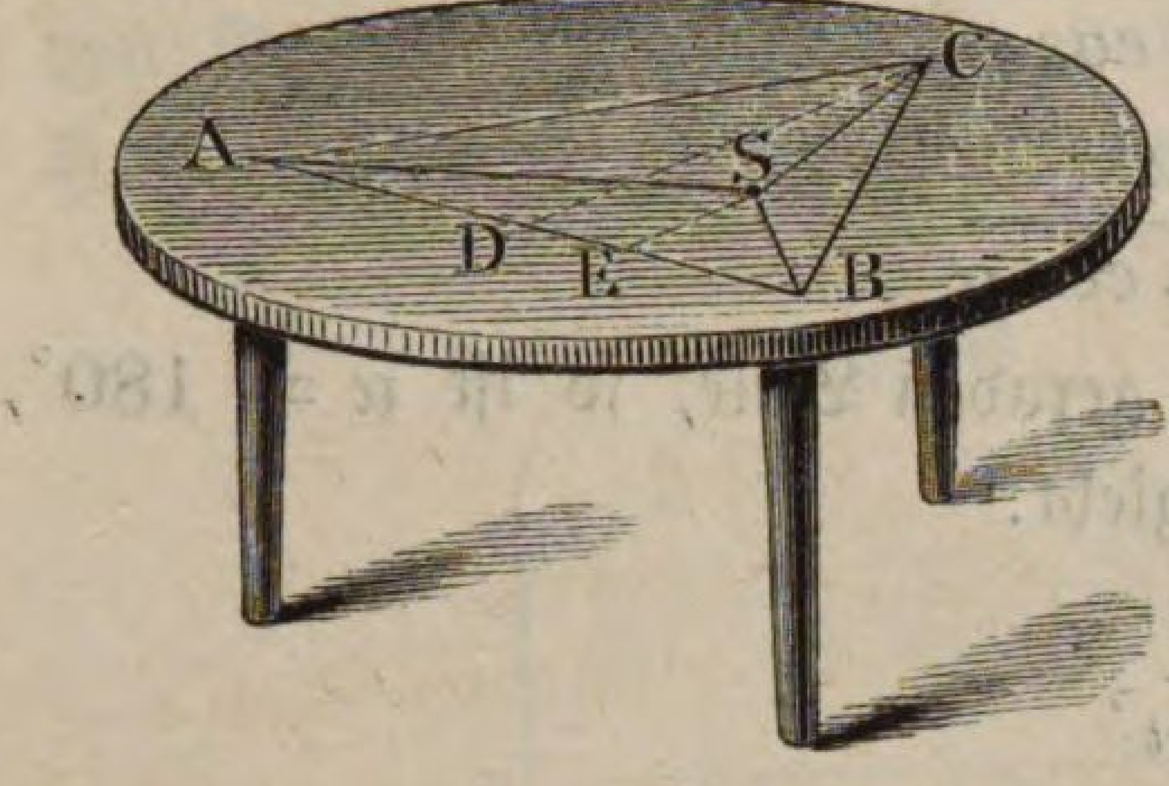
$$N_3 = P.$$

21. Eine Ebene sei in drei Punkten A, B, C (Fig. 94), die nicht in gerader Linie liegen, unterstützt. Eine zur Ebene normal wirkende Kraft P habe ihren Angriffspunkt S innerhalb des durch die Punkte A, B, C bestimmten Dreiecks. Es ist der auf die Unterstützungen ausgeübte Druck zu berechnen.

Wir haben für A als Coordinaten-Anfangspunkt, unter D_1, D_2, D_3

die Drucke auf die drei Unterstützungspunkte verstanden, die Höhen des Dreiecks ABC mit h_1, h_2, h_3 und die von S auf die Dreiecksseiten gefüllten Normalen mit p, q, r bezeichnend:

Fig. 94.



$$D_1 + D_2 + D_3 - P = 0$$
$$P q - D_2 h_2 = 0$$
$$P r - D_3 h_3 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$D_2 = P \frac{q}{h_2}$$
$$D_3 = P \frac{r}{h_3}$$
$$D_1 = P \frac{p}{h_1}.$$

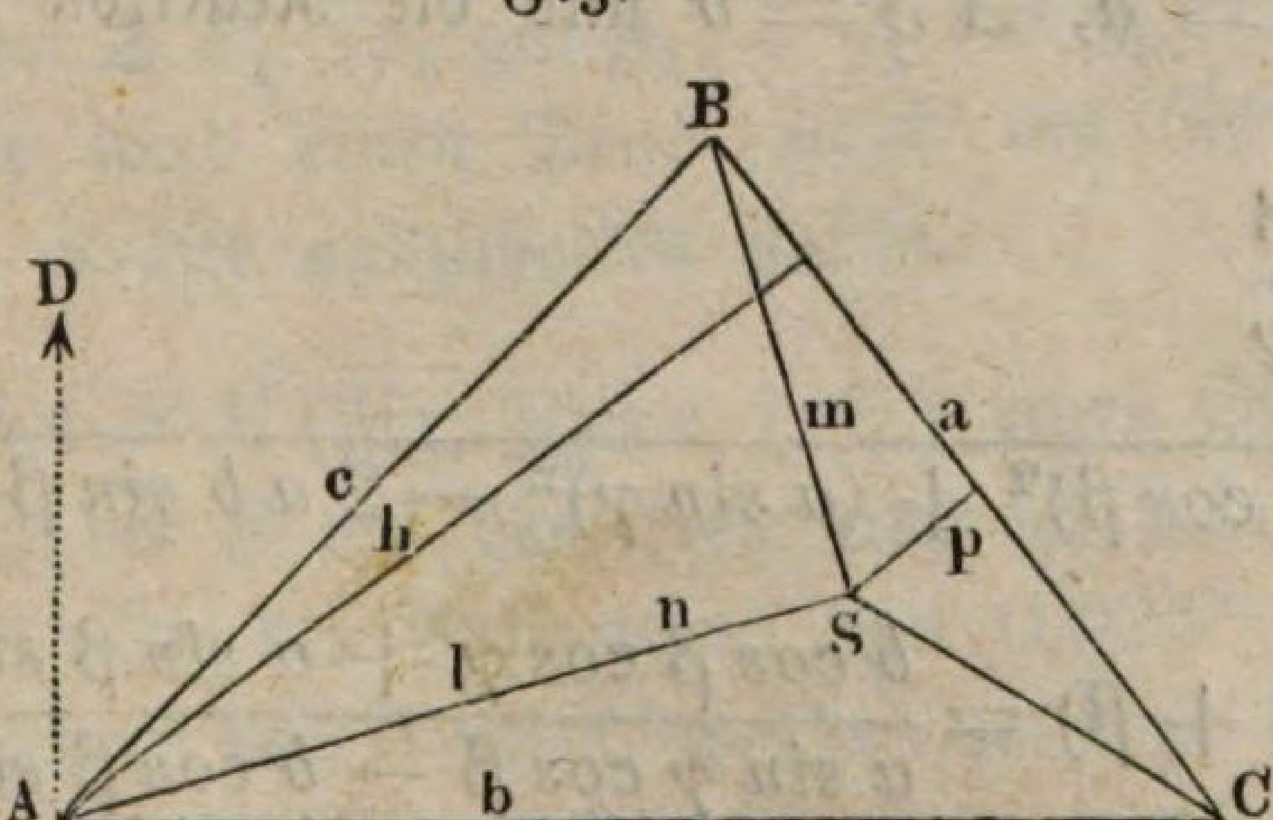
Liegen in der vorigen Aufgabe die vier Punkte A, B, S, C in einer geraden Linie, so erscheinen die Drucke D_1, D_2, D_3 sämmtlich unter der Form $\frac{0}{0}$, d. h. dieselben sind unbestimmt. Der Grund für diese Unbestimmtheit läßt sich sogleich übersehen, wenn man die Aufgabe direct behandelt. Wir haben in diesem Fall parallele Kräfte, die in einer Ebene liegen, für deren Gleichgewicht wir zwei Gleichungen gefunden haben:

$$\Sigma P_1 = 0 \text{ und } \Sigma P_1 x_1 = 0.$$

Die drei unbekannten Drucke D_1, D_2, D_3 sind aus diesen beiden Gleichungen nicht bestimmbar, wenn wir nicht noch andere Voraussetzungen machen. Geben wir z. B. einem der Drucke einen bestimmten Werth, so sind die beiden anderen aus den obigen Gleichungen bestimmbar. Bringt man die oben entwickelten Werthe für D_1, D_2 und D_3 unter eine andere Form, so erhält man auch für den vorliegenden Fall für alle drei Drucke bestimmte Resultate, nur ist daran zu denken, daß dies nicht die allein richtigen sind, sondern daß sich, der obigen Bemerkung zufolge, die Aufgabe auf vielfache Weise lösen lassen wird.

Es ist (Fig. 95) $SA = l$, $SB = m$, $SC = n$ gesetzt, und die Winkel in BSC, CSA, ASB mit α, β, γ bezeichnet:

Fig. 95.



$$D_1 = P \frac{p}{h_1} = P \frac{\frac{1}{2} a p}{\frac{1}{2} a h_1} = P \frac{m n \sin \alpha}{m n \sin \alpha + n l \sin \beta + l m \sin \gamma}.$$

In gleicher Weise werde D_2 und D_3 berechnet, dabei der Punkt S so gewählt, daß $\alpha = \beta = \gamma$ werde, dann ist $\sin\gamma = -\sin 2\alpha$ und man erhält:

$$D_1 = P\frac{m\,n}{m\,n + n\,l - 2\,l\,m\cos\alpha},$$

$$D_2 = P\frac{l\,n}{m\,n + n\,l - 2\,l\,m\cos\alpha},$$

$$D_3 = P\frac{-2\,m\,n\cos\alpha}{m\,n + n\,l - 2\,l\,m\cos\alpha}.$$

Liegen die Punkte A, B, C, S in einer geraden Linie, so ist $\alpha = 180°$, $\cos\alpha$ also $= -1$ zu setzen, so daß sich ergiebt:

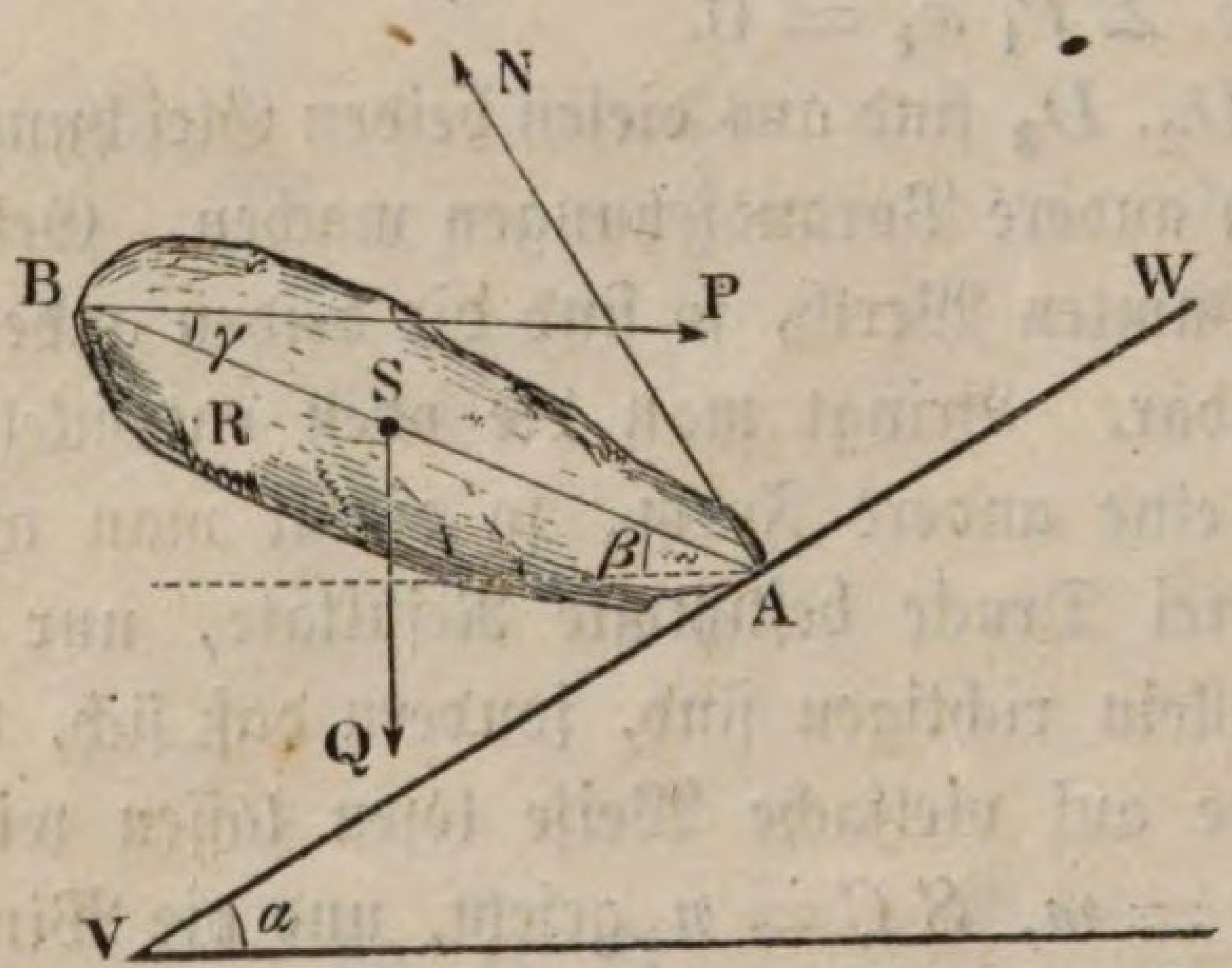
$$D_1 = P\frac{m\,n}{m\,n + l\,n + 2\,l\,m},$$

$$D_2 = P\frac{l\,n}{m\,n + l\,n + 2\,l\,m},$$

$$D_3 = P\frac{2\,m\,n}{m\,n + l\,n + 2\,l\,m}.$$

22. Ein fester Körper R (Fig. 96) stützt sich mit einem Punkte A gegen eine unverrückbare Ebene VW, die gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigt ist, während die Achse AB des Körpers mit dem Horizont den Winkel β bildet. Im Endpunkte B des Körpers ist eine Kraft P angebracht, die mit der Achse AB den Winkel γ einschließt, und in einem Punkte S der Achse wirkt senkrecht abwärts eine Kraft Q. Es sind die Gleichgewichtsbedingungen des Körpers unter der Voraussetzung zu entwickeln, daß die sämmtlichen Kräfte sich in der durch VW und AB gelegten Verticalebene befinden. Zur Berechnung sei $AB = a$, $AS = b$ und die Reaction in A normal zur geneigten Ebene N.

Fig. 96.



$$P = Q\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}$$

$$N = \frac{Q}{a\sin\gamma}\sqrt{(b\cos\beta)^2 + (a\sin\gamma)^2 - 2\,a\,b\sin\beta\cos\gamma\sin(\beta-\gamma)}$$

$$\tang(\alpha+\beta) = \frac{b\cos\beta\cos\gamma + a\sin\beta\sin\gamma}{a\sin\gamma\cos\beta - b\cos\beta\sin\gamma}.$$

Wirkt P horizontal, so ist $\gamma = \beta$ und

$$P = Q\frac{b}{a}\cotg\beta$$

$$N = \frac{Q}{a \sin\beta} \sqrt{(b \cos\beta)^2 + (a \sin\beta)^2}$$

$$tang\,(\alpha + \beta) = \frac{b \cos\beta^2 + a \sin\beta^2}{(a - b) \sin\beta \cos\beta}.$$

23. Jeder Körper von beliebiger Form, der in beliebig vielen Punkten von Kräften angegriffen ist und sich um eine feste Achse drehen kann, wird Hebel genannt. Der Hebel heißt einarmig (Fig. 97), wenn sich der Dreh-

Fig. 97.

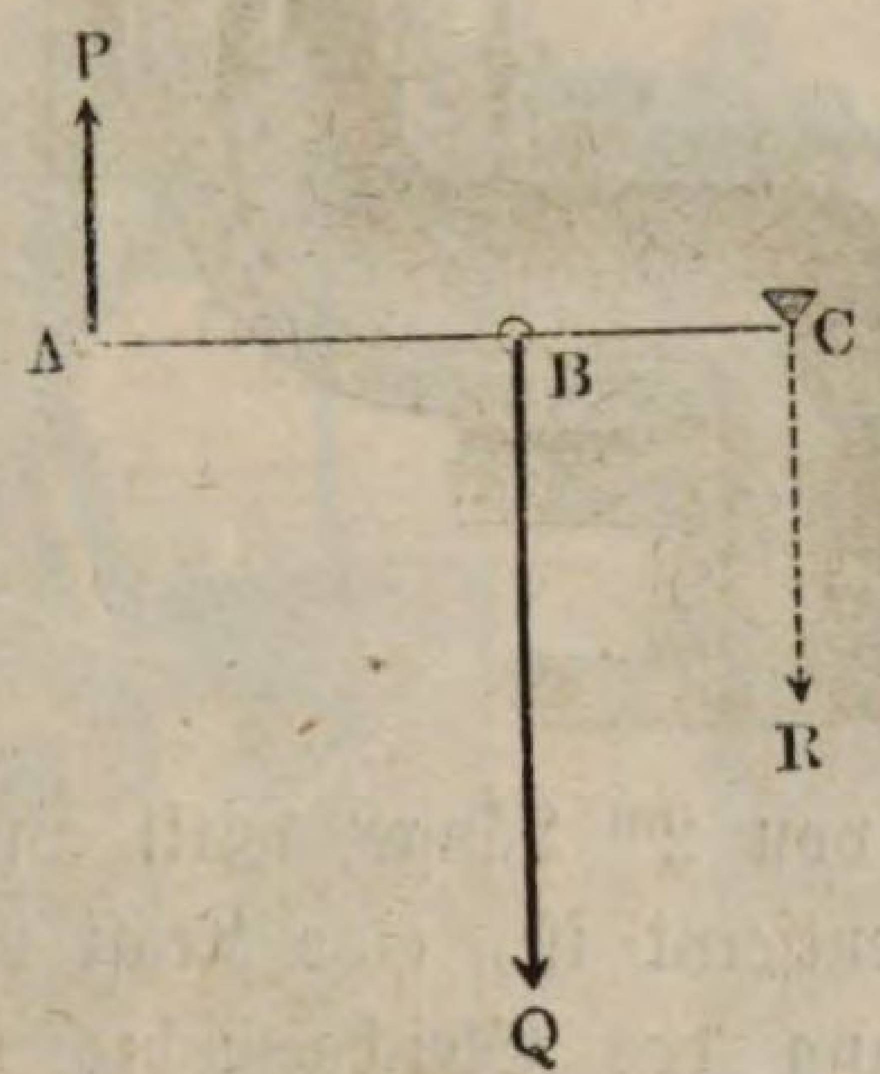
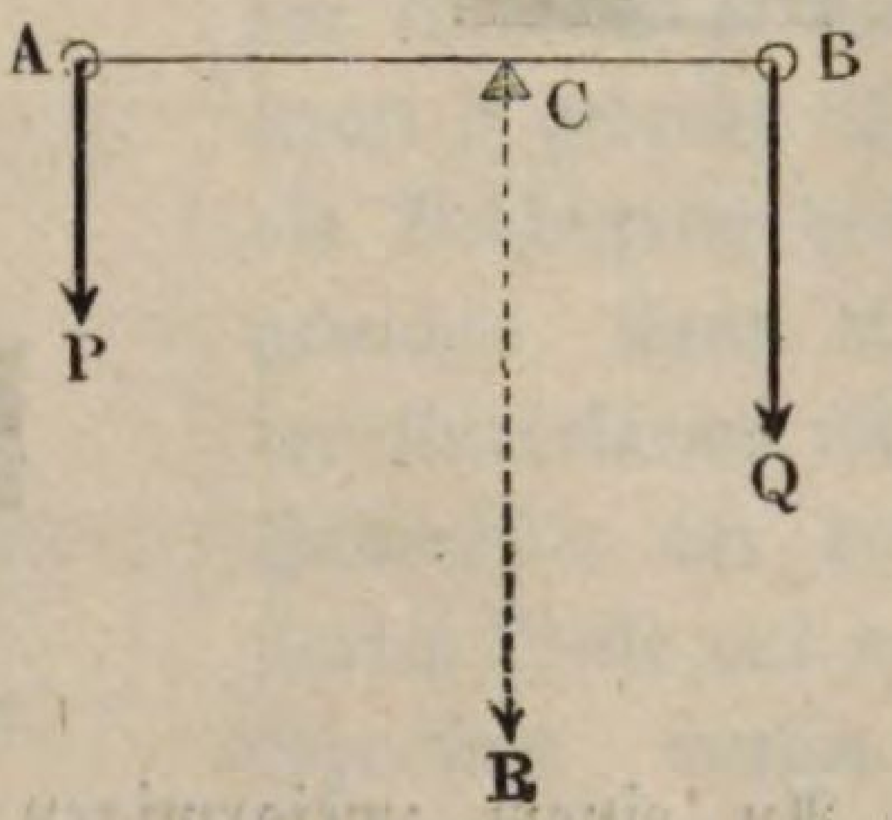
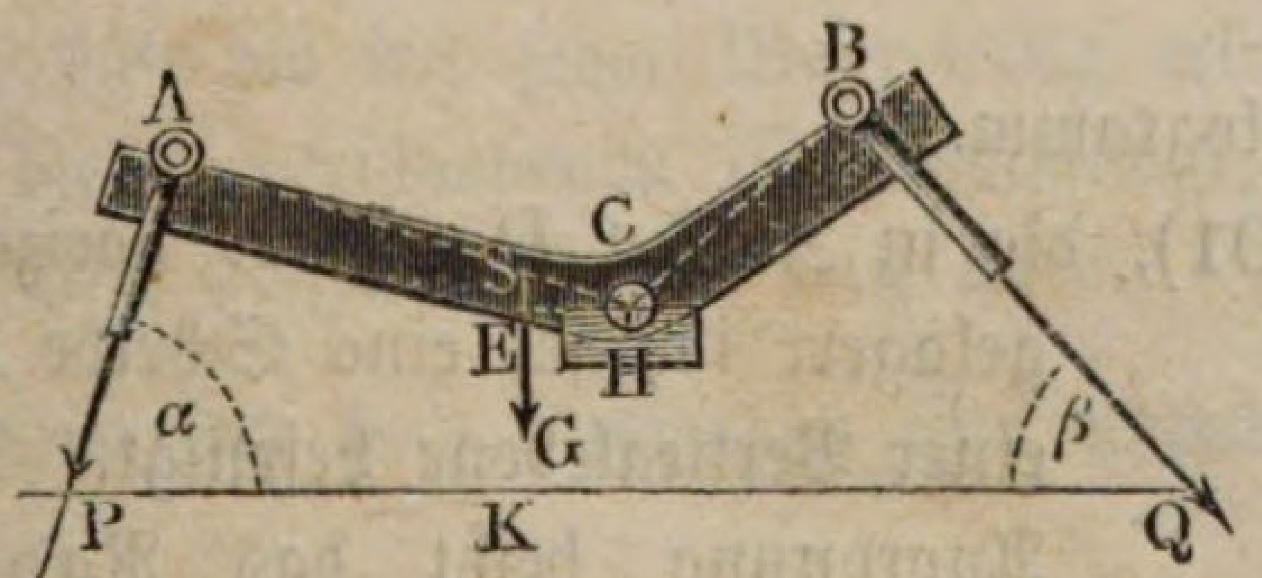


Fig. 98.



punkt C an einem seiner Enden befindet, zweiarmig (Fig. 98) im entgegengesetzten Falle, wobei man gleicharmige und ungleicharmige Hebel zu unterscheiden hat, je nachdem $A\,C$ gleich oder ungleich $B\,C$ ist. Der Form nach zerfallen die Hebel in gerade und Winkelhebel (Fig. 99). Nehmen wir die in den Figuren durch C gehende Umdrehungsachse als die Z-Achse, so können nur die Componenten der Kräfte in der $X\,Y$-Ebene Drehung hervorbringen. Für den Gleichgewichtszustand muß also nach §. 39

Fig. 99.



$$N n = \Sigma P_1 \; (x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1) = 0 \text{ sein}$$

und die feste Achse wird einen Druck gleich der Resultante R der auf den Hebel einwirkenden Kräfte auszuhalten haben.

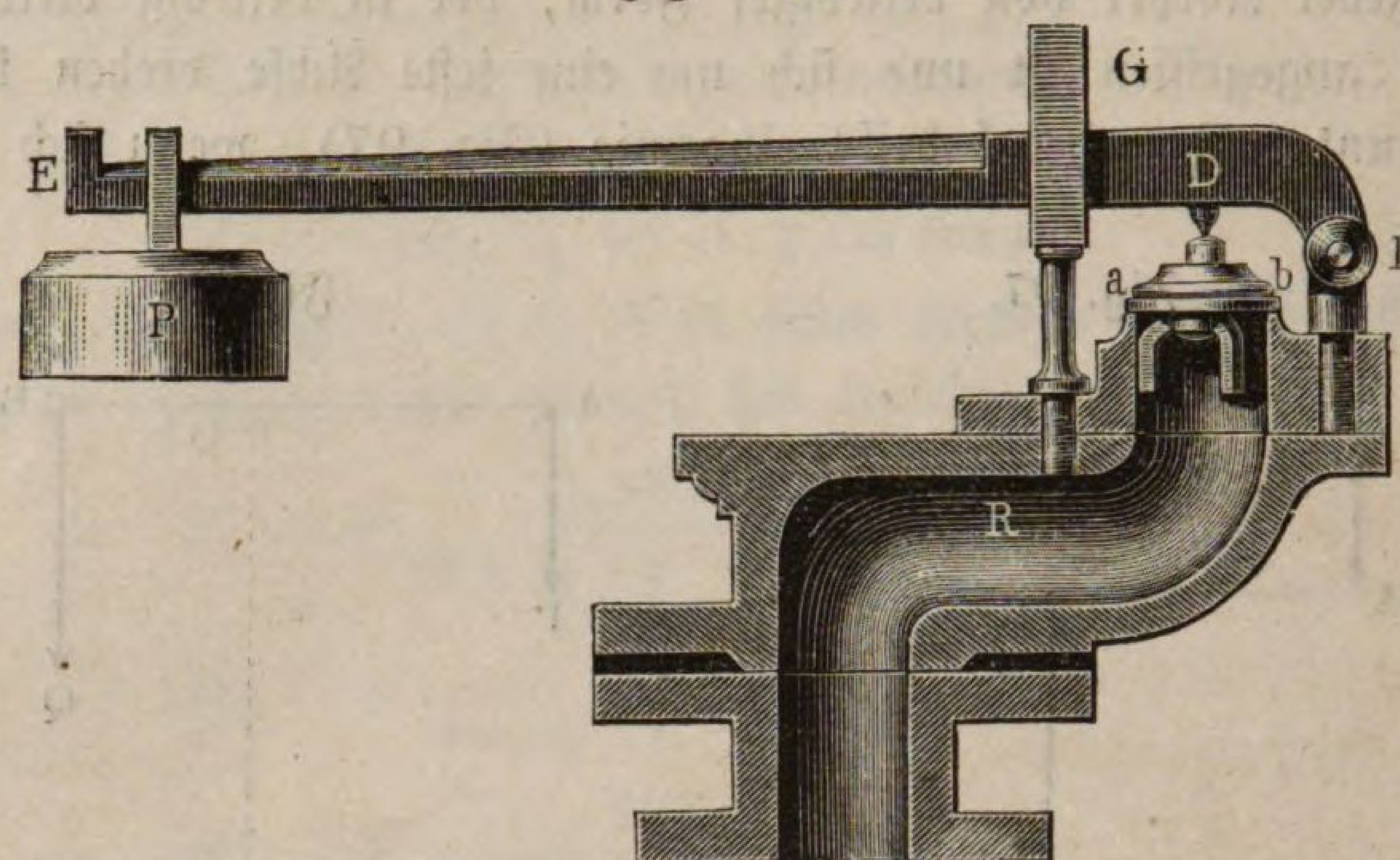
24. Der Hebel $F\,E$ (Fig. 100 a. f. S.) eines Sicherheitsventils sei 0,5^m lang, und es wirke bei E auf denselben eine senkrecht abwärts wirkende Kraft von 6 Kilogramm. In der Entfernung von 0,025^m vom Drehpunkte F befindet sich der Stützpunkt des Ventils, welches vermöge des inneren Dampfdrucks gegen den Hebel gedrückt wird. Wie groß ist dieser Dampfdruck unter Voraussetzung des Gleichgewichts?

120 Kilogramm.

25. An einem einarmigen Hebel von $0{,}8^m$ Länge ist ein Druck von 30 Kilogramm in der Entfernung $0{,}2^m$ vom Stützpunkte wirksam. Wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige Kraft am Ende des Hebels?

7,5 Kilogramm.

Fig. 100.



26. An einem zweiarmigen Hebel von 2^m Länge wirkt an dem einen Ende, das von dem Drehpunkt $1{,}75^m$ entfernt ist, eine Kraft von 5 Kilogramm. Wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nothwendige Kraft am andern Ende?

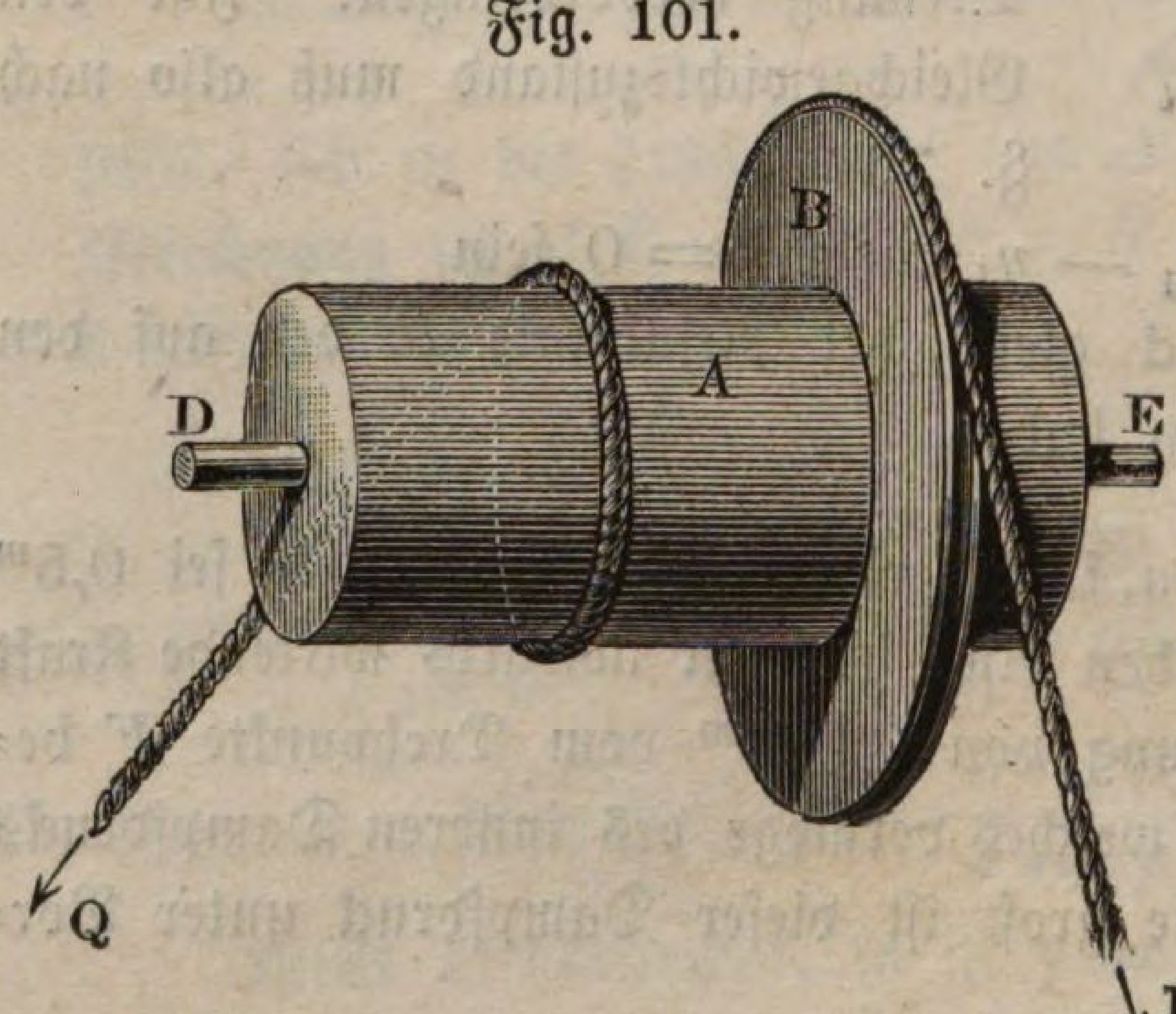
35 Kilogramm.

27. An einem Winkelhebel, dessen Armlängen 0,6 und 2^m betragen, wirkt an dem Ende des $0{,}6^m$ langen Armes eine Kraft, welche einen Winkel von 60° mit demselben bildet. Wie groß ist dieselbe, wenn ihr durch eine rechtwinkelig zu dem 2^m langen Arme wirkende Kraft von 80 Kilogramm das Gleichgewicht gehalten wird?

307,9 Kilogramm.

28. Auf einer Welle A (Fig. 101), die in Zapfen D und E horizontal gelagert ist, sei eine Scheibe B in einer Verticalebene befestigt. Diese Anordnung heißt das Rad an der Welle. Eine in tangentialer Richtung zum Umfange der Scheibe wirksame Kraft P soll eine im Umfange der Welle ebenfalls nach tangentialer Richtung wirkende Kraft Q im Gleichgewicht halten. Der Halbmesser der Scheibe sei R, der der Welle r.

Fig. 101.



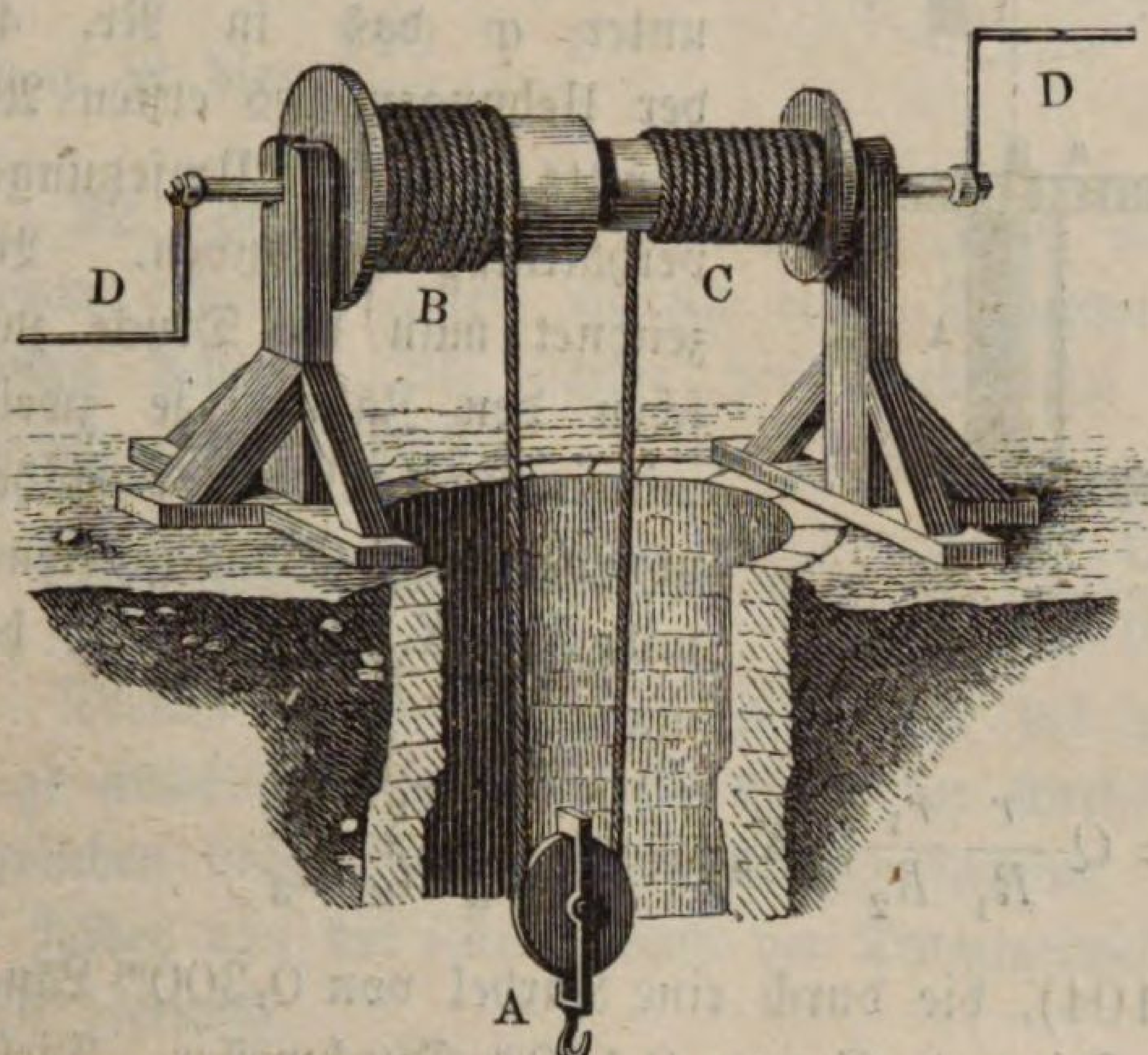
$$PR - Qr = 0$$

$$P = Q\frac{r}{R}.$$

Für $r = 0{,}130^m$, $R = 0{,}520^m$, $Q = 60$ Kilogr. ist $P = 15$ Kilogr.
Für $r = 0{,}130^m$, $R = 0{,}474^m$, $P = 10$ Kilogr. ist $Q = 36$ Kilogr.
Für $P = 20$ Kilogr., $Q = 350$ Kilogr., $r = 0{,}2^m$ ist $R = 3{,}5^m$.
Für $P = 30$ Kilogr., $Q = 370$ Kilogr., $R = 1{,}7^m$ ist $r = 0{,}14^m$.

29. Eine Kraft Q wirkt an der losen Rolle A (Fig. 102) senkrecht abwärts, und die Enden des Seiles, welches diese Rolle trägt, sind nach entgegengesetzter Richtung um eine horizontal gelagerte Welle $B\,C$ gewickelt, die an diesen Stellen verschiedene Durchmesser hat. Die Welle wird mittelst der Kurbeln D durch eine Kraft P gedreht. Wie heißt die Bedingung des Gleichgewichts, wenn die Länge des Kurbelarms mit R, die Halbmesser der verschieden starken Welle mit r_1 und r_2 bezeichnet werden? Die Vorrichtung heißt Differentialhaspel.

Fig. 102.



Zur Bestimmung der Gleichgewichtsbedingung benutzen wir das Princip der virtuellen Momente und lassen das System im Sinne seiner Verbindungen eine unendlich kleine Bewegung machen. Wird die Welle gedreht, so wickelt sich das eine Seilende auf den stärkeren Theil B der Welle auf und das andere von dem schwächeren C ab, so daß die bei jeder Umdrehung erlangte Seilverkürzung gleich der Differenz dieser verschiedenen Wellenumfänge, der Weg von Q dabei also gleich der Hälfte dieser Differenz sein wird.

Hiernach sind, unter n eine unendlich große Zahl verstanden: $\frac{2\pi R}{n}$, $-\frac{\pi(r_1 - r_2)}{n}$, die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte P und Q, daher ist

$$P\frac{2\pi R}{n} - Q\frac{\pi(r_1 - r_2)}{n} = 0$$

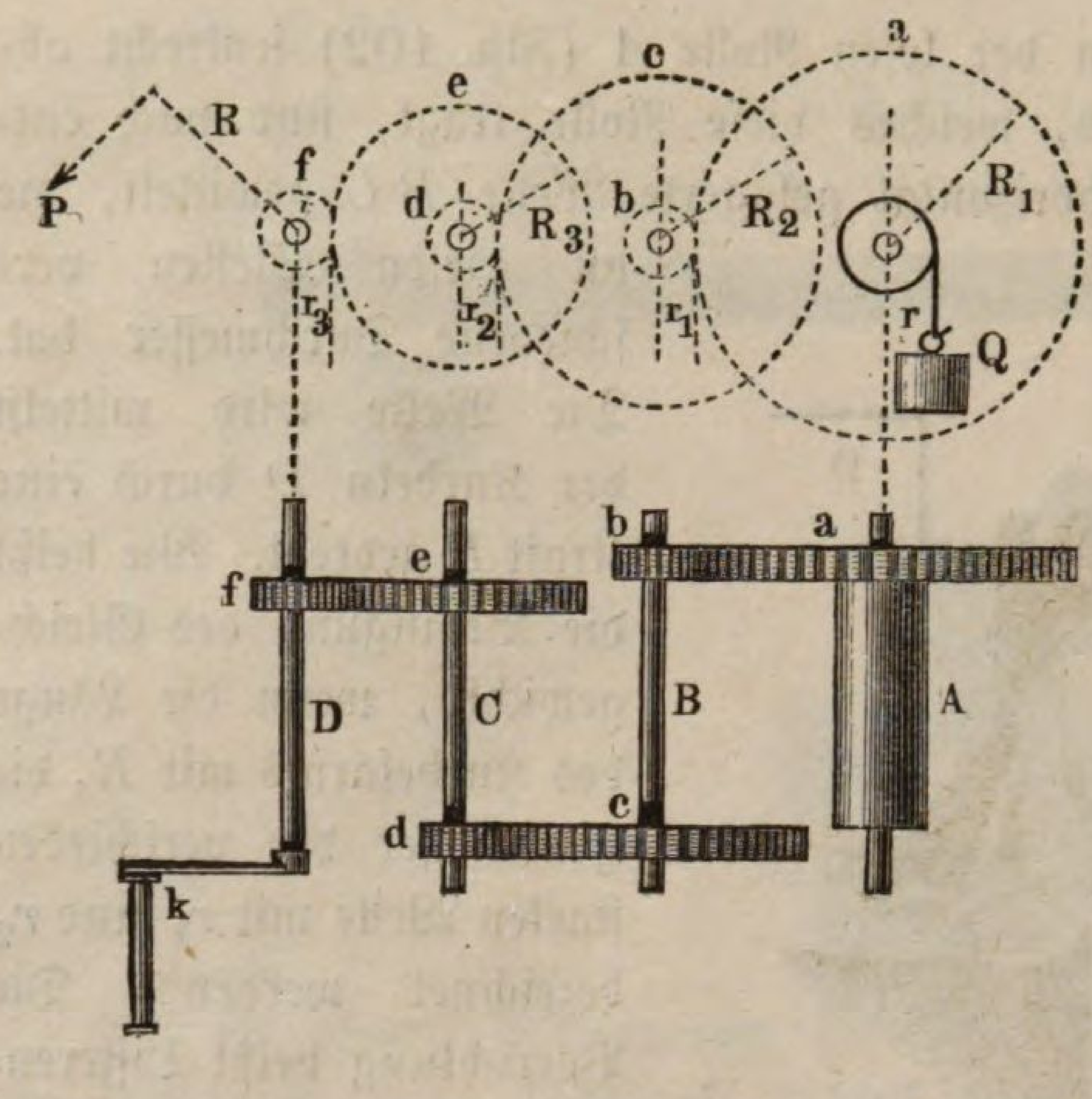
$$P = \frac{Q}{2}\frac{r_1 - r_2}{R}.$$

Für $Q = 4700$ Kilogr., $R = 0{,}470^m$, $r_1 = 0{,}130^m$, $r_2 = 0{,}118^m$ ist $P = 60$ Kilogr.

30. Ein Räderwerk bestehe aus m Wellen $A, B, C, D \ldots$ (Fig. 103 a. f. S.), von denen jede ein größeres und ein kleineres Rad trägt. An dem Umfange des größeren Rades der ersten Welle, d. i. in der Figur am Kurbelarme,

wirke die Kraft P nach tangentialer Richtung, und an dem Umfange des kleineren Rades der letzten Welle wirke tangential die Kraft Q. Die Halbmesser der Räder sind der Reihe nach durch $R_1, R_2, R_3, \ldots R$ und $r, r_1, r_2, r_3 \ldots$ bezeichnet. Wie heißt die Bedingung des Gleichgewichts

Fig. 103.



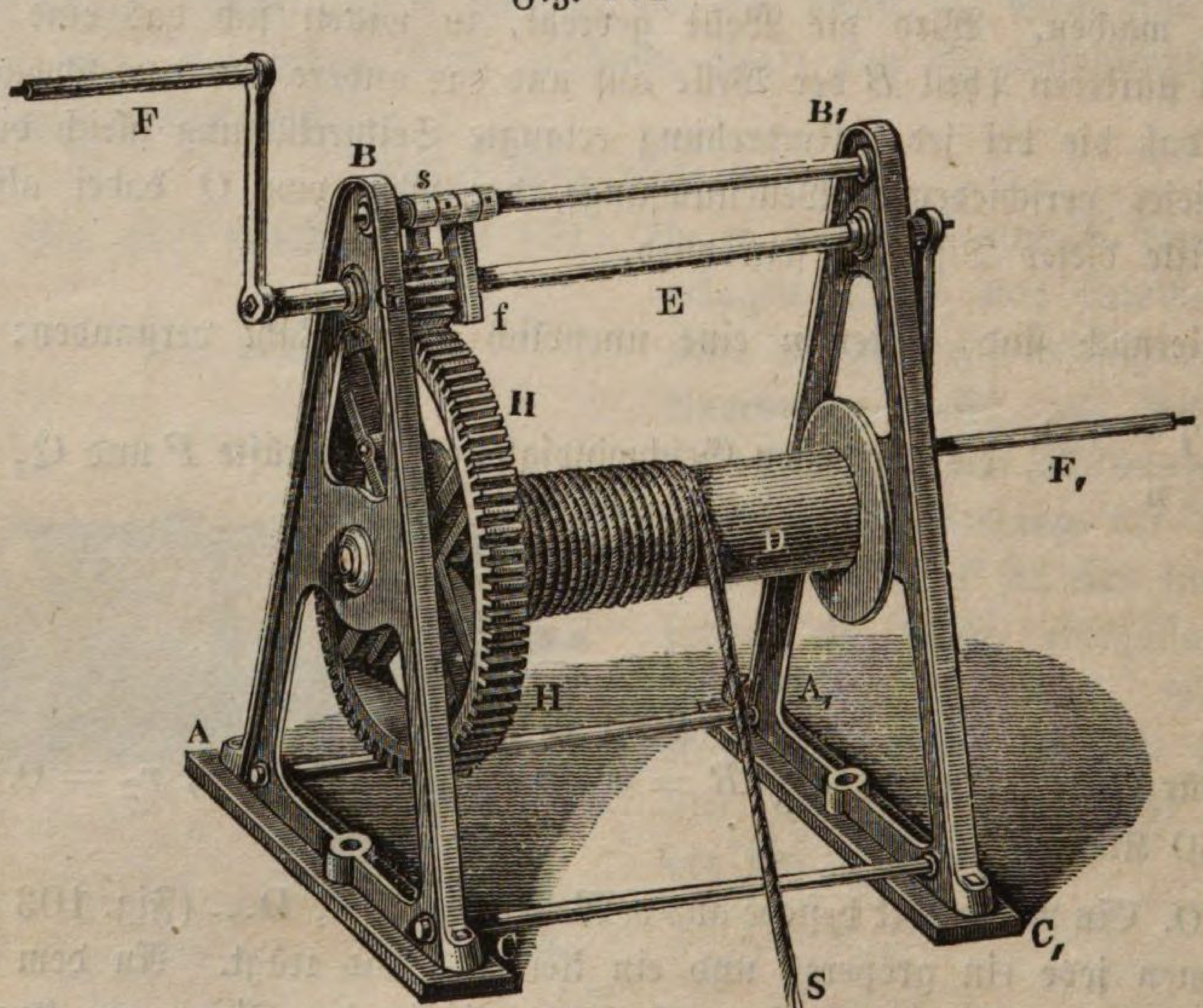
$$\frac{PR}{Qr} = \frac{r_1}{R_1} \frac{r_2}{R_2} \frac{r_3}{R_3} \cdots = \varphi,$$

unter φ das in Nr. 49 der Uebungen des ersten Abschnitts entwickelte Umsetzungsverhältniß verstanden. Bezeichnet man die Drucke zwischen den Zähnen je zweier mit einander arbeitender Räder, von der Kraft Q aus gerechnet, mit $X_1, X_2, X_3 \ldots$, so hat man dafür:

$$X_1 = Q\frac{r}{R_1};\; X_2 = Q\frac{r}{R_1}\frac{r_1}{R_2};\; X_3 = Q\frac{r}{R_1}\frac{r_1}{R_2}\frac{r_2}{R_3}.$$

31. Eine Welle E (Fig. 104), die durch eine Kurbel von $0{,}300^m$ Länge gedreht wird, trägt ein kleines Stirnrad G von $0{,}140^m$ Durchmesser. Dieses

Fig. 104.



steht mit dem Rade H von $0{,}700^m$ Durchmesser im Eingriff und auf dessen Welle ist eine hölzerne Trommel D von $0{,}300^m$ Durchmesser angebracht. Ein Widerstand von 50 Kilogramm soll mittelst eines Seiles, das sich auf die Trommel wickeln kann, gehoben werden. Wie groß ist die an der Kurbel zur Herstellung des Gleichgewichts nothwendige Kraft P?

$$\frac{P \,.\, 0{,}300}{50 \,.\, 0{,}150} = \frac{0{,}140}{0{,}700},$$

d. h. $P = 5$ Kilogramm und der Druck zwischen den Zähnen der mit einander arbeitenden Räder $X = 10{,}7$ Kilogramm. Das Umsetzungsverhältniß φ ist hier $\frac{140}{700} = \frac{1}{5}$.

32. Zwei Männer, von denen Jeder mit einem Druck von 15 Kilogramm arbeitet, sollen mittelst einer Bodenwinde eine Last von 750 Kilogramm heben. Die Länge der Kurbel sei $0{,}390^m$, der Halbmesser der Windetrommel 0,130.

Das Umsetzungsverhältniß $\varphi = \frac{2 \,.\, 15 \,.\, 0{,}390}{750 \,.\, 0{,}130} = \frac{3}{25}$.

Diesem Werthe zufolge wollen wir bei der Winde ein doppeltes Vorgelege anwenden, so daß wir außer der Kurbel und Trommelwelle noch eine dazwischen liegende Vorgelegewelle gebrauchen. Bezeichnen wir die Halbmesser der Räder von der Kurbel nach der Trommelwelle hin durch r_1, R_1, r_2, R_2, so ist hiernach

$$\varphi = \frac{3}{25} = \frac{r_1}{R_1}\frac{r_2}{R_2},$$

wofür wir $\frac{3}{5} \,.\, \frac{1}{5}$ schreiben könnten. Um aber beide Paare von eingreifenden Rädern gleich groß zu erhalten, nehmen wir $\varphi = \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{3}$, geben den kleineren Rädern 7, den größeren also 21 Zähne.

33. Ein Krahn hat zwei Kurbeln von (R) $0{,}4^m$ Länge, an deren jeder Arbeiter mit einer Kraft von (P) 15 Kilogramm wirkt. An der Kurbelwelle sitzt ein Trieb von (r_2) $0{,}08^m$ Halbmesser und dieses steht im Eingriff mit einem Rad auf der Vorgelegewelle von (R_2) $0{,}28^m$ Halbmesser. Auf der Vorgelegewelle sitzt ein Trieb von (r_1) $0{,}12^m$ Halbmesser und treibt ein Rad auf der Kettentrommelwelle von (R_1) $0{,}50^m$ Halbmesser. Wie groß muß der Halbmesser (r) der Kettentrommel genommen werden, wenn durch die Arbeiter einer Last von (Q) 1000 Kilogramm das Gleichgewicht gehalten werden soll?

$$\frac{30 \,.\, 0{,}4 \,.}{1000 \,.\, r} = \frac{0{,}08}{0{,}28} \cdot \frac{0{,}12}{0{,}50},$$

d. h. $r = 0{,}175^m$, und die Drucke zwischen den Zähnen je zweier mit einander arbeitender Räder, von der Last Q aus gerechnet:

$$X_1 = 350 \text{ Kilogr.},\quad X_2 = 150 \text{ Kilogr.}$$

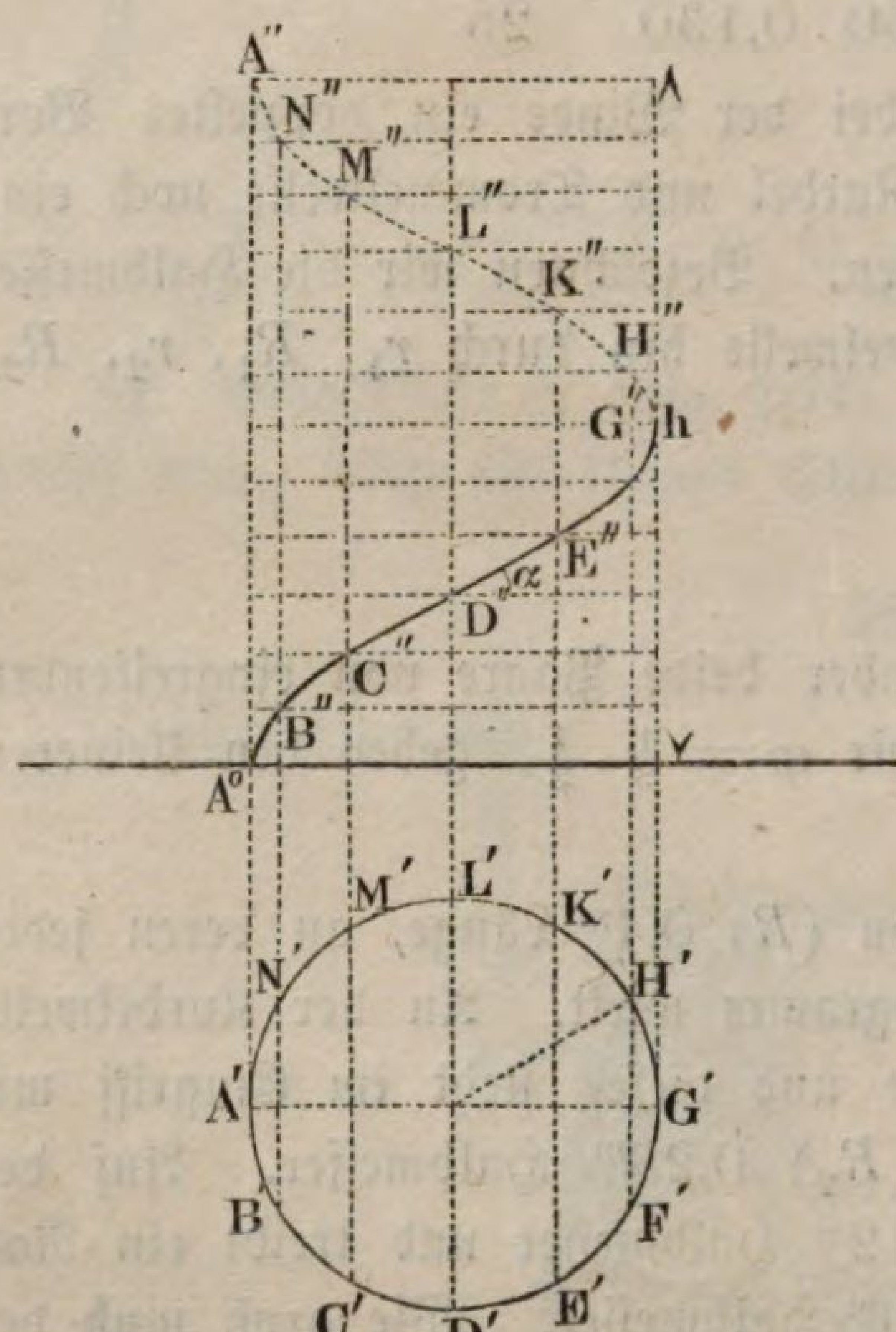
Für $P = 30$ Kilogr.; $R = 448^{mm}$; $r_2 = 52^{mm}$; $R_2 = 260^{mm}$; $r_1 = 104^{mm}$; $R_1 = 624^{mm}$ und $r = 112^{mm}$ ist $Q = 3600$ Kilogr.; $X_1 = 646{,}1$ Kilogr.;

$X_2 = 258{,}4$ Kilogr. Für $P = 25$ Kilogr.; $R = 448^{mm}$; $r_2 = 52^{mm}$; $r_1 = 78^{mm}$; $R_1 = 390^{mm}$; $r = 112^{mm}$ und $Q = 3000$ Kilogr. ist $R_2 = 312^{mm}$; $X_1 = 861{,}5$ Kilogr.; $X_2 = 215{,}4$.

34. Es sei ein normaler Cylinder mit kreisförmiger Basis und eine Ebene gegeben, die denselben in einer Seite ab berührt. In der Ebene nehme man eine Linie cd, welche die Linie ab schneidet und mit ihr einen Winkel α bildet. Die Ebene wälze man um den Cylinder, so daß sie ihn nach und nach in allen Seiten berührt. Die Linie cd schneidet bei dieser Wälzung die sämmtlichen Seiten nach und nach und bildet mit einer jeden den Winkel α.

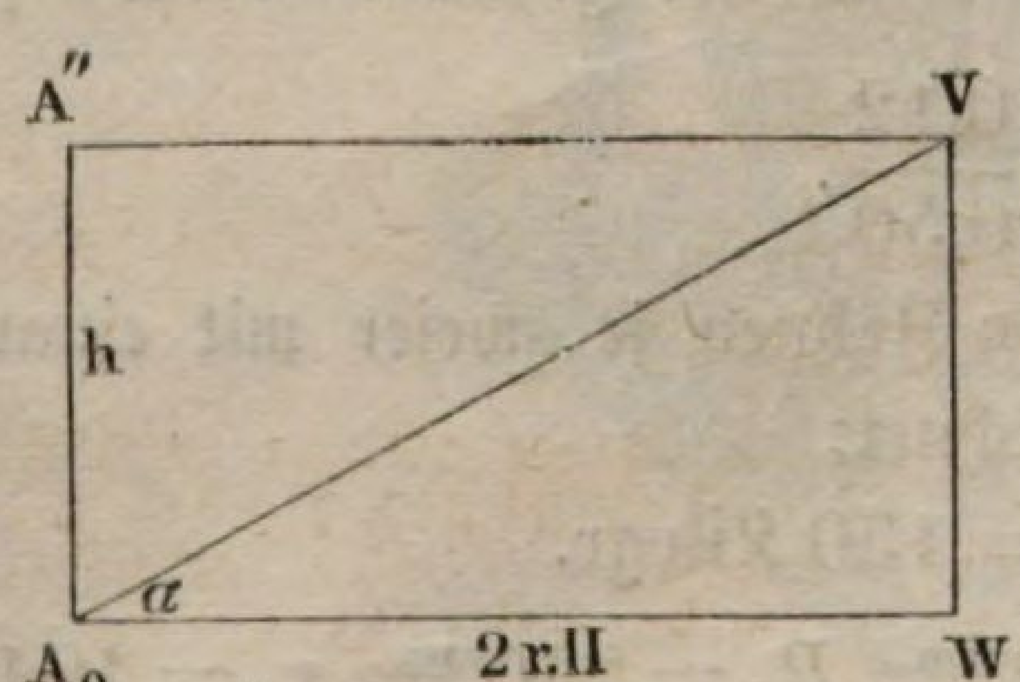
Die Durchschnittspunkte zwischen der Linie cd und den Seiten des Cylinders bilden in ihrer Folge eine krumme Linie von doppelter Krümmung, welche auf dem Cylindermantel liegt. Diese Linie heißt cylindrische Spirale oder Schraubenlinie. Der Winkel α heißt Winkel der Schraubenlinie, und die Linie cd die Erzeugungslinie derselben. Die Fig. 105 zeigt die beiden Projectionen einer Schraubenlinie für eine vollständige Umwälzung der in Betracht gezogenen Ebene. Das Stück $A_0\, G''\, A''$ der Schraubenlinie heißt ein Schraubengang. Die beiden Endpunkte A_0 und A'' eines Schraubenganges liegen auf derselben Seite des Cylinders, und ihre Entfernung auf dieser Seite heißt die Höhe h des Schraubenganges.

Fig. 105.



Aus der angegebenen Bildung der Schraubenlinie folgt unmittelbar, daß die einzelnen Elemente derselben die Seiten des Cylinders unter ihrem Winkel α schneiden. Nachdem die Schraubenlinie auf dem Cylindermantel verzeichnet, lege man durch die beiden Endpunkte eines Schraubenganges zwei Ebenen parallel zur Grundebene des Cylinders. Das zwischen diesen Ebenen gelegene Stück des Cylindermantels denke man mit dem darauf verzeichneten Schraubengange abgewickelt, indem man ihn in der Seite $A_0\, A''$ aufschneidet, welche die beiden Endpunkte des Schraubenganges enthält. Der abgewickelte Cylindermantel bildet ein Rechteck (Fig. 106), dessen eine Seite gleich dem Umfange des Grundkreises, dessen andere aber gleich der Höhe des Schraubenganges ist. Die abgewickelte Schraubenlinie aber bildet

Fig. 106.



in dem entstandenen Rechtecke die Diagonale, weil die Schraubenlinie alle Seiten des Cylinders unter demselben Winkel α schneidet.

Es sei auf einem normalen Cylinder mit kreisförmiger Basis eine Schraubenlinie verzeichnet. Man nehme eine ebene Figur von beliebiger Begrenzung, welche mit der cylindrischen Spirale einen Punkt gemeinschaftlich hat, und führe diese Figur so auf der Spirale fort, daß stets derselbe Punkt in der Schraubenlinie bleibe und daß die Ebene der Figur zur Achse des Cylinders immer dieselbe Lage behalte. Der durch die Bewegung der Figur dargestellte Körper heißt ein Schraubengewinde. Dasselbe erhält je nach der Begrenzung der ebenen Figur verschiedene Namen, so daß man dreieckige, viereckige, runde und andere Schraubengewinde unterscheidet. Die Fig. 107 stellt eine Schraube mit dreieckigem oder scharfkantigem Gewinde, und Fig. 108 eine mit viereckigem Gewinde (flachgängige Schraube genannt)

Fig. 107.

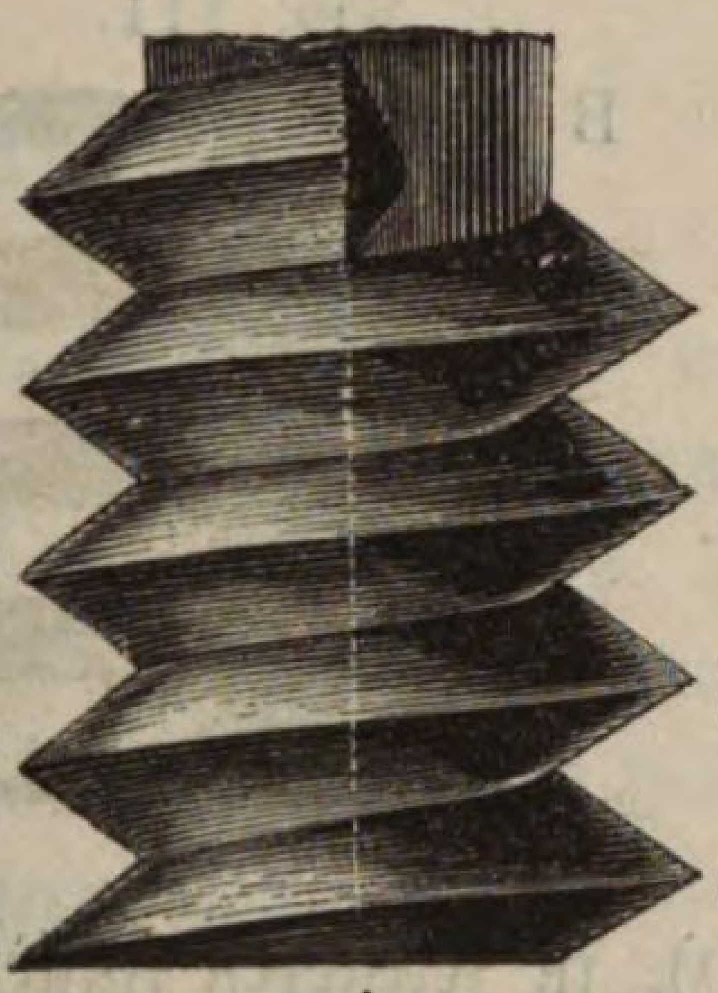
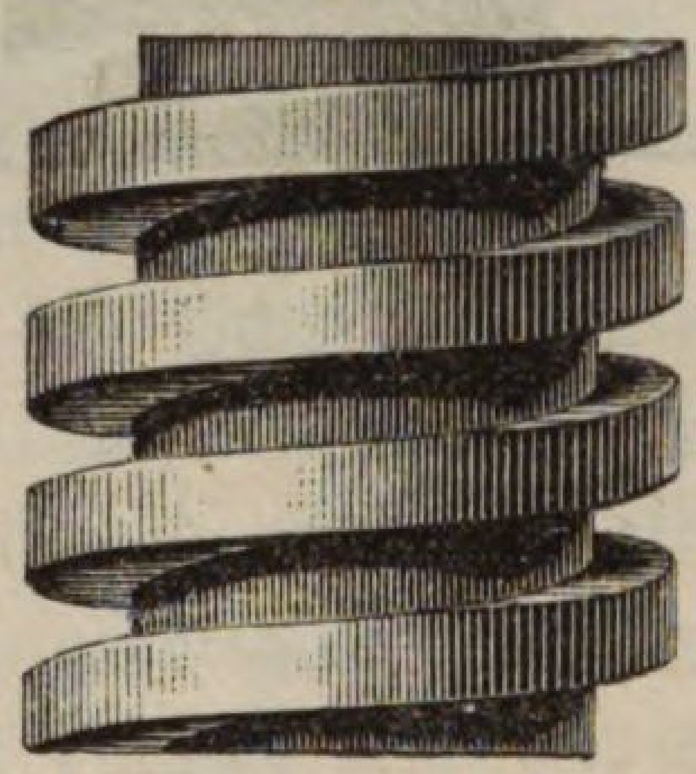


Fig. 108.



vor. Jeder Punkt der erzeugenden Figur beschreibt während der Bewegung eine Schraubenlinie, die mit der gegebenen sämmtlich gleiche Ganghöhe ($BD = DF = CE$) haben, die aber zu verschiedenen normalen Cylindern gehören, welche mit dem gegebenen concentrisch gedacht werden müssen. Hieraus folgt, daß die Winkel der einzelnen Schraubenlinien verschieden sind.

Wird das Gewinde durch eine, durch die Achse des Cylinders gehende Ebene geschnitten, so heißt die Dimension des Gewindedurchschnittes, welche mit der Achse parallel läuft, Gangbreite.

Die Differenz der Halbmesser derjenigen Cylinder, welche zur äußersten und innersten Schraubenlinie gehören, nennt man Gangtiefe.

Die Verbindung des Schraubengewindes mit dem zugehörigen normalen Cylinder heißt eine Schraubenspindel, der Cylinder selbst wird der Kern der Schraube genannt. Zu einer Schraubenspindel gehört jederzeit eine sogenannte Schraubenmutter (Fig. 109 a. f. S.). Diese ist ein hohler Cylinder, auf dessen innerem Mantel sich ein vertieftes Schraubengewinde befindet. Bei der Anwendung wird die Schraubenspindel durch eine Drehung um ihre Achse in die Schraubenmutter hineingedreht, oder umgekehrt die Mutter durch eine

entsprechende Drehung auf die Schraube gebracht. Die Schrauben sind gewöhnlich aus *rechten Gewinden* construirt, d. h. das Gewinde steigt von

Fig. 109.

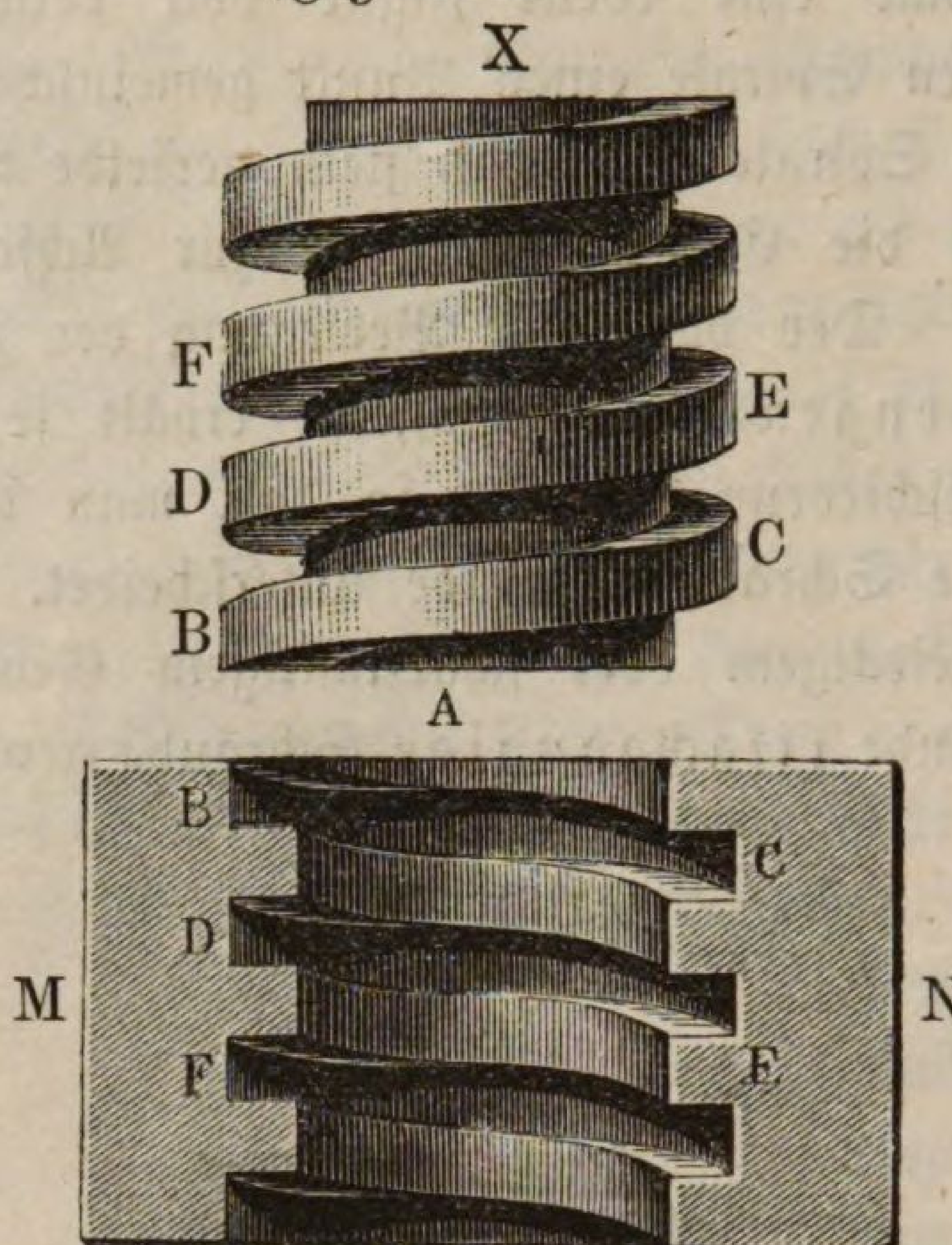


Fig. 110.

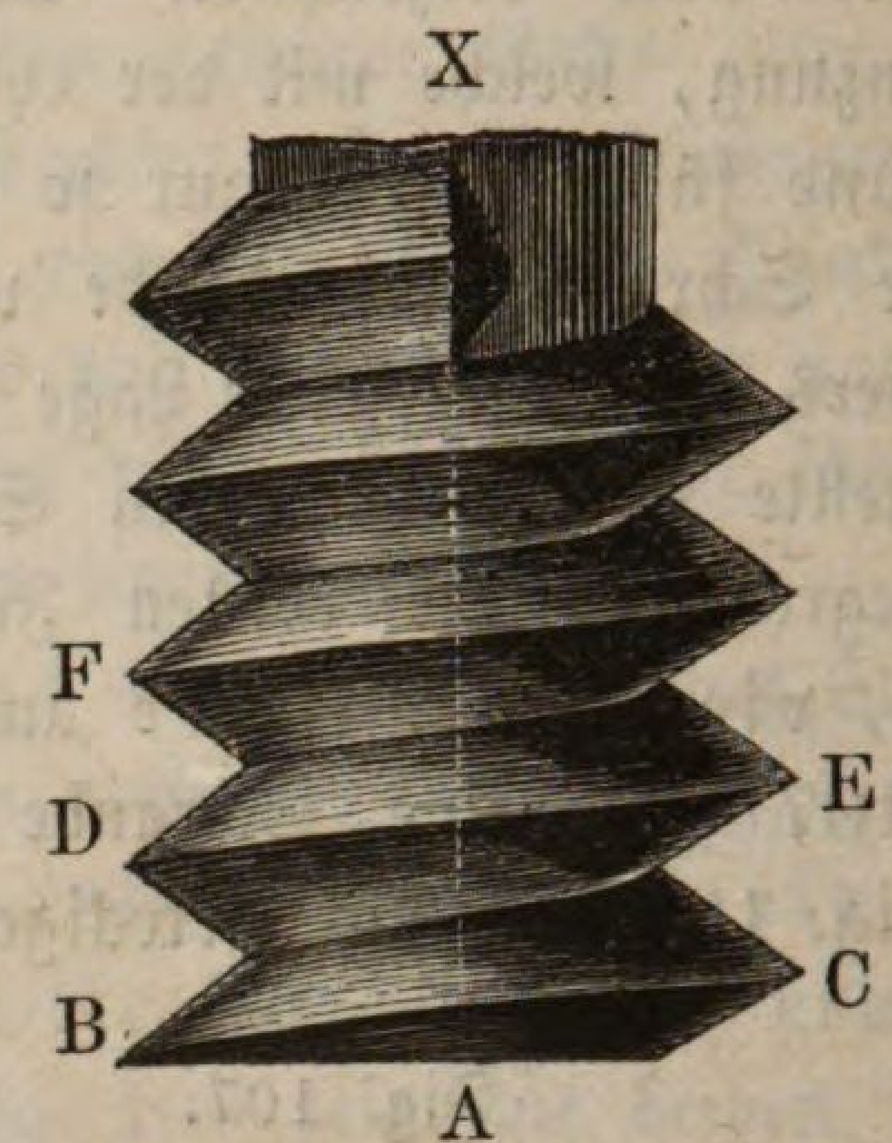
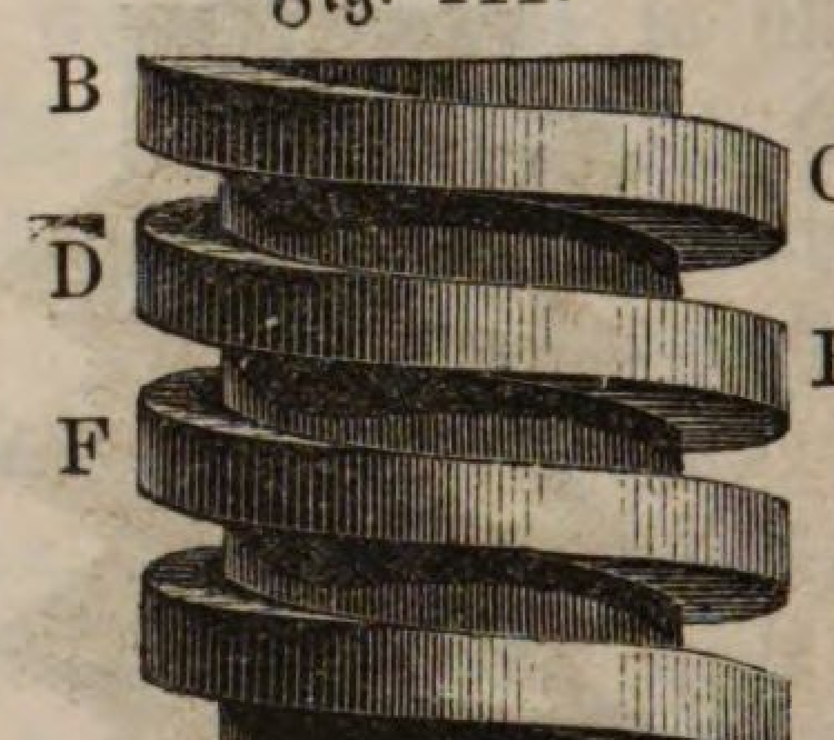


Fig. 111.



der linken zur rechten Seite hinauf (Fig. 110), in selteneren Fällen stellt man die Schraube mit *linken Gewinden* her (Fig. 111).

Eine Schraube heißt eine *n* fache, wenn ihrem Gewinde *n* Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe zu Grunde liegen. In diesem Falle wird ein normaler Querschnitt der Schraube *n* verschiedene Anfänge des Gewindes erkennen lassen.

Fig. 112.

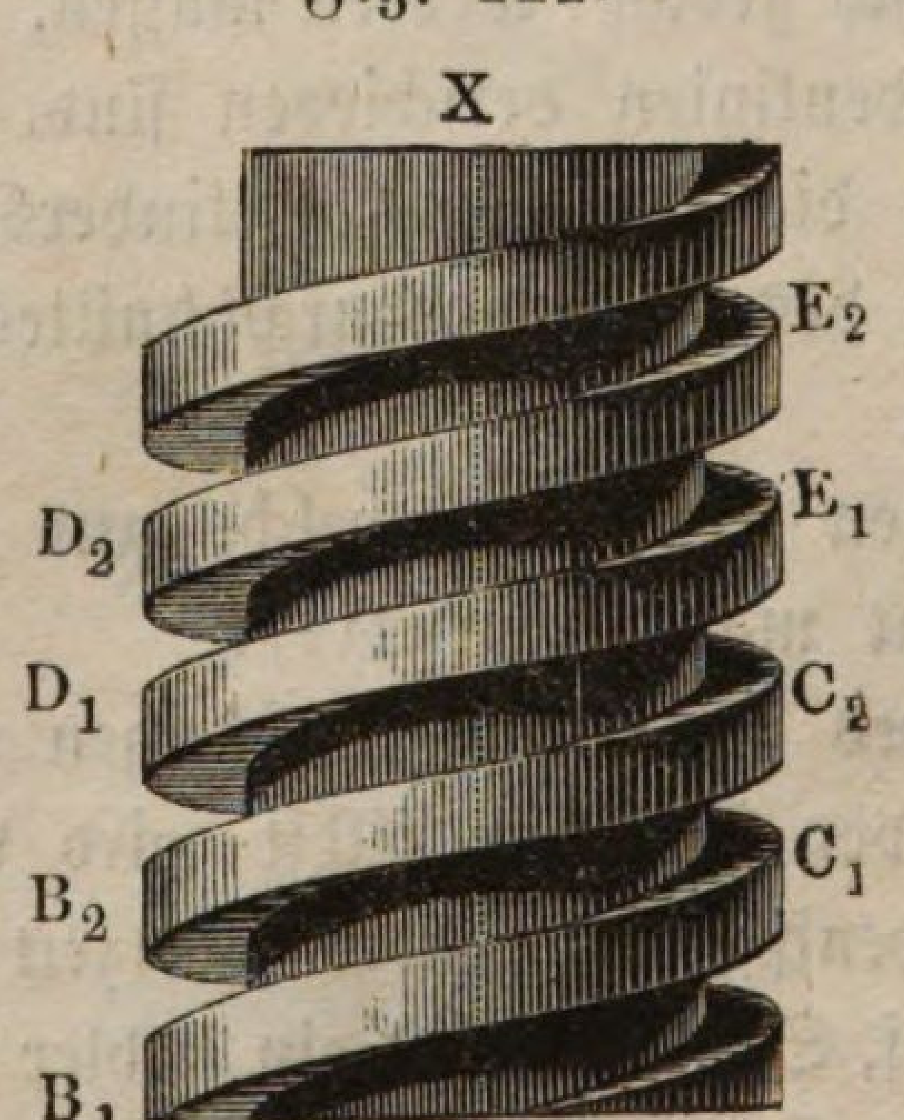
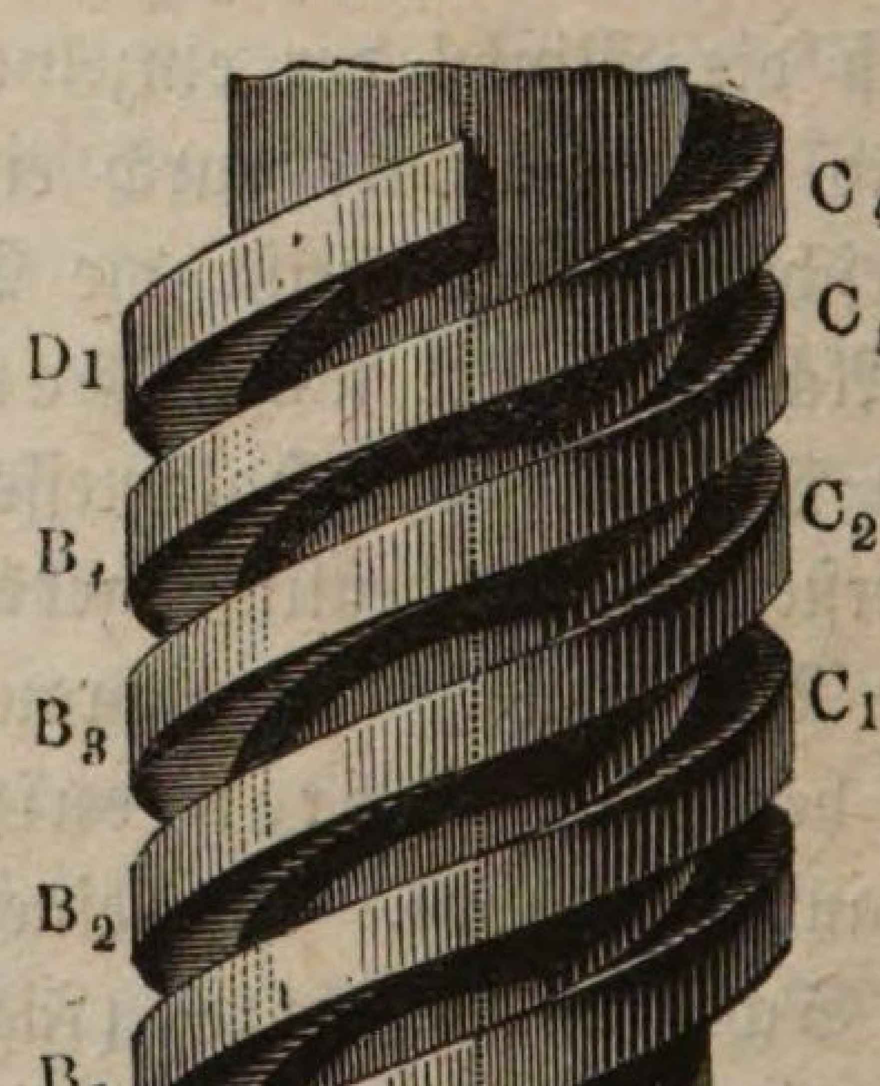


Fig. 113.



Diese letzte Anordnung findet nur bei Schrauben mit bedeutender Ganghöhe statt, niemals bei den Befestigungsschrauben. Fig. 112 zeigt eine zweifache und Fig. 113

eine vierfache flachgängige Schraube mit rechten Gewinden, $B_1\, D_1$, $B_2\, D_2$ u. s. w. geben die Ganghöhe dieser Schrauben an.

35. Es sei eine Schraube in Verbindung mit ihrer vollkommen festen Mutter gegeben (Fig. 114). Ein in Richtung der Schraubenachse oder parallel derselben wirksamer Druck Q würde, wenn die Mutter nicht vorhanden wäre, eine Bewegung der Schraube in Richtung des Druckes hervorrufen. Die Mutter verhindert diese beabsichtigte Bewegung und gestattet dagegen eine Drehung um die Achse. Zur Verhinderung derselben können wir im Umfange der

Fig. 114.

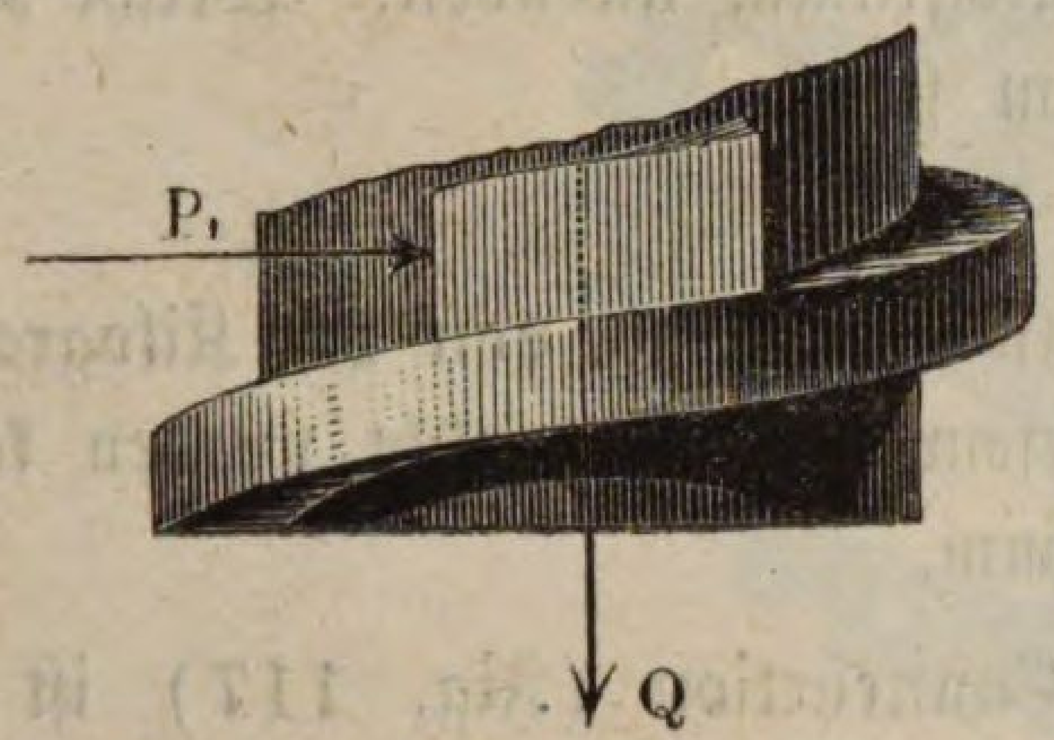
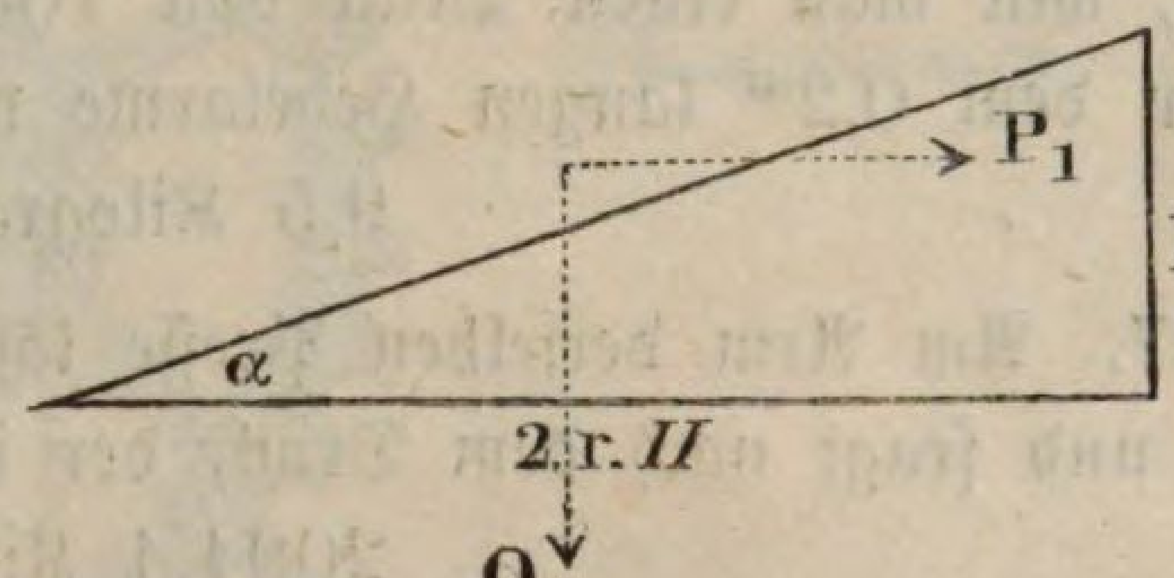


Fig. 115.

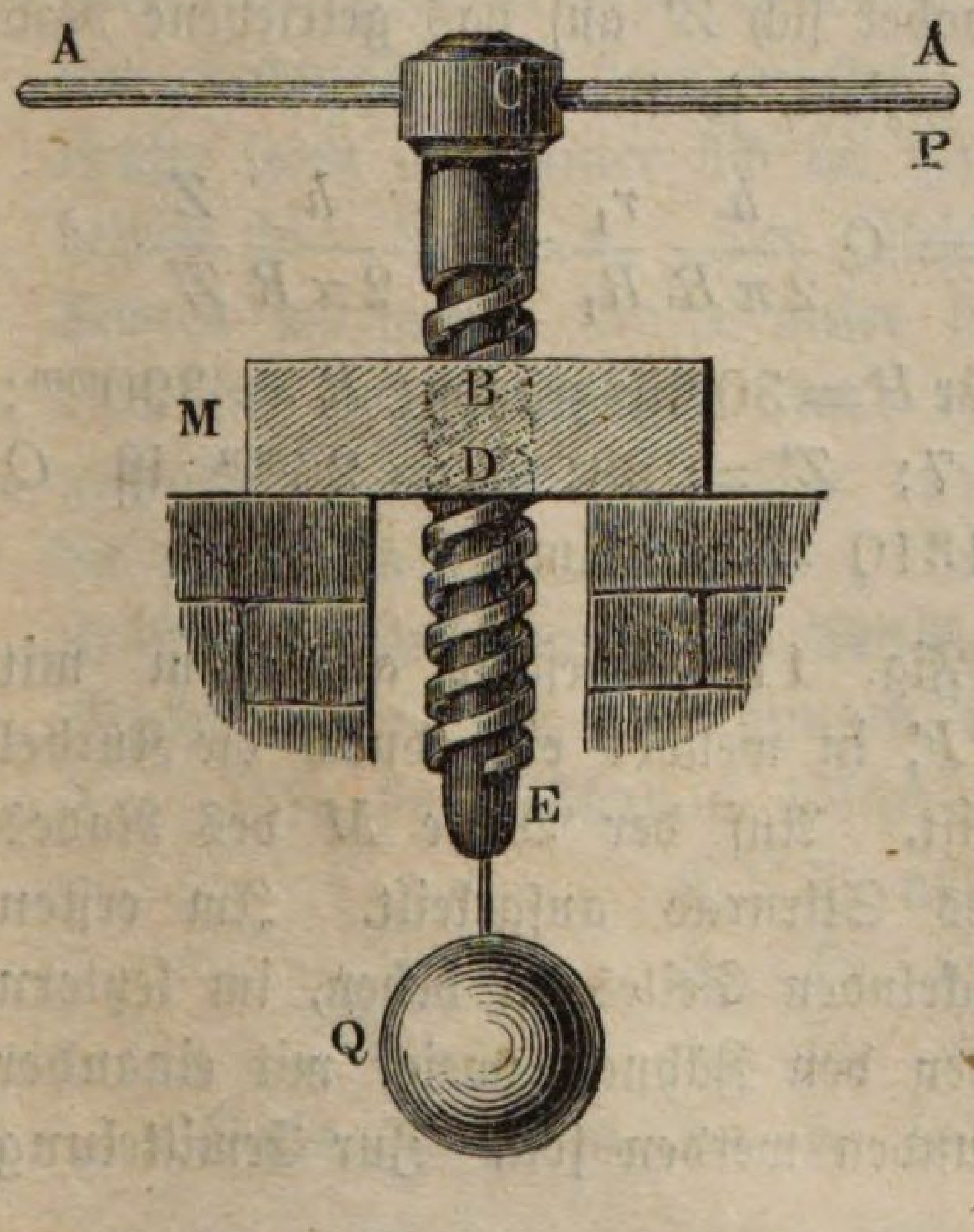


Schraube normal zur Achse derselben eine Kraft P_1 anbringen, die sich der Drehung widersetzt. Denken wir die Fläche des Schraubengewindes (Spiralfläche) aus unendlich vielen Schraubenlinien zusammengesetzt, so wirken die beiden Kräfte Q und P_1 in einer mittleren Schraubenlinie, für die h (Fig. 115) die Ganghöhe und r der Halbmesser des zugehörigen Cylinders sein mag. Diese mittlere Spirallinie wickeln wir ab, so entsteht eine um den Winkel α zur Horizontalen geneigte gerade Linie, die verkörpert eine geneigte Ebene vorstellt, auf welche die beiden Kräfte Q und P_1 wirken.

Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$P_1 = Q\, tang\, \alpha = Q \frac{h}{2\, \pi\, r}.$$

Fig. 116.



Wirkt die Kraft, wie es gewöhnlich der Fall ist, nicht im Umfange der Schraube, sondern wird sie (Fig. 116) durch eine Kraft P ersetzt, die an einem Arm $CA = p$ wirkt, so sind die Momente der in parallelen Ebenen wirksamen Kräftepaare $P_1\, r$ und $P p$ gleich zu setzen und wir erhalten deshalb

$$P = P_1 \frac{r}{p} = Q \frac{r}{p} \frac{h}{2\pi r} = Q \frac{h}{2\pi p}.$$

Bei Benutzung des Princips der virtuellen Momente erhält man den letzten Ausdruck unmittelbar. Wir denken der Einrichtung (Fig. 116) eine ihrer

Verbindung verträgliche unendlich kleine Bewegung ertheilt, lassen also die Kraft P, in A wirksam, den $n$ten Theil einer Umdrehung machen, dann wird die Last Q um den $n$ten Theil der Ganghöhe, je nach der Bewegung von P, gehoben oder gesenkt. Nimmt man n unendlich groß, so sind $\frac{2\pi p}{n}$ und $\frac{h}{n}$ die virtuellen Geschwindigkeiten, daher

$$P\frac{2\pi p}{n} - Q\frac{h}{n} = 0 \text{ oder } P = Q\frac{h}{2\pi p}.$$

36. Mittelst einer Schraubenpresse, bei der die Schraubenganghöhe 12^{mm} beträgt, will man einen Druck von 1000 Kilogramm ausüben. Welche Kraft muß an dem $0{,}2^m$ langen Hebelarme wirksam sein?

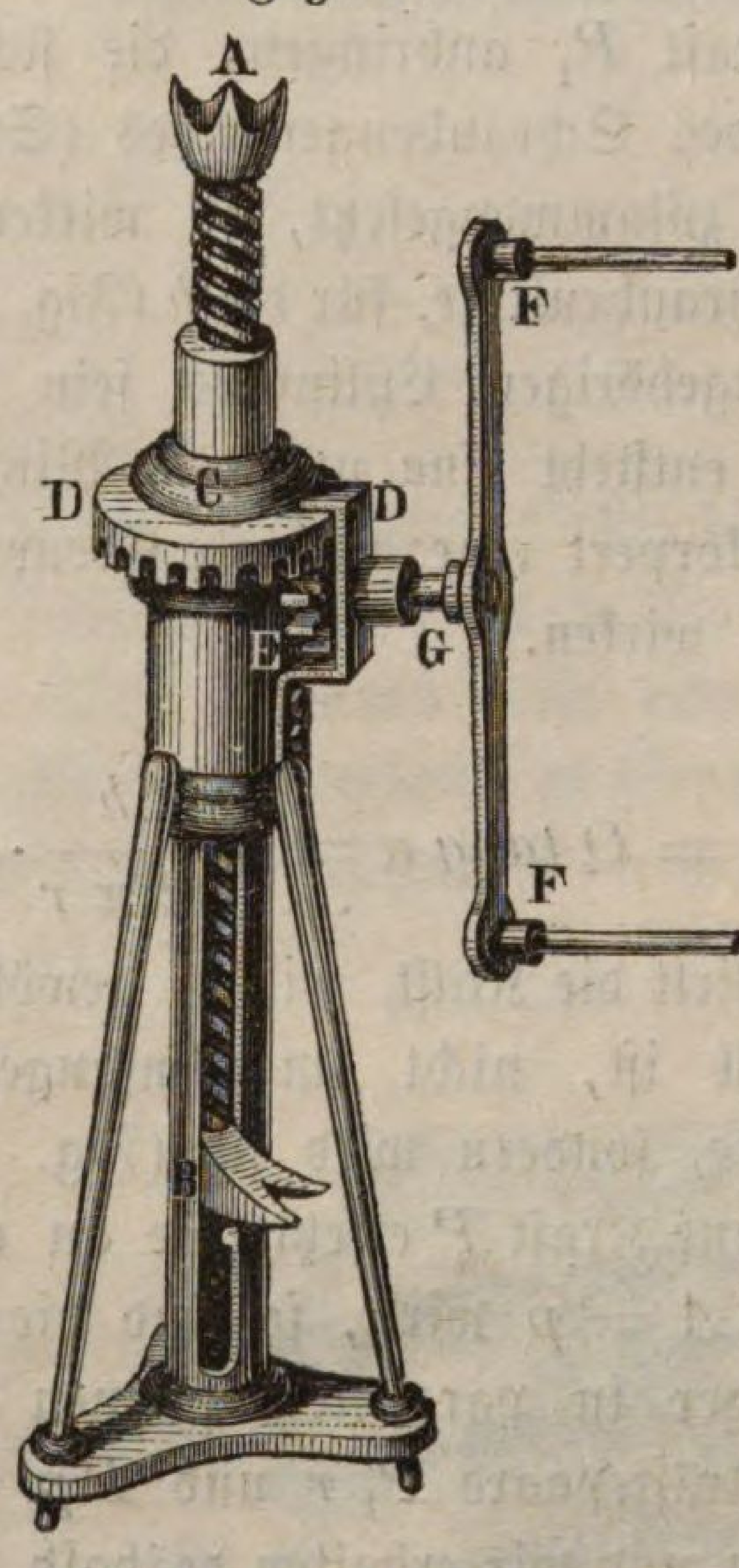
9,5 Kilogramm.

37. Am Arm derselben Presse läßt man eine Kraft von 20 Kilogramm wirken und fragt nach dem Druck, der in diesem Falle ausgeübt werden kann.

2094,4 Kilogramm.

38. Bei der Winde nebenstehender Construction (Fig. 117) ist die Mutter C der schraubenförmigen Hebestange AB mit dem Zahnrade DD in fester Verbindung. In dieses greift das Trieb E, auf dessen Welle sich zu gleich die Doppelkurbel FF befindet. Die hieran wirkende Kraft P soll der in A oder an dem Haken B wirksamen Last Q das Gleichgewicht halten. Nehmen wir die Länge der Kurbel $FG = R$, die Ganghöhe der Schraube $= h$, die Halbmesser der beiden eingreifenden Räder r_1 und R_1, oder führt man statt dieser die Zähnezahlen Z und Z' ein, wobei sich Z' auf das getriebene Rad DD bezieht, so ist

Fig. 117.



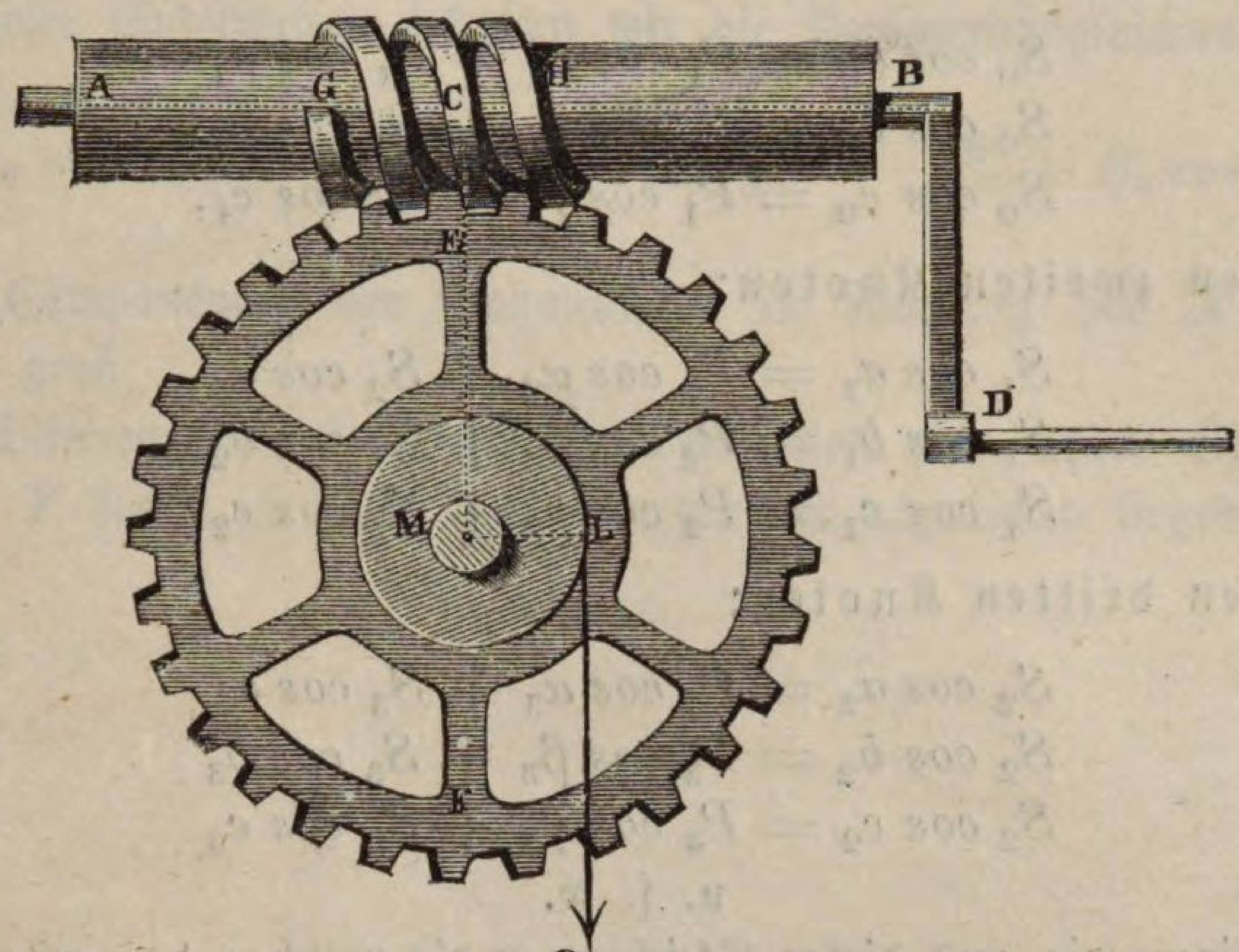
$$P = Q\frac{h}{2\pi R}\frac{r_1}{R_1} = Q\frac{h}{2\pi R}\frac{Z}{Z'}.$$

Für $P = 30$ Kilogramm; $R = 390^{mm}$; $Z = 7$; $Z' = 28$; $h = 26^{mm}$ ist $Q = 11310$ Kilogramm.

39. Die Schraube ohne Ende (Fig. 118) besteht aus dem mit schiefstehenden Zähnen versehenen Rade EF, in welches eine durch die Kurbel BD umgedrehte Schraube GCH eingreift. Auf der Welle M des Rades ist die Seiltrommel oder ein gewöhnliches Stirnrad aufgekeilt. Im ersten Falle ist eine Last Q mittelst des aufzuwickelnden Seiles zu heben, im letztern Falle ist dagegen Q der Widerstand zwischen den Zähnen zweier mit einander im Eingriff stehender Räder, welcher überwunden werden soll. Zur Ermittelung

des Gleichgewichtszustandes zwischen der an der Kurbel wirkenden Kraft P und diesem Widerstande Q sei h die Ganghöhe der Schraube, R die Länge der

Fig. 118.



Kurbel, R_1 Halbmesser des in die Schraube eingreifenden Rades, r Halbmesser der Seiltrommel oder des betreffenden Zahnrades.

$$P = Q \frac{h}{2\pi R} \frac{r}{R_1}.$$

Für $P = 20$ Kilogr.; $R = 390^{mm}$; $r = 78$; $R_1 = 364^{mm}$; $h = 13^{mm}$ ist $Q = 17590$ Kilogr. circa, und der Druck X zwischen den Radzähnen und den Schraubengängen beträgt $Q \frac{r}{R_1} = 3769{,}3$ Kilogramm.

40. Ein Seil ohne Gewicht, das mit einem Ende befestigt und an verschiedenen Punkten desselben durch die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$, die der Größe und Richtung nach gegeben sind, angegriffen wird, behaupte seine Lage, die Kräfte seien also unter sich im Gleichgewichte. Die Angriffspunkte der Kräfte heißen hier **Knoten**. Der Gleichgewichtszustand bedingt, daß die an einem Knoten wirksamen Kräfte unter sich im Gleichgewichte sein müssen, da das Seil im entgegengesetzten Falle vermöge seiner Beweglichkeit in andere Lagen gebracht werden würde. Die das Gleichgewicht hervorbringenden Kräfte sind die gegebenen P_1, P_2, $P_3 \ldots$, und die durch dieselben hervorgerufenen inneren Kräfte die Spannungen des Seiles, zwischen zwei auf einander folgenden Knoten. Bezeichnen wir die Spannungen von dem befestigten Ende aus mit S_0, S_1, $S_2 \ldots$, so findet hiernach Gleichgewicht statt zwischen

S_0, P_1 und S_1,
S_1, P_2 » S_2,
S_2, P_3 » S_3 u. s. w.

Diese Kräfte wirken zu je drei an einem Punkte, müssen also nach

§. 24. 2. in einer Ebene liegen. Die Gleichgewichtsbedingungen sind daher, wenn die Kräfte die Winkel α, β, γ, die Spannungen dagegen die Winkel a, b, c mit den Coordinatenachsen bilden, n. F. 46

für den ersten Knoten:

$$S_0 \cos a_0 = P_1 \cos \alpha_1 + S_1 \cos a_1$$
$$S_0 \cos b_0 = P_1 \cos \beta_1 + S_1 \cos b_1$$
$$S_0 \cos c_0 = P_1 \cos \gamma_1 + S_1 \cos c_1,$$

für den zweiten Knoten:

$$S_1 \cos a_1 = P_2 \cos \alpha_2 + S_2 \cos a_2$$
$$S_1 \cos b_1 = P_2 \cos \beta_2 + S_2 \cos b_2$$
$$S_1 \cos c_1 = P_2 \cos \gamma_2 + S_2 \cos c_2,$$

für den dritten Knoten:

$$S_2 \cos a_2 = P_3 \cos \alpha_3 + S_3 \cos a_3$$
$$S_2 \cos b_2 = P_3 \cos \beta_3 + S_3 \cos b_3$$
$$S_2 \cos c_2 = P_3 \cos \gamma_3 + S_3 \cos c_3$$

u. s. w.

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen die zwischen der ersten und letzten Spannung liegenden Seilspannungen, so entsteht für die Annahme von drei Knoten:

$$S_0 \cos a_0 = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + S_3 \cos a_3$$
$$S_0 \cos b_0 = P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + P_3 \cos \beta_3 + S_3 \cos b_3$$
$$S_0 \cos c_0 = P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + P_3 \cos \gamma_3 + S_3 \cos c_3.$$

In gleicher Weise wird man die drei Gleichgewichtsbedingungen aufstellen können, wenn 4, 5, 6 ... allgemein n Knoten vorhanden sind, wobei darauf zu achten, daß die letzte Spannung stets gleich der am Ende des Seiles angebrachten Kraft sein wird, also immer als gegeben angesehen werden muß.

Die obigen Formeln werden sich der Form nach gar nicht ändern, wenn man statt der ersten Spannung S_0 irgend eine andere S_m als Ausgangspunkt wählt, so daß die obigen Formeln zur Bestimmung der Spannung irgend eines Seilendes zwischen zwei auf einander folgenden Knoten benutzt werden können. Hiernach sind allgemein für ein Seil, das von Kräften in n festen Knoten angegriffen wird, die Componenten der m ten Spannung:

$$S_m \cos a_m = P_{m+1} \cos \alpha_{m+1} + P_{m+2} \cos \alpha_{m+2} + \cdots P_n \cos \alpha_n + S_n \cos a_n$$
$$S_m \cos b_m = P_{m+1} \cos \beta_{m+1} + P_{m+2} \cos \beta_{m+2} + \cdots P_n \cos \beta_n + S_n \cos b_n$$
$$S_m \cos c_m = P_{m+1} \cos \gamma_{m+1} + P_{m+2} \cos \gamma_{m+2} + \cdots P_n \cos \gamma_n + S_n \cos c_n.$$

Die von dem Seile gebildete Linie heißt, da das zwischen zwei auf einander folgenden Knoten liegende Seilstück eine gerade Linie bildet, ein Seilpolygon. Sind die angebrachten Kräfte P_1, P_2, P_3 ... sämmtlich parallel und nach derselben Richtung wirksam, so kann das beabsichtigte Gleichgewicht nur bestehen, wenn das Seilpolygon mit den Kräften in derselben Ebene liegt. Nehmen wir diese als XY-Ebene und die Kräfte parallel der

Y=Achse an, so existiren in Richtung der Z=Achse keine Componenten, d. h. die dritte der oben aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen verschwindet. Die Winkel α werden sämmtlich gleich 1 R, ihr Cosinus also gleich Null, die Winkel β werden dagegen zu Null, deren Cosinus also gleich 1.

Nach dieser Substitution erhalten wir die Bedingungsgleichungen:

$$S_m \cos a_m = S_n \cos a_n,$$

$$S_m \cos b_m = P_{m+1} + P_{m+2} + P_{m+3} + \cdots P_n + S_n \cos b_n,$$

d. h.

1. die Componenten der Spannungen in Richtung der X=Achse sind überall gleich groß;

2. die Differenz der Componenten der ersten und letzten Spannung in Richtung der Y=Achse ist gleich der Summe der dazwischen liegenden Kräfte.

Zweites Capitel.

Vom Schwerpunkte.

41 Die Anziehungskraft der Erde, die Schwerkraft, denken wir im Mittelpunkte der Erde concentrirt, da alle Körper beim freien Fall die Richtung nach dem Mittelpunkte der Erde einschlagen. Die Linie, in der der freie Fall erfolgt, heißt lothrechte, senkrechte, verticale Linie für den Punkt der Erdoberfläche, welcher von dem Körper beim freien Fall getroffen wird. Die in diesem Punkte zur lothrechten Linie rechtwinkelig gedachte Ebene heißt Horizontalebene des Punktes, und jede in dieser Ebene gezogene Linie wird horizontale, wagerechte Linie genannt. Der Faden eines ruhig hängenden Bleiloths giebt eine senkrechte Linie, d. i. also die Richtung, in welcher die Schwerkraft wirkt. Alle Körper sind an demselben Orte gleich schwer, d. h. sie fallen im luftleeren Raume, in derselben Zeit, um dieselbe Strecke, die Schwerkraft greift also die materiellen Punkte aller Körper in gleicher Weise an, ertheilt kleinen und großen Körpern von dem verschiedensten Material beim freien Fall dieselbe Geschwindigkeit. Aus der letzteren läßt sich also die Menge des Trägen, die Masse in dem Körper nicht erkennen, hierzu ist vielmehr der bei der gehinderten Bewegung ausgeübte Druck, das absolute Gewicht der Körper nothwendig, da dieses ebenso wie die Anziehung der Schwerkraft, proportional der Masse wächst. Da Körper von demselben Volumen erfahrungsmäßig nicht denselben Druck ausüben, so kann dies nach dem Vorhergehenden nur darin liegen, daß der eine Körper eine größere Anzahl materieller Punkte, als der andere enthält, eine größere Masse als dieser besitzt, also kurz gesagt, dichter ist. Ein Körper heißt gleichförmig dicht, homogen, wenn er in gleichen Volumtheilen gleiche Massen enthält, im entgegengesetzten Falle nennt man den Körper ungleichförmig dicht. In einem gleichförmig dichten Körper bezeichnet man die in der Volumeneinheit enthaltene Menge Masse mit Dichtigkeit oder mit specifischer Masse. Bei einem ungleichförmig dichten Körper, dessen Dichtigkeit also im Allgemeinen von Punkt zu Punkt veränderlich ist, giebt man die Dichtigkeit an einer bestimmten Stelle durch die Menge Masse an, welche die Volumeneinheit enthalten würde, wenn diese Volumeneinheit überall gerade so, wie an der betrachteten Stelle, mit Masse erfüllt wäre. Die Materie läßt

sich aber nur durch Gewichte messen, sodaß man als Maß der Dichtigkeit das Gewicht der Volumeneinheit, das specifische Gewicht, benutzt.

Als Volumeneinheit dient hier das Kubikdecimeter, dessen Gewichte in Kilogrammen die specifischen Gewichte der verschiedenen Körper liefern. Wird das Volumen eines Körpers mit V, sein specifisches Gewicht mit γ und sein absolutes Gewicht mit Q bezeichnet, so ist

$$Q = V \cdot \gamma \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (99)$$

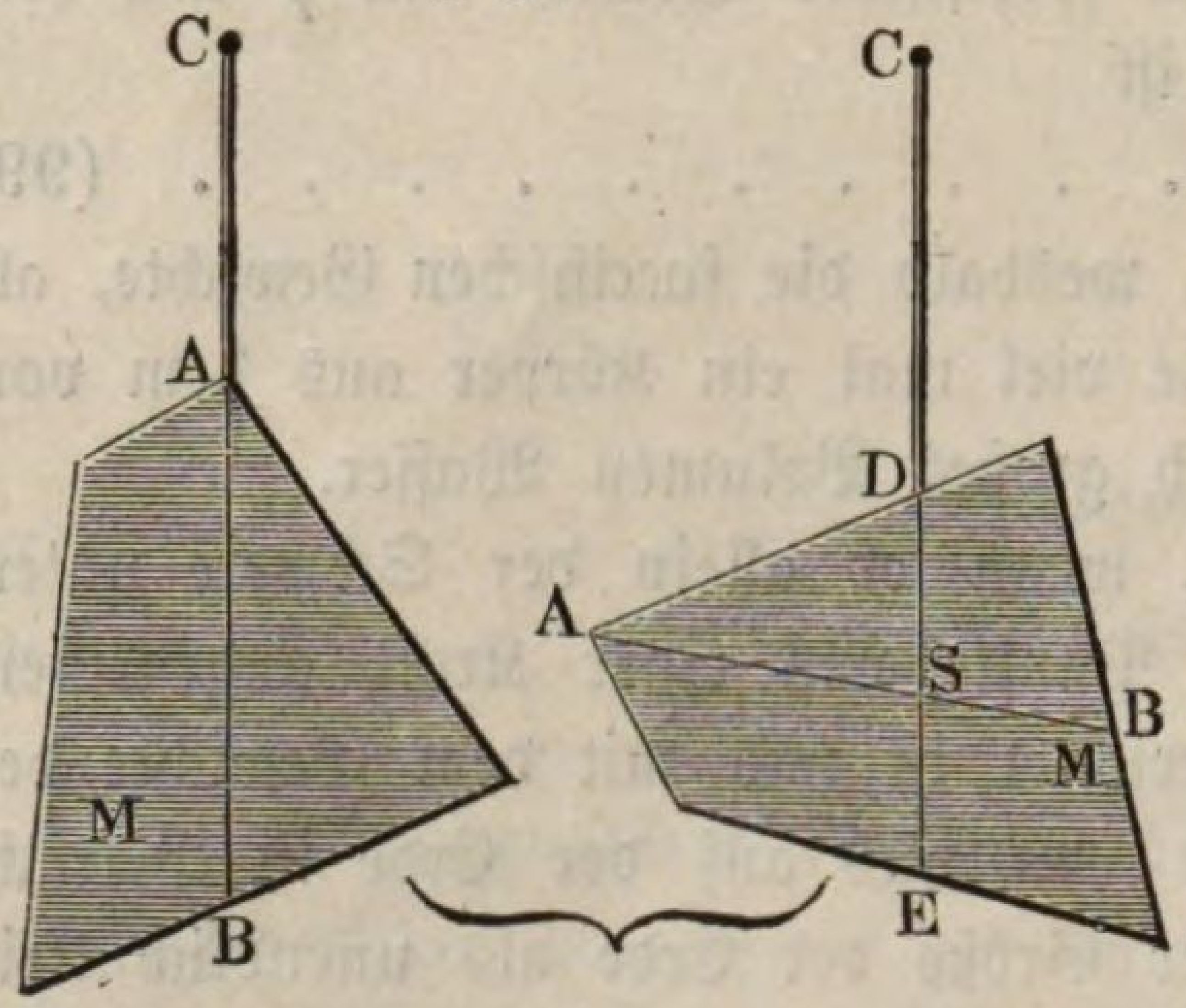
Für Wasser ist $\gamma = 1$ Kilogramm, weshalb die specifischen Gewichte, als Zahlen angesehen, zugleich angeben, wie viel mal ein Körper aus dem vorgelegten Stoff schwerer ist, als ein gleich großes Volumen Wasser.

Ein Körper ist nach dem Vorigen, wenn er allein der Schwere unterworfen ist, in jedem seiner materiellen Punkte von einer Kraft angegriffen, die nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet ist und mit dem Gewichte des materiellen Punktes übereinstimmt. Die von uns auf der Erde in Betracht gezogenen Körper sind im Verhältniß der Größe der Erde als unendlich klein anzusehen, sodaß wir annehmen dürfen, sämmtliche den Körper angreifende Kräfte sind parallel und gleich gerichtet. Außerdem müssen wir die Kräfte bei vollkommen homogenen Körpern auch vollkommen gleich betrachten. Ist andererseits eine beliebige Anzahl von Körpern zu einem System untereinander vereinigt, oder hatte der vorgelegte Körper nicht durchgehends dieselbe Dichtigkeit, so bleibt der Körper, oder das fest verbundene System von Körpern, immer noch von parallelen und gleichgerichteten Kräften angegriffen, die in ihrer Größe allerdings nicht mehr übereinstimmen. In allen Fällen lassen sich diese parallelen Schwerkräfte nach §. 38 und F. 92 durch eine einzige Resultante ersetzen, welche gleich ist der Summe der einzelnen Schwerkräfte, also gleich dem Gewicht des Körpers oder der zu einem festen System verbundenen Körper. Weiter giebt es nach F. 93 jederzeit einen ganz bestimmten Punkt, der als Angriffspunkt dieser Resultante angesehen werden muß und dessen Lage sich durch die Coordinaten x, y, z nach F. 94 bestimmt. Dieser Mittelpunkt des Systems paralleler Kräfte heißt in dem vorliegenden Falle Schwerpunkt des Körpers oder des Systems fest verbundener Körper. In dem Schwerpunkte kann man sich also das Gewicht eines Körpers oder mehrerer zu einem festen System verbundener Körper vereinigt denken, und durch Unterstützung oder Festhalten des Schwerpunktes muß der Körper oder das System in jeder beliebigen Lage verharren. Für jede durch den Schwerpunkt eines festen Systems oder Körpers gelegte Ebene, die als YZ-Ebene angesehen werden mag, ist x, d. h. $\Sigma P_1 x_1$, nach F. 95 gleich Null. Und umgekehrt wird für irgend eine Ebene, die durch ein System von schweren Punkten gelegt ist, $\Sigma P_1 x_1$ gleich Null, so muß der Schwerpunkt des Systems in dieser Ebene liegen. Jede durch den Schwerpunkt eines Systems gelegte Ebene heißt eine Schwerebene, ebenso wird die gerade Linie, die den Schwerpunkt des Systems enthält, Schwerlinie genannt.

In constructiver Hinsicht ist hiernach der Schwerpunkt bestimmt durch zwei Schwerlinien, oder durch eine Schwerebene und eine Schwerlinie, welche die

Ebene schneidet. Wird z. B. ein Körper M (Fig. 119) nach und nach an zwei verschiedenen Punkten A und D mittelst eines Fadens in C aufgehängt, so liefern die verlängerten Fadenrichtungen die Schwerlinien AB und DE, deren Durchschnittspunkt S also der Schwerpunkt des Körpers sein muß.

Fig. 119.



Bezeichnen wir die Gewichte der in Betracht zu ziehenden Massen mit $P_1, P_2, P_3 \ldots$, so sind die in §. 93 aufgestellten Formeln zur Berechnung der Coordinaten des Schwerpunktes unmittelbar zu benutzen.

Wir haben also hiernach:

$$x = \frac{\Sigma P_1 x_1}{\Sigma P_1},\; y = \frac{\Sigma P_1 y_1}{\Sigma P_1},$$
$$z = \frac{\Sigma P_1 z_1}{\Sigma P_1}.$$

Bei den folgenden Untersuchungen setzen wir **homogene** Körper voraus, d. h. solche Körper, die durchgehends dieselbe Dichtigkeit haben. Jede der wirksamen Kräfte läßt sich daher durch das Product aus Volumen in die Dichtigkeit ersetzen.

Bezeichnen wir die einzelnen Volumina des Körpers mit $V_1, V_2 \ldots$, die Dichtigkeit desselben mit γ, so ist allgemein n. §. 99:

$$\begin{aligned}\Sigma P_1 x_1 &= \Sigma V_1 \gamma x_1 \\ \Sigma P_1 y_1 &= \Sigma V_1 \gamma y_1 \\ \Sigma P_1 z_1 &= \Sigma V_1 \gamma z_1 \\ \Sigma P_1 &= \Sigma V_1 \gamma\end{aligned}$$

Bei homogenen Körpern läßt sich aus den Summen der gemeinschaftliche Factor γ herausziehen, weshalb die Coordinaten des Schwerpunktes sich folgendermaßen umändern:

$$\left.\begin{aligned}x &= \frac{\Sigma V_1 x_1}{\Sigma V_1} \\ y &= \frac{\Sigma V_1 y_1}{\Sigma V_1} \\ z_1 &= \frac{\Sigma V_1 z_1}{\Sigma V_1}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

Die Gruppirung materieller Punkte kann auf beliebige Weise vorgenommen werden, wodurch physische Linien, physische Flächen oder Körper entstehen.

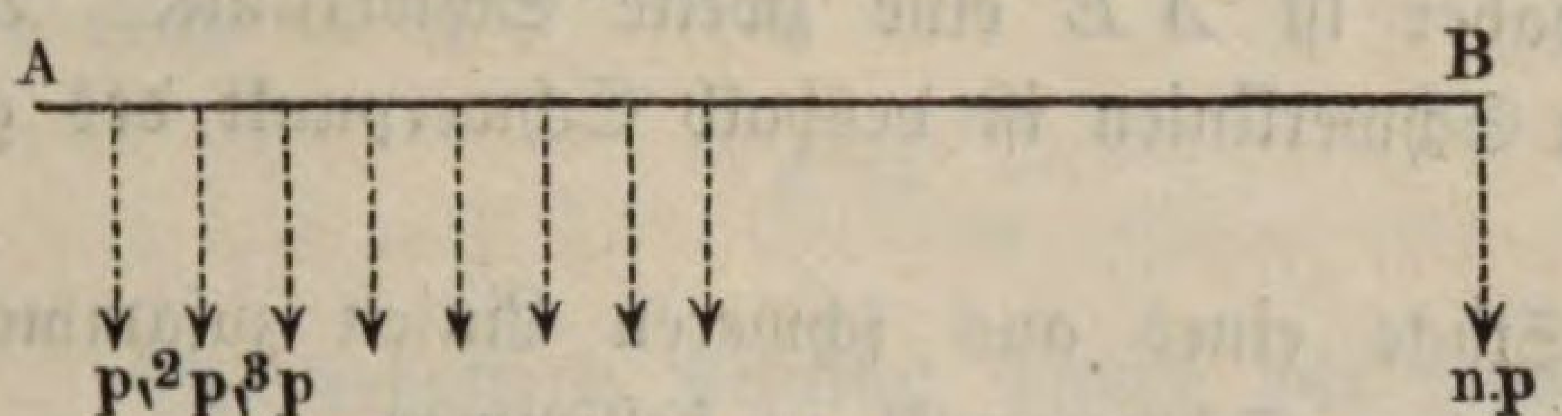
Dehnen wir die Schwerpunktsbestimmung so weit aus, so sind nach Bedürfniß eine, zwei oder drei der letzten Formeln zu benutzen und darin statt des Volumens die Länge der Linie, die Größe der Fläche oder das Körpervolumen einzuführen, statt der Dichtigkeit dagegen ist das Gewicht der Längen-, Flächen- oder Körpereinheit zu denken.

Durch Aufstellung der letzten Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes ist die ganze Untersuchung der reinen Mathematik überwiesen worden; wir werden im Folgenden bald die constructive Methode, bald den Weg durch Rechnung oder auch beide Hülfsmittel zugleich zur Auffindung des Schwerpunktes benutzen.

Schwerpunktsbestimmungen. a) Für Linien. Der Schwerpunkt einer geraden Linie, die aus gleich schweren materiellen Punkten besteht, liegt in deren Mitte. Ebenso findet sich der Schwerpunkt für zwei gleich schwere materielle Punkte auf der Mitte der geraden Verbindungslinie. 42

Eine gerade Linie AB (Fig. 120) bestehe aus n gleichen Theilen. In den einzelnen Theilpunkten wirken die Gewichte $1p$, $2p$, $3p \ldots np$. Es ist der Schwerpunkt der Linie zu bestimmen. Derselbe liegt auf der Linie, seine Entfernung von A findet sich durch die Formel:

Fig. 120.



$$x = \frac{\Sigma P_1 x_1}{\Sigma P_1}.$$

Hat die Linie die Länge a, so ist

$$x_1 = \frac{a}{n},\ x_2 = 2\frac{a}{n},\ x_3 = 3\frac{a}{n} \text{ u. s. w.}$$

$$P_1 = p,\ P_2 = 2p,\ P_3 = 3p \text{ u. s. w.}$$

$$x = \frac{p\frac{a}{n} + 2p \cdot 2\frac{a}{n} + 3p \cdot 3\frac{a}{n} + \ldots np \cdot a}{p + 2p + 3p + \ldots np}$$

$$= \frac{a}{n} \cdot \frac{\Sigma n^2}{\Sigma n} = a\,\frac{2n+1}{3n}.$$

Nehmen wir die Anzahl der Kräfte für die Linie von der Länge a recht groß, so ist die Entfernung des Schwerpunktes von A:

$$x = \tfrac{2}{3}a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

Denken wir anstatt der ursprünglichen Kräfte in denselben Punkten die Kräfte $1p,\ 4p,\ 9p \ldots n^2 p$ wirksam, so haben wir:

$$x = \frac{a}{n} \cdot \frac{\Sigma n^3}{\Sigma n^2}$$

$$= \tfrac{3}{2}a \cdot \frac{n+1}{2n+1}.$$

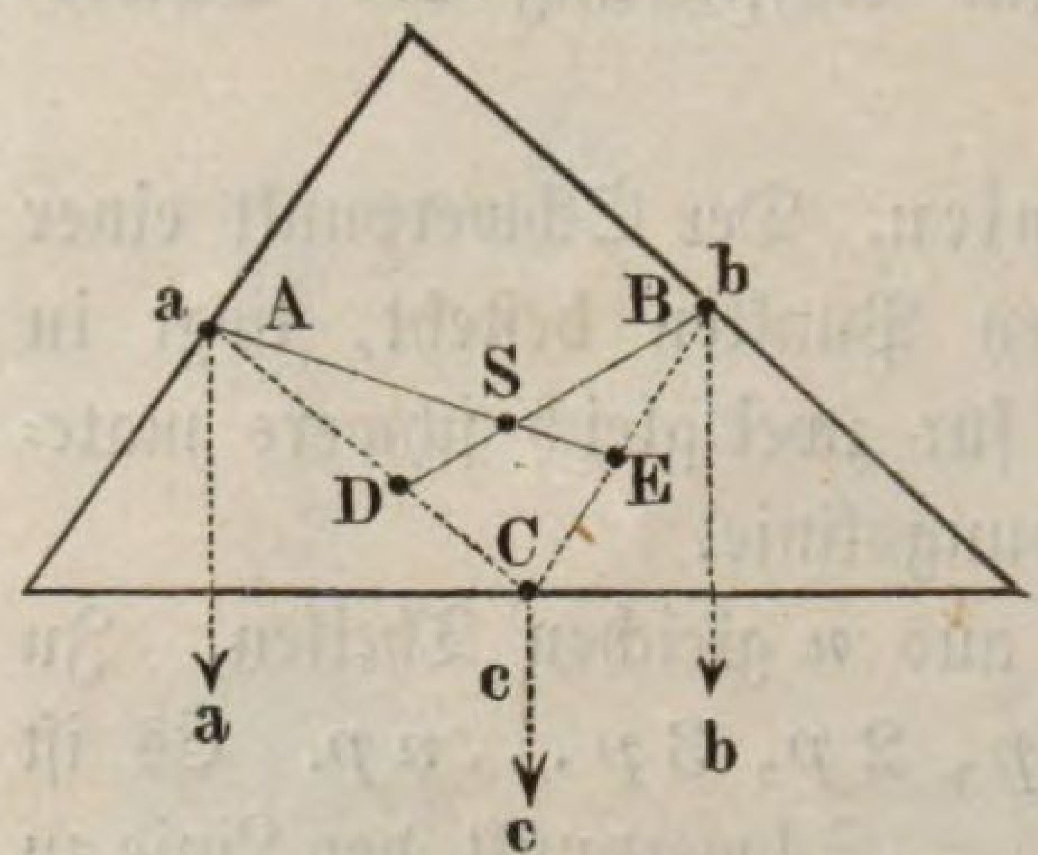
Wird für diese Annahme die Anzahl der Kräfte sehr groß, so ist

$$x = \tfrac{3}{4}a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

Es ist der Schwerpunkt von dem Umfange eines Dreieckes zu bestimmen, das aus schweren Linien gebildet ist. Für die Gewichte der Linien

führen wir (Fig. 121) die Längen a, b, c ein, die als Gewichte in den Mitten der Linien wirksam zu denken sind. Anstatt der drei schweren Linien haben wir zuerst die drei schweren Punkte A, B, C. Man suche zu A und C den Schwerpunkt D mittelst der Proportion

Fig. 121.



$$AD : CD = c : a.$$

Ebenso bestimme man den Schwerpunkt E zu B und C durch

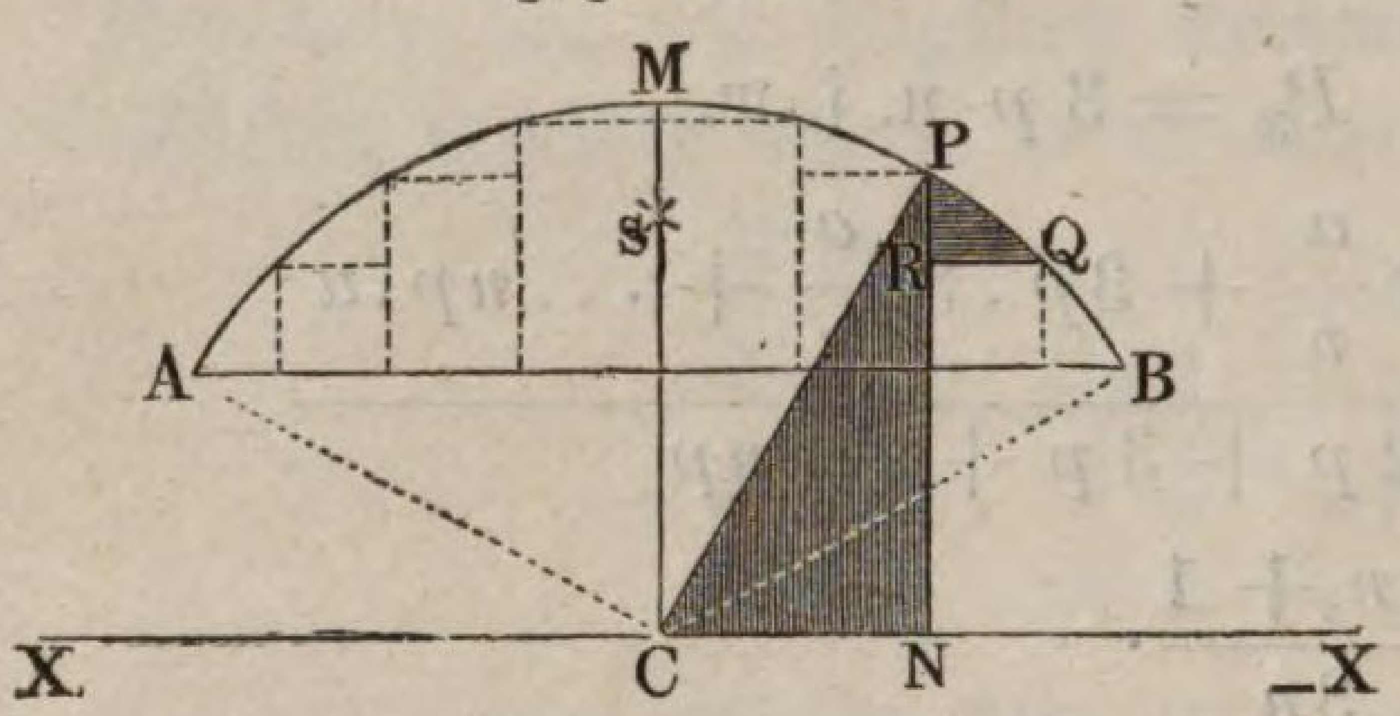
$$BE : CE = c : b.$$

Auf diese Weise haben wir statt der drei schweren Punkte entweder die beiden D und B, daher ist DB Schwerlinie, oder die beiden schweren Punkte A und E, daher ist AE eine zweite Schwerlinie. Der Durchschnittspunkt S der beiden Schwerlinien ist deshalb Schwerpunkt des gegebenen Systemes.

Von dem symmetrischen Stücke eines aus schweren Linien zusammengesetzten **regulären Polygons** den Schwerpunkt zu bestimmen.

Die Länge einer Seite des regelmäßigen Polygons (Fig. 122) sei a, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises r. Man ziehe durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt C der beiden zum regulären Polygon gehörigen Kreise eine Parallele XX' mit der das symmetrische Stück begrenzenden Sehne AB. Die in C zu XX' errichtete Normale CM theilt das Stück des Polygons in zwei gleiche Theile, der Schwerpunkt S wird sich deshalb auf dieser Linie finden, sodaß es sich nur um den Abstand z von der Linie XX' handelt.

Fig. 122.



Zur Bestimmung von z benutzen wir die Formel:

$$z = \frac{\Sigma V_1 z_1}{\Sigma V_1}.$$

Es ist $\qquad V_1 = V_2 = \ldots = a,$

daher ist für die Annahme, daß das Stück des Polygons aus n Seiten bestehe,

$$z = \frac{a \Sigma z_1}{n a}.$$

Zur Bestimmung von z_1 ziehen wir die ähnlichen Dreiecke QRP und PNC in Betracht; es verhält sich

$$r : z_1 = a : QR$$

$$z_1 = \frac{r}{a} QR.$$

QR ist die Projection p_1 der Seite a auf der Sehne AB. Für die zweite Sehne finden wir in gleicher Weise:

$$z_2 = \frac{r}{a} p_2.$$

Es ist hiernach allgemein:

$$z = \frac{a \Sigma \frac{r}{a} p_1}{n a}$$
$$= r \frac{\Sigma p_1}{n a}.$$

Wir schreiben statt Σp_1 die Sehne AB gleich s und statt $n a$ den Umfang u des vorliegenden Polygonstücks, so ist der Schwerpunktsabstand von der Linie XX':

$$z = \frac{r s}{u}.$$

Das erhaltene Resultat können wir unmittelbar auf einen Kreisbogen anwenden, dessen Sehne parallel der durch den Mittelpunkt gelegten Linie XX' ist, wenn wir statt des Umfanges u die Länge des Kreisbogens b setzen:

$$z = \frac{r s}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (103)$$

Hiernach verhält sich der Bogen b zur Sehne s wie der Halbmesser r des Kreises zum Schwerpunktsabstande z:

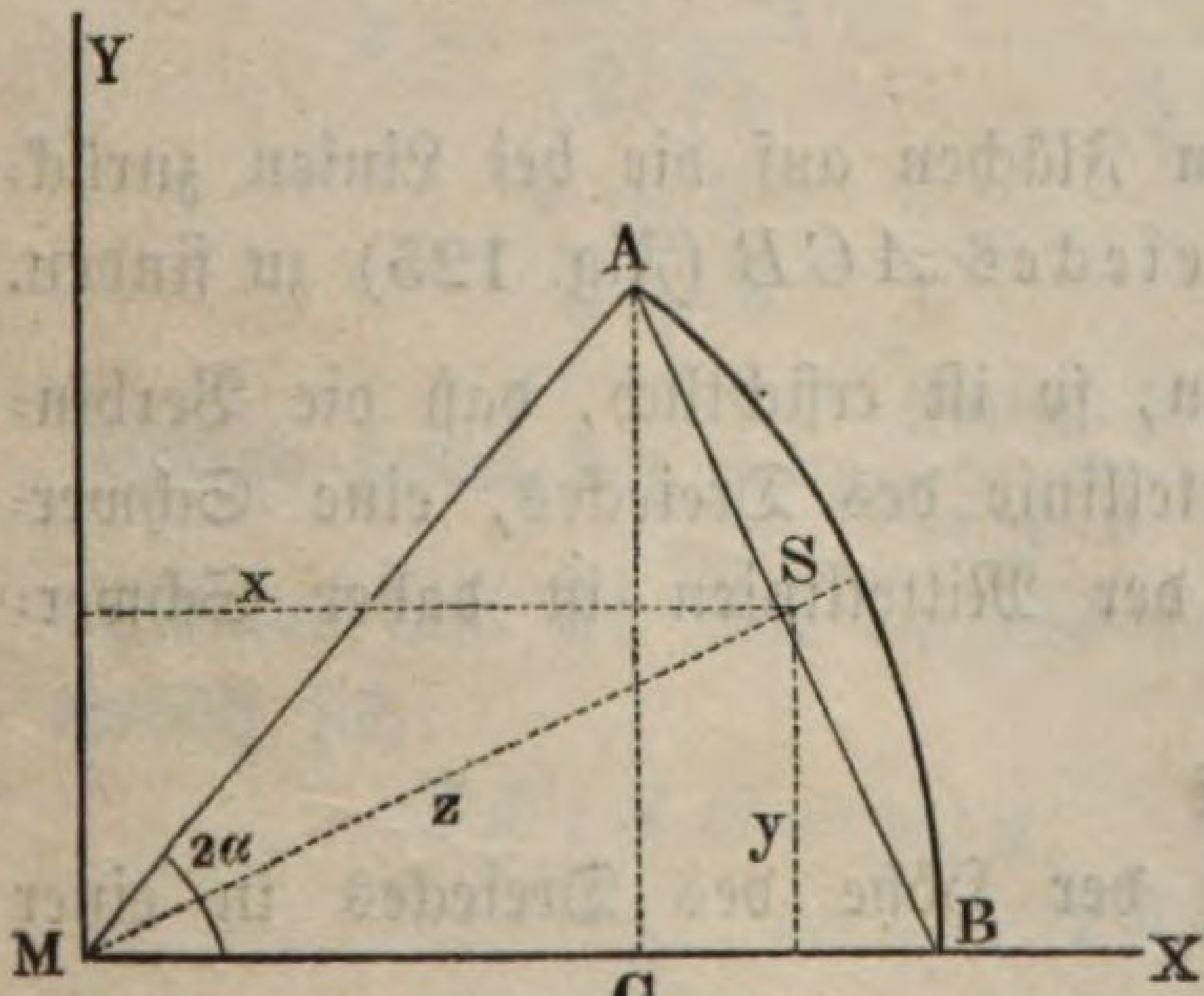
$$b : s = r : z.$$

Der zum Bogen gehörige Mittelpunktswinkel sei 2α, in Bogenmaß ausgedrückt, so ist $r \,.\, 2\alpha : 2 r \sin \alpha = r : z$

$$z = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

Wir bestimmen außerdem noch die Entfernungen x und y des Schwerpunktes S von My und Mx (Fig. 123).

Fig. 123.



$$x = z \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\alpha} r = r \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$$

$$y = z \sin \alpha = \frac{\sin \alpha^2}{\alpha} r.$$

Die erhaltenen Resultate verwandeln wir in folgende Proportionen:

$$r \,.\, 2\alpha : r \sin 2\alpha = r : x \text{ und}$$
$$r \,.\, 2\alpha : r\,(1 - \cos 2\alpha) = r : y.$$

Hieraus folgt, daß die oben für den Kreisbogen hingestellte Proportion bei der Bestimmung von z sich auch bei der von x und y anwenden läßt,

wenn man anstatt der Sehne die mit MY und MX parallelen Linien AC und BC einführt.

Für den Halbkreis ist $2\alpha = \pi$, $\sin \alpha = 1$, daher:

$$z = \frac{2}{\pi} r,$$

für den Viertelkreis ist $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daher

$$z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r$$

$$x = \frac{2}{\pi} r = y.$$

Der Schwerpunkt des **Kreisumfanges** findet sich im Mittelpunkte.

b) **Für ebene Flächen.** In der Figur 124 sei eine beliebige ebene Fläche vorgestellt. Wir legen durch dieselbe sehr nahe an einander Linien, die sämmtlich einer beliebigen Richtung parallel sind. Diese Linien denken wir schwer und verbinden deren Schwerpunkte, d. h. ihre Mitten, durch eine Linie. Diese wird im Allgemeinen eine krumme sein, das Gewicht der ganzen Fäche enthalten, ihr Schwerpunkt wird daher der Schwerpunkt der Fläche sein müssen. Ist diese schwere Linie eine gerade, so wird sie Schwerlinie und geht deshalb durch den Schwerpunkt der Fläche. Durch dieses Gesetz ist die

Fig. 124.

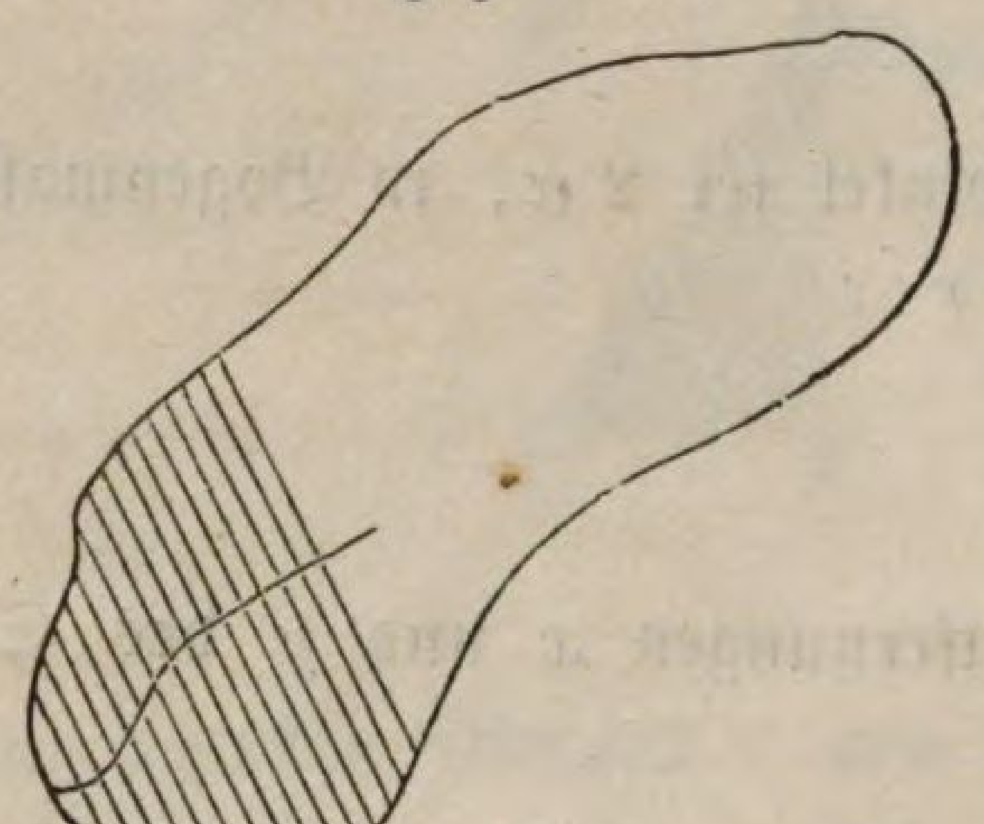
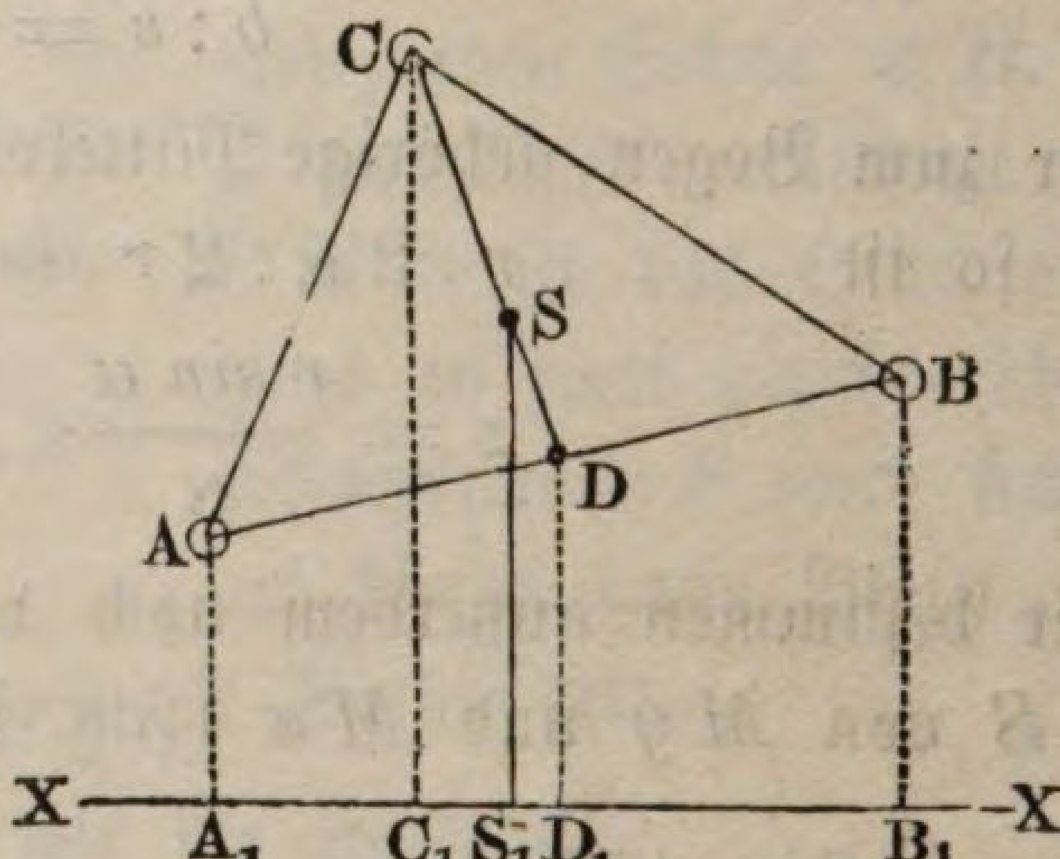


Fig. 125.



Bestimmung des Schwerpunktes bei ebenen Flächen auf die bei Linien zurückgeführt. Es sei der Schwerpunkt eines **Dreieckes** ACB (Fig. 125) zu finden.

Ziehen wir mit AB parallele Linien, so ist ersichtlich, daß die Verbindungslinie der Mitten derselben, die Mittellinie des Dreieckes, eine Schwerlinie ist. Der **Durchschnittspunkt** S der Mittellinien ist daher Schwerpunkt des Dreieckes.

Da sich $$CS : SD = 2 : 1$$ verhält, so liegt der Schwerpunkt auf $\frac{1}{3}$ der Höhe des Dreieckes in einer Mittellinie.

Wir wollen noch den Abstand $SS_1 = z$ des Schwerpunktes S von der

Linie XX' oder von einer Ebene, die sich mit der Dreiecksebene in der Linie XX' schneidet, berechnen. Die Entfernungen der Eckpunkte A, B, C des Dreieckes von der Linie oder der Ebene seien a, b, c, so ist

$$z = \frac{1.c + 2.DD_1}{3} \text{ und } DD_1 = \frac{a+b}{2},$$

daher:

$$z = \frac{a+b+c}{3}.$$

Denken wir anstatt des schweren Dreieckes drei gleich schwere Punkte A, B, C, so ist der Abstand des Schwerpunktes S derselben von der Linie XX' oder von der Ebene ebenfalls:

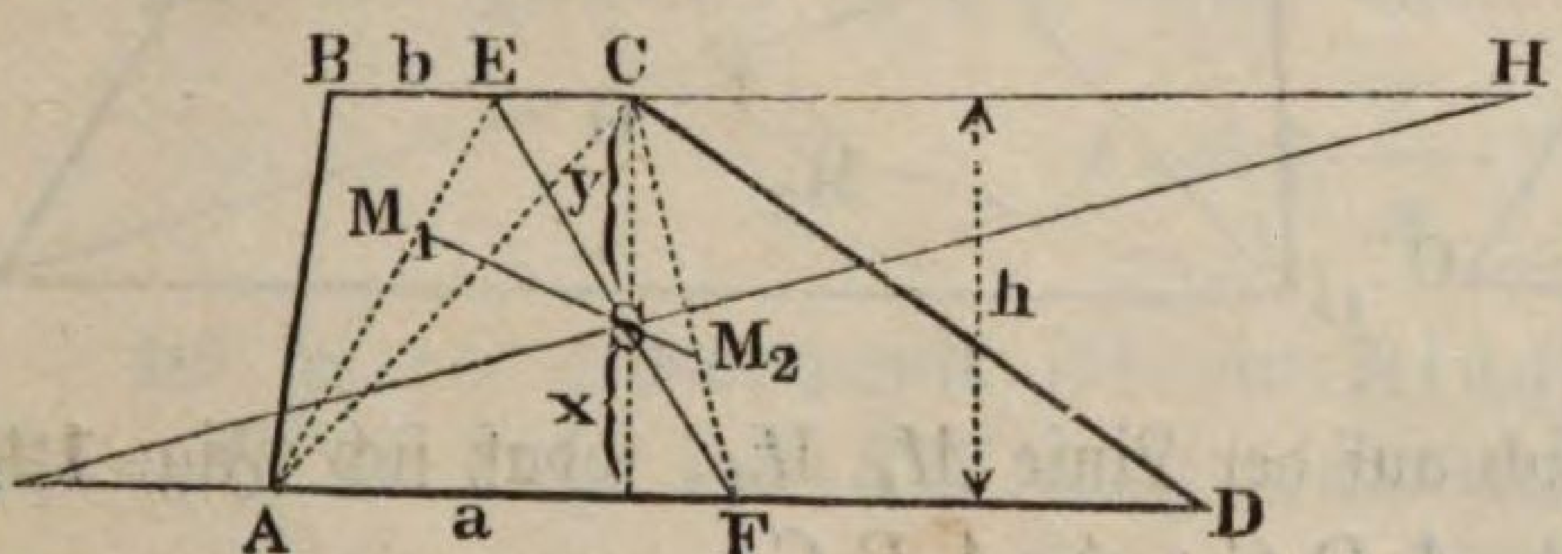
$$\frac{a+b+c}{3},$$

es fällt daher der Schwerpunkt eines ebenen Dreieckes mit dem seiner drei gleich schweren Eckpunkte zusammen.

In jedem Parallelogramme ist der Durchschnittspunkt der Diagonalen Schwerpunkt.

Von dem Paralleltrapez $ABCD$ (Fig. 126) sind die parallelen Seiten a und b und die Höhe h gegeben; es ist der Schwerpunkt desselben zu bestimmen.

Fig. 126.



Wir ziehen die Diagonale AC und bestimmen die Schwerpunkte M_1 und M_2 der beiden Dreiecke. Die Linie $M_1 M_2$ ist eine Schwerlinie für das Paralleltrapez. Die Verbindungslinie EF der Mitten der parallelen Seiten ist ebenfalls eine Schwerlinie, daher der Durchschnittspunkt S beider der Schwerpunkt. Bestimmen wir die Entfernungen x und y von den parallelen Seiten a und b. Es ist

$$x = \frac{\Sigma V_1 x_1}{\Sigma V_1} = \frac{\frac{1}{2} a h \cdot \frac{h}{3} + \frac{1}{2} b h \cdot \frac{2}{3} h}{\frac{1}{2} a h + \frac{1}{2} b h}$$

$$= \frac{a+2b}{a+b} \cdot \frac{h}{3}.$$

Ebenso findet sich $y = \dfrac{2a+b}{a+b} \cdot \dfrac{h}{3}$.

Hieraus läßt sich eine einfache Construction des Schwerpunktes ableiten. Es verhält sich:

$$\begin{aligned} SF : SE &= x : y \\ &= a + 2b : 2a + b \\ &= \frac{a}{2} + b : a + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Man verlängere deshalb BC bis H, so daß $EH = \frac{b}{2} + a$ wird, ebenso verlängere man DA bis G, so daß $FG = \frac{a}{2} + b$ wird, verbinde G mit H, so liefert diese Linie im Durchschnitte mit EF den Schwerpunkt S des Paralleltrapezes.

Es sei für ein beliebiges Viereck $ABCD$ (Fig. 127) der Schwerpunkt zu bestimmen. Man zerlege das Viereck durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke, bestimme deren Schwerpunkte M_1 und M_2, so ist $M_1 M_2$ Schwerlinie des Viereckes. Ebenso zerlege man das Viereck durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke, bestimme deren Schwerpunkte N_1 und N_2, so ist auch $N_1 N_2$ Schwerlinie des Viereckes. Der Durchschnittspunkt S der beiden Schwerlinien ist daher Schwerpunkt des Viereckes.

Anstatt die zweite Schwerlinie zu bestimmen, kann man auch folgendermaßen verfahren.

Fig. 127.

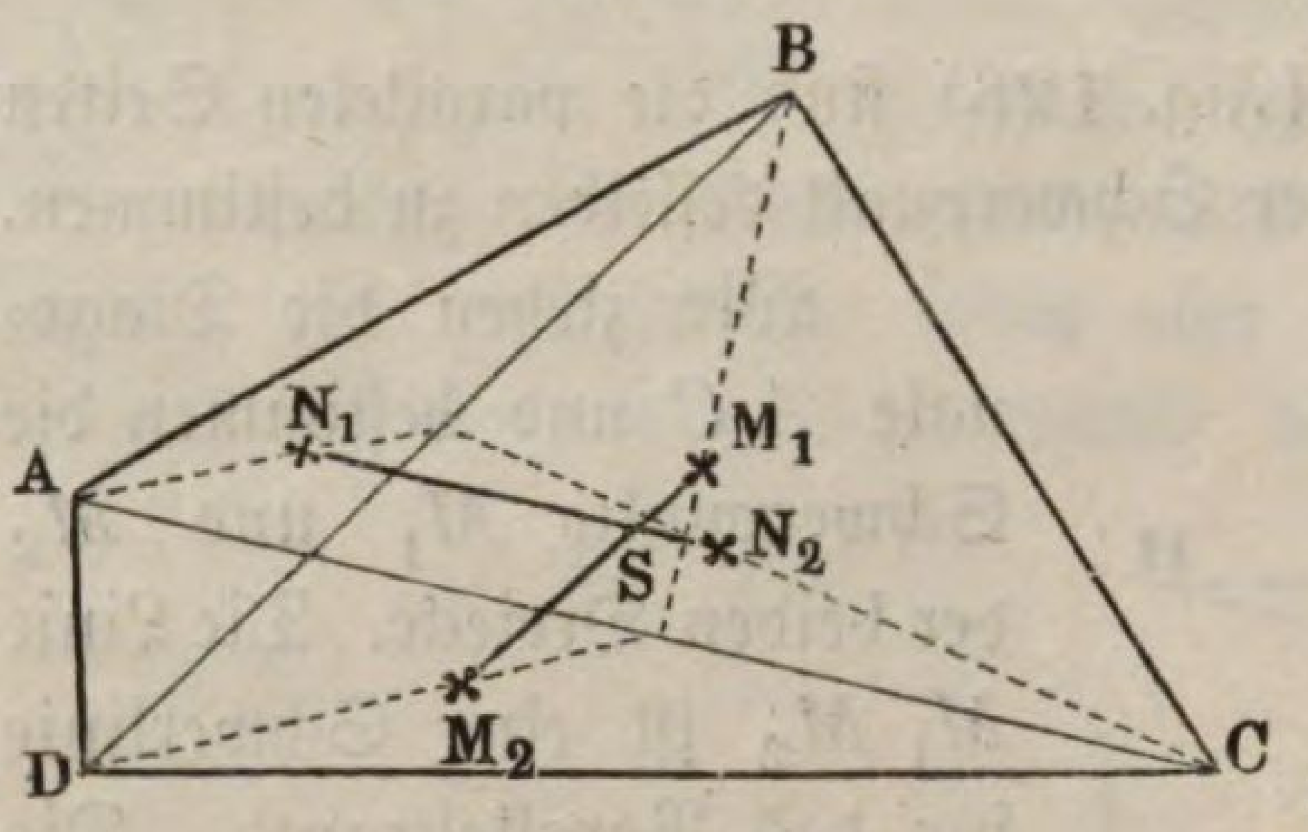
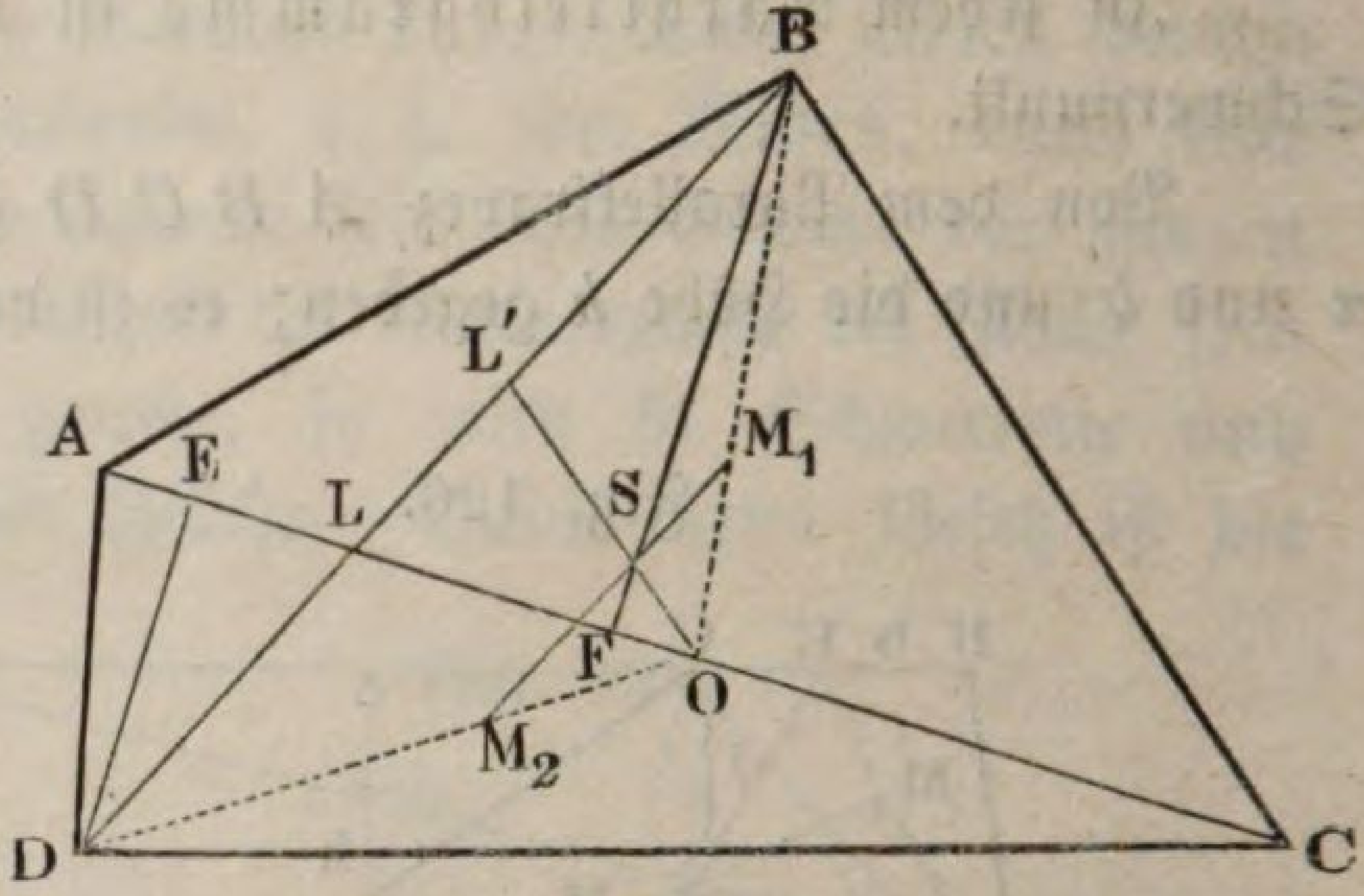


Fig. 128.



Der Schwerpunkt S findet sich auf der Linie $M_1 M_2$, sodaß sich (Fig. 128)

$$M_1 S : M_2 S = \triangle ADC : \triangle ABC$$

verhält.

Die Dreiecke verhalten sich wie die Höhen DE und BF, daher ist:

$$M_1 S : M_2 S = DE : BF$$
$$= DL : BL.$$

Aus dem Grunde machen wir $BL' = DL$ und verbinden L' mit O, so ist der Durchschnittspunkt S zwischen $L'O$ und $M_1 M_2$ der Schwerpunkt des Viereckes.

Allgemein werden wir bei einem n-Eck in gleicher Weise verfahren, indem wir uns zwei Schwerlinien verschaffen, deren Durchschnittspunkt den Schwerpunkt S liefert.

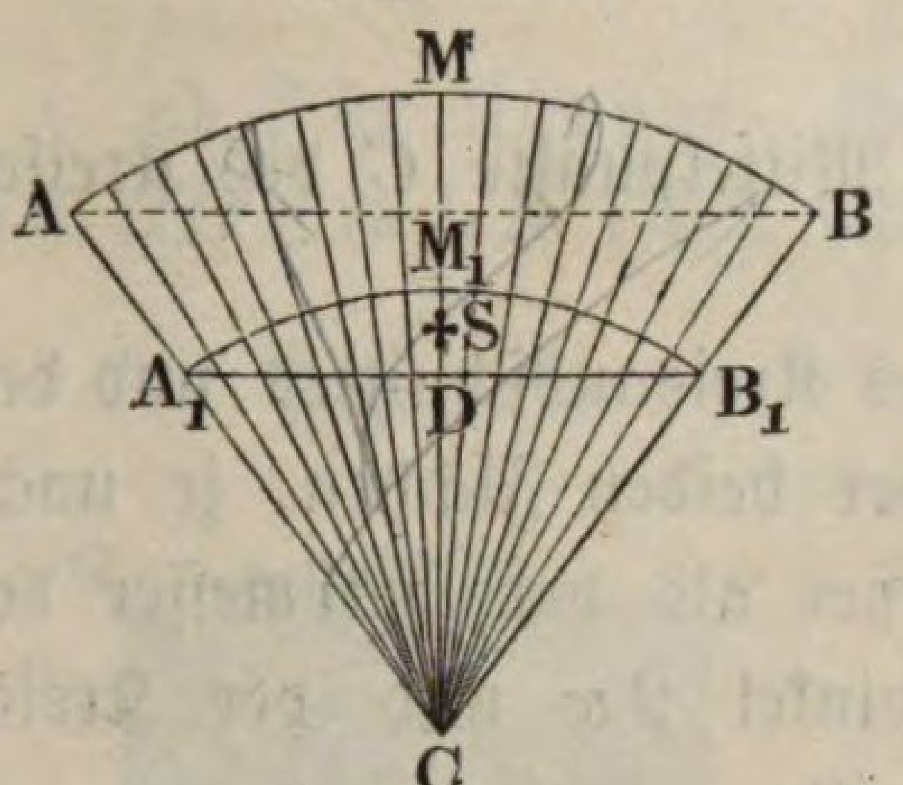
Soll der Schwerpunkt eines beliebigen n-Eckes durch Rechnung gefunden werden, so wähle man in der Ebene des n-Eckes ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, gebe für dieses die Coordinaten der Eckpunkte und bestimme die Coordinaten x und y des Schwerpunktes mittelst der Formeln:

$$x = \frac{\Sigma V_1 x_1}{\Sigma V_1}, \quad y = \frac{\Sigma V_1 y_1}{\Sigma V_1}.$$

Der Schwerpunkt eines Kreises liegt im Mittelpunkte.

Es ist der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes ACB (Fig. 129) zu bestimmen. Der Halbmesser des Kreises sei r, der Mittelpunktswinkel $2\,\alpha$.

Fig. 129.



Wir denken den Kreisausschnitt aus einer sehr großen Anzahl von Dreiecken bestehend, die mit ihren Spitzen sämmtlich im Mittelpunkte M des zugehörigen Kreises liegen, deren Grundlinien also sehr kleine Theile des zugehörigen Bogens sind. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke liegen sämmtlich auf $\frac{2}{3}$ der Höhe vom Mittelpunkte aus gerechnet. Die Höhe ist bei diesen Dreiecken von so geringer Grundlinie gleich dem Radius r. Wir können hiernach anstatt des schweren Kreisausschnittes den schweren Kreisbogen $A_1\,B_1$ vom Halbmesser $\frac{2}{3}\,r$ und demselben Mittelpunktswinkel $2\,\alpha$ zur Bestimmung des Schwerpunktes S benutzen. Derselbe findet sich in der den Winkel $2\,\alpha$ halbirenden Linie und seine Entfernung $CS = z$ vom Mittelpunkte des Kreises ergiebt sich aus der Proportion:

$$\tfrac{2}{3}\,r \,.\, 2\,\alpha : 2 \cdot \tfrac{2}{3}\,r \sin\alpha = \tfrac{2}{3}\,r : z$$

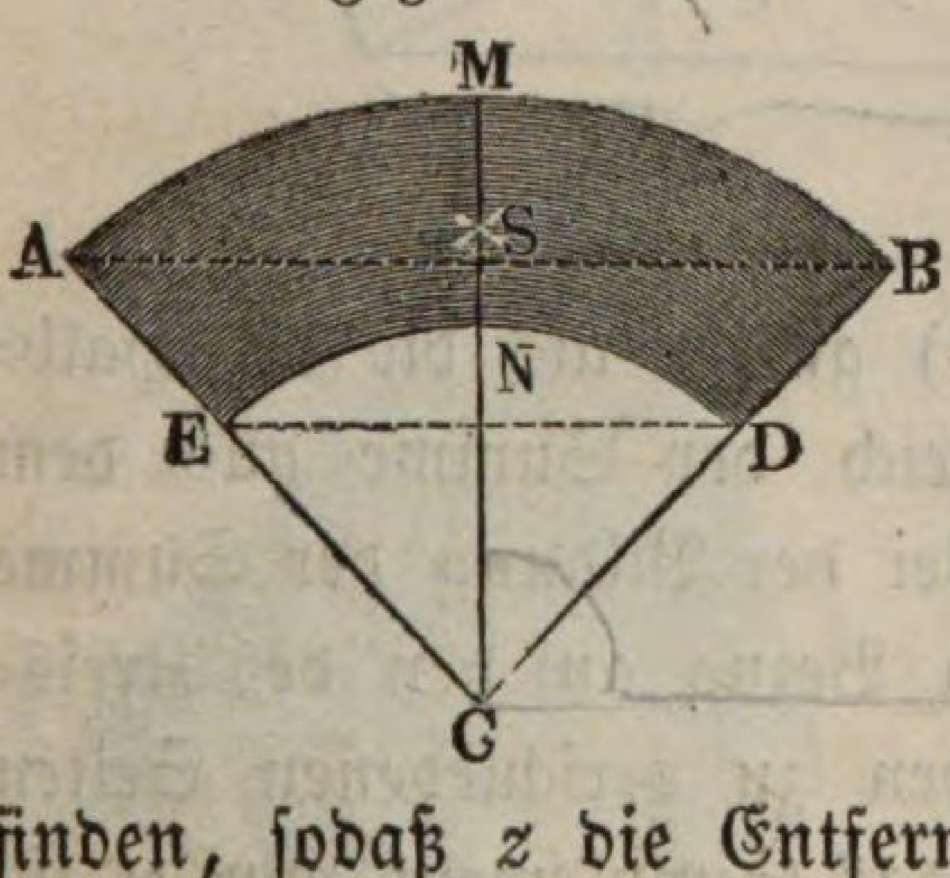
$$z = \tfrac{2}{3}\,r \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Für den Halbkreis ist $2\,\alpha = \pi$, also:

$$z = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

Es sei der Schwerpunkt für ein Ringstück (Fig. 130) mit den Halbmessern $AC = r_1$ und $EC = r_2$ und dem Mittelpunktswinkel $2\,\alpha$ zu bestimmen.

Fig. 130.



Wir betrachten das Ringstück als die Differenz zweier Kreisausschnitte und wenden zur Bestimmung des Schwerpunktes die Formel an:

$$z = \frac{\Sigma_1\, V z_1}{\Sigma\, V_1}.$$

Der Schwerpunkt S wird sich nämlich auf der den Winkel $2\,\alpha$ halbirenden Linie CM befinden, sodaß z die Entfernung desselben von dem Mittelpunkte C bezeichnet:

$$z = \frac{r_1^{\,2}\alpha \cdot \tfrac{2}{3}\,r_1\,\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} - r_2^{\,2}\alpha \cdot \tfrac{2}{3}\,r_2\,\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}}{(r_1^{\,2} - r_2^{\,2})\,\alpha}$$

$$= \tfrac{2}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r_1^{\,3} - r_2^{\,3}}{r_1^{\,2} - r_2^{\,2}}$$

$$z = \tfrac{2}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r_1^{\,2} + r_1\,r_2 + r_2^{\,2}}{r_1 + r_2}.$$

Um den Schwerpunkt eines **Kreisabschnittes** (Fig. 131) zu finden, der sich ebenfalls auf der den zugehörigen Mittelpunktswinkel halbirenden Linie CM befindet, gebrauchen wir wieder die Formel:

$$z = \frac{\Sigma V_1 z_1}{\Sigma V_1},$$

unter z die Entfernung des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte C des Kreises verstanden.

Der Kreisabschnitt ist gleich der Differenz eines Kreisausschnittes und des dazu gehörigen Dreieckes oder gleich der Summe der beiden Flächen, je nachdem die Höhe des Kreisabschnittes kleiner oder größer als der Halbmesser des Kreises ist. Der letztere sei r, der Mittelpunktswinkel 2α und der Kreisabschnitt kleiner als die Fläche des Halbkreises, so ist:

$$z = \frac{r^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{3} r \cos \alpha}{r^2 \alpha - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha}$$

$$= \frac{(2 r \sin \alpha)^3}{12 (r^2 \alpha - r^2 \sin \alpha \cos \alpha)}.$$

Wir setzen die Länge der Sehne AB gleich s und den Inhalt des Kreisabschnittes $= A$, so ist:

$$z = \frac{s^3}{12 A}.$$

Fig. 131.

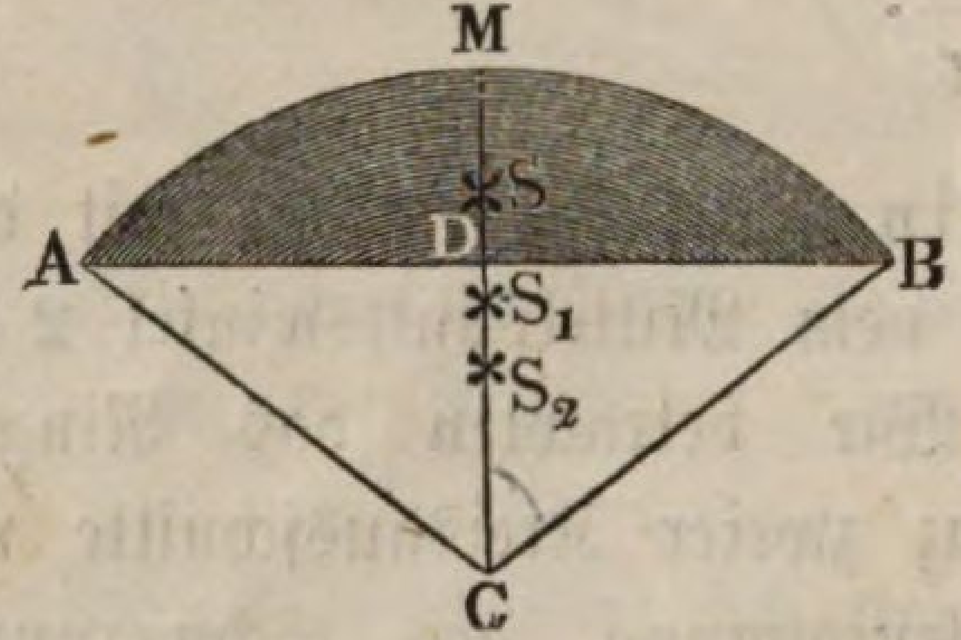
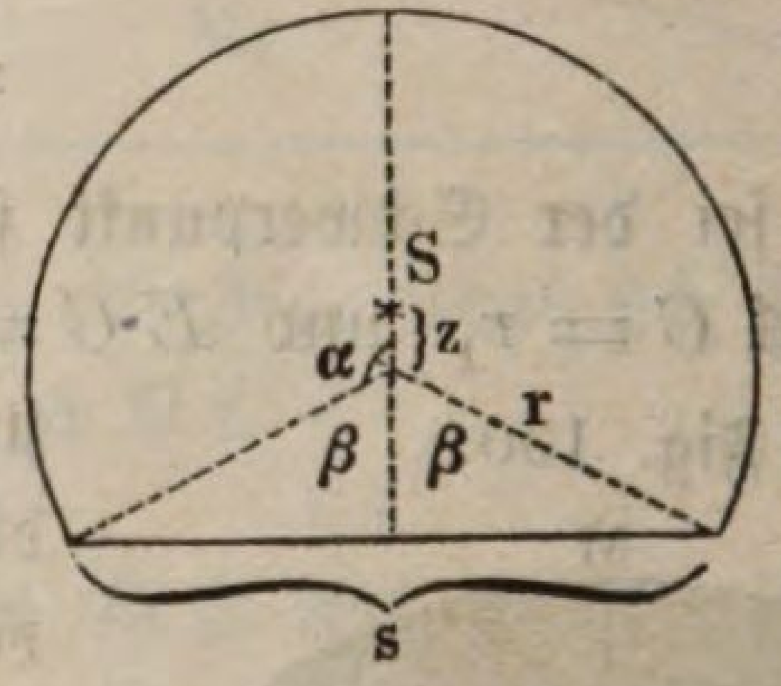


Fig. 132.



Ist die Fläche des Kreisabschnittes (Fig. 132) größer als die des Halbkreises, so ist der Inhalt des Kreisabschnittes gleich der Summe aus dem Kreisausschnitte und dem zugehörigen Dreiecke. Bei der Bildung der Summe dieser Momente ist jedoch der Arm des Dreieckes in Bezug auf den des Kreisausschnittes negativ zu setzen, da die beiden Flächen zu verschiedenen Seiten der Momentenlinie liegen. Hiernach ist, wenn β das Supplement von α ist,

$$z = \frac{r^2 \alpha \cdot \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\beta \cdot \frac{2}{3} r \cos \beta}{r^2 \alpha + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\beta}$$

$$2\beta = 4R - 2\alpha$$

$$\sin 2\beta = -\sin 2\alpha$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha.$$

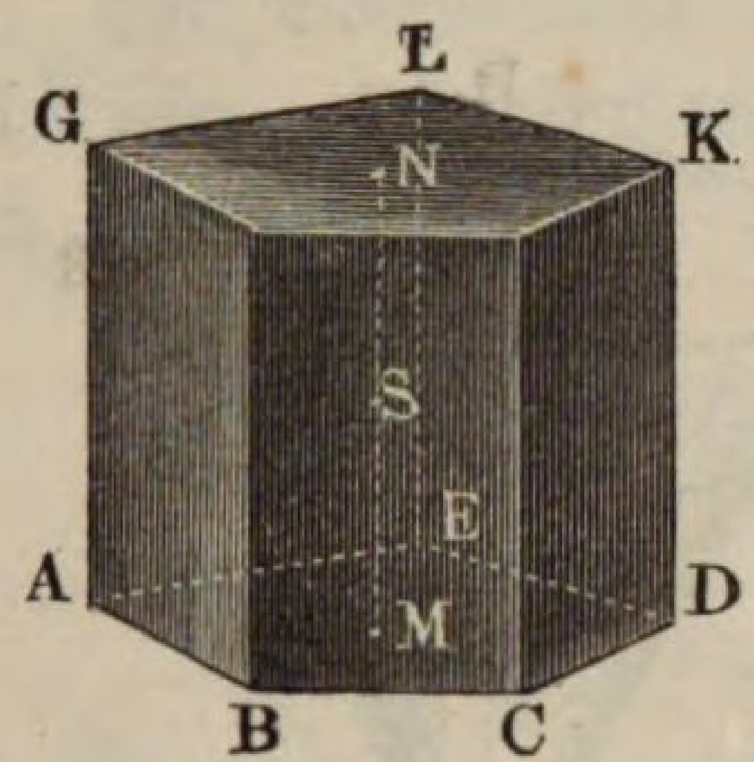
Substituiren wir diese Werthe, so entsteht für z der oben gefundene

Ausdruck, d. h. die Entfernung des Schwerpunktes eines Kreisabschnittes vom Mittelpunkte des Kreises ist, unabhängig von der Größe der Fläche, gleich

$$\frac{s^3}{12\,A}.$$

c) **Für Körper.** Es sei der Schwerpunkt für ein **beliebiges Prisma** *ABCDEGLK* (Fig. 133) zu bestimmen. Wird das Prisma durch Ebenen parallel den Grundebenen geschnitten, so entstehen congruente Durchschnittsfiguren. Die Schwerpunkte derselben finden sich in einer geraden Linie, die den Seitenkanten des Prismas parallel ist, und durch die Schwerpunkte *M* und *N* der beiden Grundebenen geht. Denken wir das Prisma aus sehr vielen solcher Durchschnittsflächen gebildet, so enthält die gedachte Linie *MN* die ganze Schwere des Prismas.

Fig. 133.



Die Linie ist durch gleiche Kräfte angegriffen, da die Durchschnittsfiguren sämmtlich congruent sind; der Schwerpunkt *S* des Prismas liegt daher in der Mitte dieser Linie.

Hiernach liegt der Schwerpunkt eines jeden Prismas in der Mitte der geraden Linie, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet.

Die Regel gilt ebenso für die **Cylinder**, die Grundfläche mag ein Kreis oder irgend eine andere krummlinig begrenzte Figur sein.

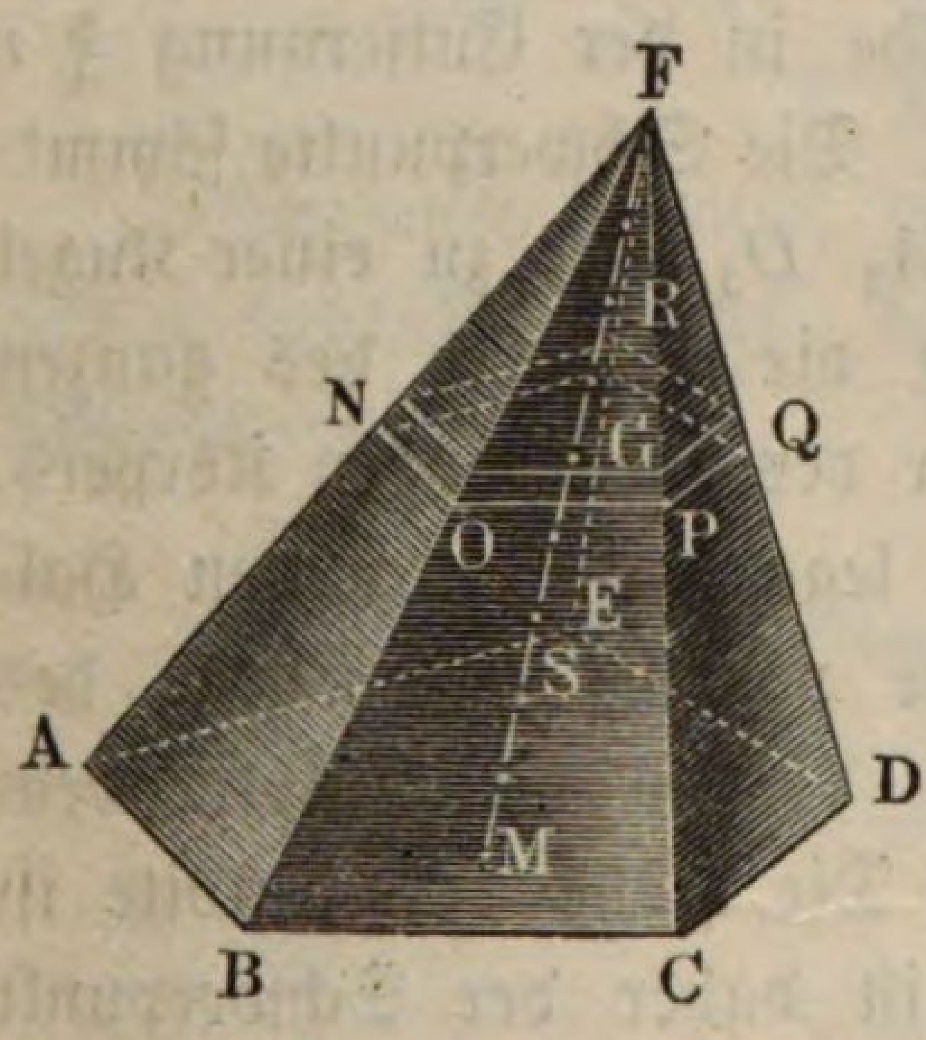
Den Schwerpunkt einer beliebigen **Pyramide** zu bestimmen.

Wir denken die Pyramide (Fig. 134) aus Ebenen *NQ* zusammengesetzt, die sämmtlich parallel der Grundebene sind. Die Schwerpunkte dieser Ebenen liegen in der geraden Linie, welche den Schwerpunkt *M* der Grundlinie mit der Spitze *F* der Pyramide verbindet. **Der Schwerpunkt dieser geraden Linie ist daher Schwerpunkt der Pyramide.** Die Flächeninhalte der Ebenen vertreten die angreifenden Kräfte, die sich daher, von der Spitze aus gerechnet, der Größe nach wie

$$1:4:9:16:\ldots n^2$$

verhalten.

Fig. 134.



Die Anzahl n der Ebenen müssen wir sehr groß denken, daher findet sich der Schwerpunkt *S* dieser Linie auf $\frac{3}{4}$ der Linie von der Spitze der Pyramide.

Die Regel gilt für alle zur Classe der Pyramiden gehörige Körper, daher auch für den **Kegel**, die Grundfläche desselben kann durch eine beliebige krumme Linie begrenzt sein.

Sind die Entfernungen der vier Eckpunkte *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 135 a. f. S.) einer dreiseitigen Pyramide von einer Ebene *HK* gleich *a*, *b*, *c*, *d*, so ist der Abstand *z* des Schwerpunktes *S* der Pyramide von dieser Ebene:

$$z = SS_1 = \frac{1 . DD_1 + 3 . MM_1}{4} = \frac{DD_1 + AA_1 + BB_1 + CC_1}{4} = \frac{a + b + c + d}{4},$$

d. h. der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide ist zugleich Schwerpunkt von vier gleich schweren Gewichten, die in den Eckpunkten der Pyramide angebracht sind.

Fig. 135.

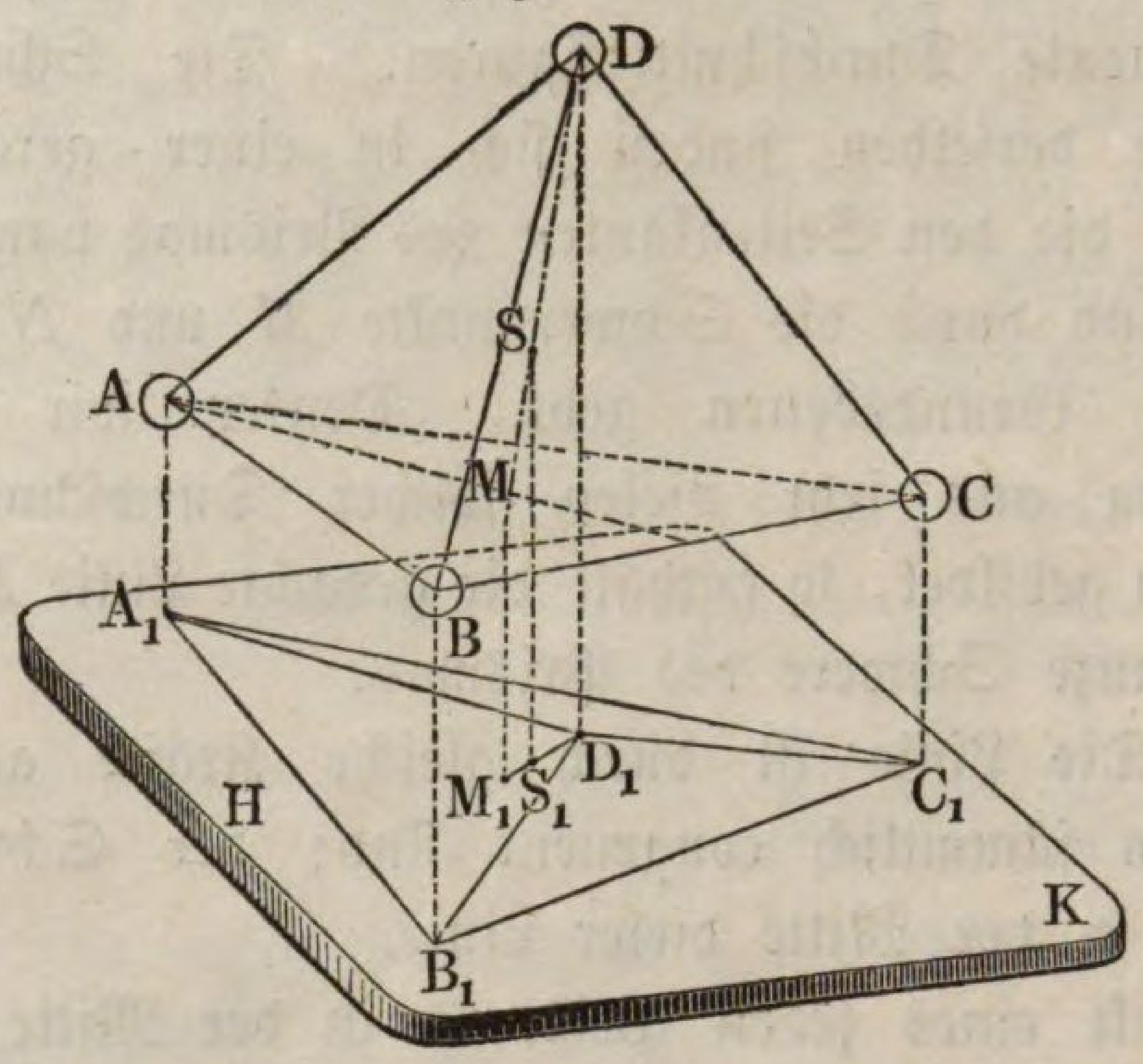
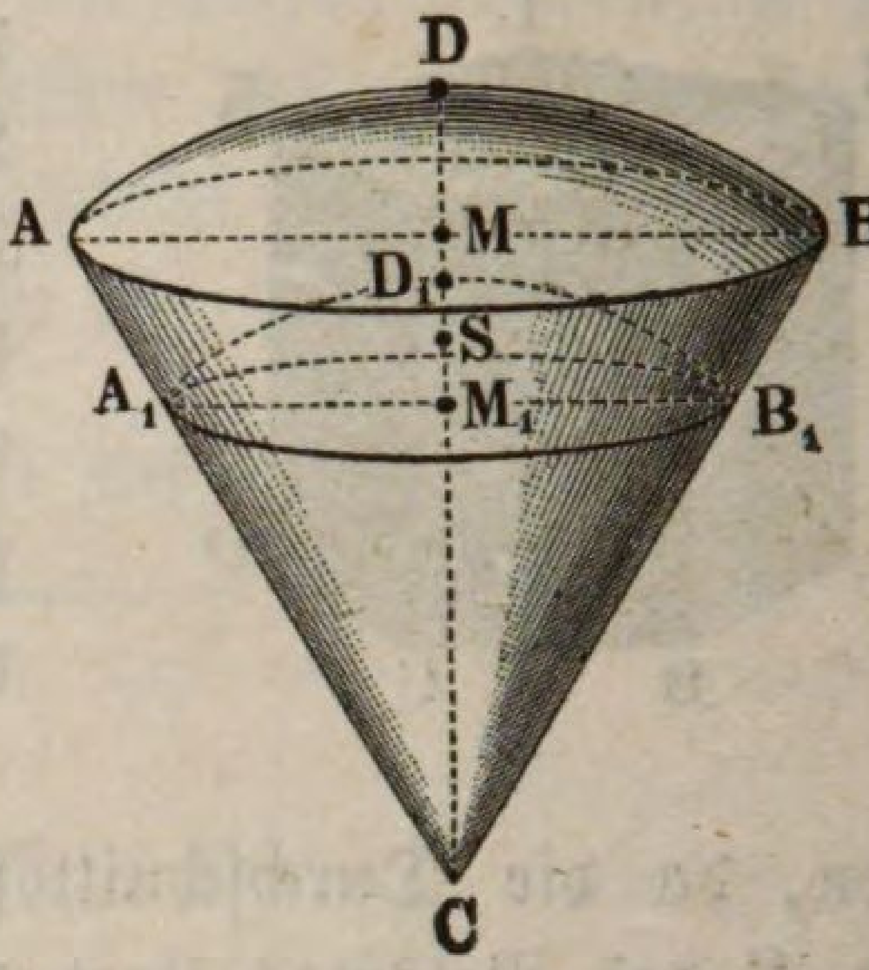


Fig. 136.



Der Schwerpunkt einer **Kugel** liegt in dem Mittelpunkte derselben.

Es ist der Schwerpunkt eines **Kugelausschnittes** (Fig. 136) zu bestimmen, dessen Höhe $MD = h$ ist, und der zu einer Kugel vom Halbmesser r gehört.

Wir denken den Kugelausschnitt aus sehr vielen Pyramiden bestehend, die mit ihrer Spitze im Mittelpunkte C der Kugel liegen, und deren Grundfläche sehr kleine Stücke der zum Kugelausschnitte gehörigen Kugelfläche sind. Die Höhe einer solchen Pyramide ist dann dem Halbmesser r der Kugel gleich. Der Schwerpunkt jeder Pyramide liegt auf der Höhe in der Entfernung $\frac{3}{4} r$ von der Spitze, d. h. vom Mittelpunkte der Kugel. Die Schwerpunkte sämmtlicher Pyramiden finden sich daher in einer Calotte $A_1 \, D_1 \, B_1$, zu einer Kugel vom Halbmesser $\frac{3}{4} r$ gehörig. Die Calotte enthält die Schwere des ganzen Kugelausschnittes, ihr Schwerpunkt ist daher auch der des vorliegenden Körpers. Um den Schwerpunkt dieser Calotte zu bestimmen, legen wir durch den Halbirungspunkt ihrer Höhe $M_1 \, D_1 = h_1$ eine Ebene parallel zur Ebene des Grundkreises. Diese Ebene ist eine Schwerebene, da sie die Calotte dem Flächeninhalte nach in zwei gleiche Theile theilt. Die Höhe der Calotte ist eine Schwerlinie, der Durchschnittspunkt S beider ist daher der Schwerpunkt der schweren Calotte, oder der des Kugelausschnittes. Der Schwerpunkt S liegt demnach im Halbirungspunkt der Höhe h_1, seine Entfernung $CS = z$ vom Mittelpunkte der Kugel ist

$$z = \tfrac{3}{4} r - \tfrac{1}{2} h_1$$
$$= \tfrac{3}{4} r - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} h$$
$$z = \tfrac{3}{8} (2 r - h).$$

Hieraus erhält man die Entfernung z des Schwerpunktes einer Halb-

kugel vom Mittelpunkte der Kugel, wenn man $h = r$ setzt,

$$z = \tfrac{3}{8} r.$$

Den Schwerpunkt eines Kugelabschnittes zu bestimmen, der durch seine Höhe h und den Halbmesser r der zugehörigen Kugel gegeben ist.

Jeder Kugelabschnitt ist gleich der Summe aus einem Kugelausschnitte und einem Kegel oder gleich der Differenz der beiden Körper, je nachdem $h > r$ oder $h < r$ ist.

Der Schwerpunkt des Kugelabschnittes wird jederzeit ein Punkt seiner Höhe sein. Die Entfernung desselben vom Mittelpunkte der Kugel finden wir nach der Formel:

$$z = \frac{\Sigma V_1 z_1}{\Sigma V_1}.$$

a) Es sei $h > r$, so ist das Moment des Kugelausschnittes:

$$+ \tfrac{2}{3} \pi r^2 h \cdot \tfrac{3}{8} (2r - h),$$

das Moment des Kegels dagegen:

$$- \tfrac{1}{3} \pi (h - r) (2r - h) h \cdot \tfrac{3}{4} (h - r),$$

da derselbe mit dem Kugelausschnitte zu verschiedenen Seiten der Momentenebene liegt, die Summe der Momente ist deshalb:

$$\Sigma V_1 z_1 = \tfrac{1}{4} \pi h (2r - h) [r^2 - (h - r)^2]$$
$$= \tfrac{1}{4} \pi h^2 (2r - h)^2.$$

b) Es sei $h < r$, so sind die Momente des Kugelausschnittes und des Kegels positiv in Rechnung zu bringen:

$$\tfrac{2}{3} \pi r^2 h \cdot \tfrac{3}{8} (2r - h) \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{3} \pi (r - h) (2r - h) h \cdot \tfrac{3}{4} (r - h).$$

In diesem Falle ist $\Sigma V_1 z_1$ gleich der Differenz der Momente:

$$\Sigma V_1 z_1 = \tfrac{1}{4} \pi h (2r - h) [r^2 - (r - h)^2]$$
$$= \tfrac{1}{4} \pi h^2 (2r - h)^2.$$

Wir sehen hieraus, die algebraische Summe der Momente erhält in beiden Fällen denselben Werth, der Inhalt des Kugelabschnittes ist ebenfalls für beide Annahmen gleich:

$$\tfrac{1}{3} \pi h^2 (3r - h).$$

Für beide Annahmen ist daher:

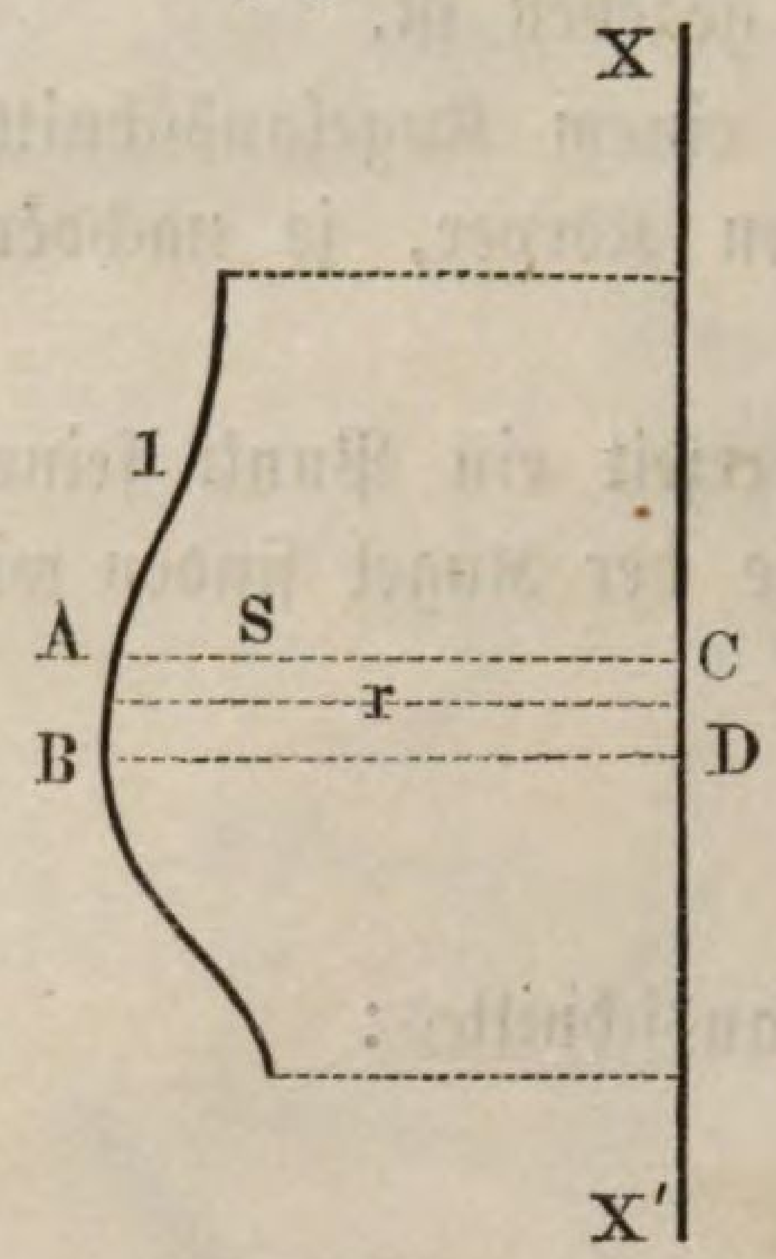
$$z = \frac{\tfrac{1}{4} \pi h^2 (2r - h)^2}{\tfrac{1}{3} \pi h^2 (3r - h)}$$

$$z = \tfrac{3}{4} \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

In einer Ebene (Fig. 137 a. f. S.) sei eine gerade Linie XX' und 43
eine beliebige Linie, in beliebiger Lage zur Linie XX' gegeben. Die beliebige Linie werde um die Linie XX' gedreht, ohne daß die gegenseitige Lage der beiden Linien sich ändere, bis die beliebige Linie in ihre ursprüngliche Stellung zurückgekehrt ist. Die Linie beschreibt während der Bewegung eine krumme Fläche, welche Umdrehungsfläche genannt wird.

Die Linie XX' heißt Umdrehungsachse, die andere Linie heißt Erzeugungslinie der Umdrehungsfläche.

Fig. 137.



1) Der Inhalt einer jeden Umdrehungsfläche ist gleich dem Producte aus der Erzeugungslinie in den, während der Bildung der Umdrehungsfläche, durchlaufenen Weg ihres Schwerpunktes.

Wir lassen die Erzeugungslinie eine vollständige Umdrehung um die Achse XX' machen und legen durch zwei aufeinander folgende Punkte A und B der Erzeugungslinie Ebenen normal zur Umdrehungsachse. Die Umdrehungsfläche wird in Kreise geschnitten, deren Halbmesser gleich AC und BD sind. Das zwischen den Ebenen liegende Stück der Umdrehungsfläche läßt sich als Mantel eines normalen Cylinders ansehen, dessen Höhe gleich dem Elemente AB der Erzeugungslinie ist.

Hiernach ist der Inhalt f_1 des betreffenden Stücks der Umdrehungsfläche

$$f_1 = 2\pi AC . AB.$$

Den Inhalt F der Umdrehungsfläche selbst erhalten wir in der Summe der Flächenelemente f_1

$$F = \Sigma f_1$$
$$F = 2\pi \Sigma AB . AC,$$

Das Element AB der Erzeugungslinie ist gerade, der Schwerpunkt desselben liegt daher auf der Linie selbst in deren Mitte. Das Product $AB . AC$ läßt sich als das statische Moment des Linienelementes AB für XX' als Momentenachse ansehen. Anstatt $\Sigma AB . AC$ ist n. F. 86 das statische Moment der Erzeugungslinie für dieselbe Momentenachse zu setzen. Bezeichnen wir mit l die Länge der Erzeugungslinie, mit r die Entfernung des Schwerpunktes S derselben von der Umdrehungsachse XX', so ist das statische Moment der Erzeugungslinie:

$$lr = \Sigma AB . AC.$$

daher der Inhalt der Umdrehungsfläche

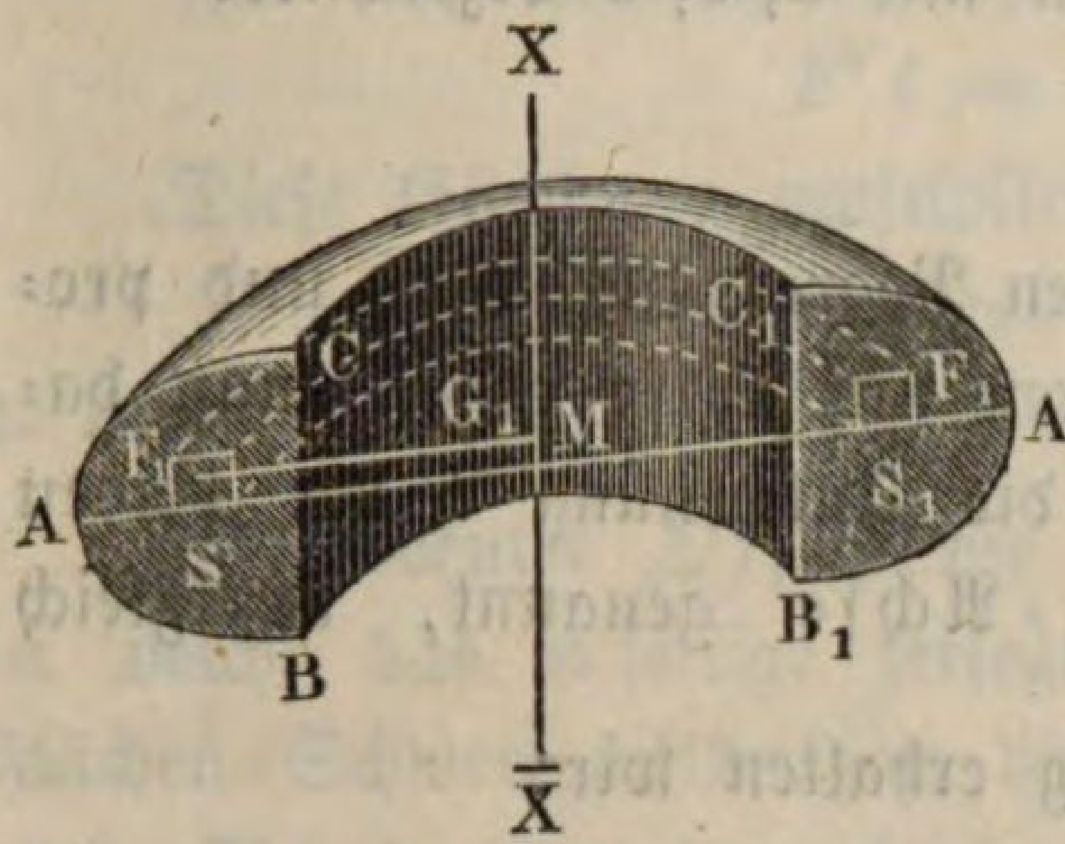
$$F = lr . 2\pi \qquad (104)$$

Jede durch die Umdrehungsachse gelegte Ebene heißt eine Meridianebene. Bei der Bildung der Umdrehungsfläche denken wir für die erste und letzte Lage der Erzeugungslinie die entsprechenden Meridianebenen und nennen den von den beiden Ebenen gebildeten Winkel den Drehungswinkel. Bei einer vollkommen geschlossenen Umdrehungsfläche ist derselbe $4R$ oder in Bogenmaß gleich 2π. Ist dagegen nur ein Stück Umdrehungsfläche vorhanden, so ist die Größe des Drehungswinkels von dem vorliegenden Stück der Umdrehungsfläche abhängig. Ist dieser Winkel im Bogenmaß gleich α, so findet sich der Inhalt f des Stückes der Umdrehungsfläche, wenn man in der obigen Formel statt 2π, α setzt.

$$f = lr\alpha.$$

In einer Ebene (Fig. 138) sei eine gerade Linie XX' und eine Figur ABC von beliebiger Begrenzung in beliebiger Lage zur Linie XX' gegeben. Die Figur werde um die Linie XX' gedreht, ohne die gegenseitige Lage zu ändern, bis sie in ihre ursprüngliche Stellung zurückgekehrt ist. Die Figur beschreibt während der Bewegung einen Körper, welcher **Umdrehungskörper** genannt wird.

Fig. 138.



Die Figur ABC heißt **Erzeugungsfläche**, die Linie XX' Umdrehungsachse des Umdrehungskörpers.

2) Der Inhalt eines jeden Umdrehungskörpers ist gleich dem Producte aus der **Erzeugungsfläche in den, während der Bildung des Umdrehungskörpers durchlaufenen Weg ihres Schwerpunktes.**

Der Inhalt der Erzeugungsfläche sei F; dieselbe denken wir aus Flächenelementen $F_1, F_2, F_3 \ldots$ bestehend, die sich in der Entfernung $r_1, r_2, r_3 \ldots$ von der Umdrehungsachse befinden. Bei der Drehung um die Umdrehungsachse beschreiben die Flächenelemente krummgebogene Prismen, deren Inhalt k sich durch das Product aus Grundebene und Höhe bestimmt. Für die Höhe ist die Länge des Drehungsbogens zu setzen.

Wir haben demnach für den vollständigen Umdrehungskörper:

$$k_1 = F_1\, 2 \,.\, r_1\, \pi.$$

Der Inhalt K des ganzen Umdrehungskörpers ist daher

$$K = \Sigma k_1$$

$$K = 2\,\pi\, \Sigma F_1\, r_1.$$

Sieht man $\Sigma F_1\, r_1$ als die Summe der statischen Momente der Flächenelemente für XX' als Momentenachse an, so ist dafür das statische Moment der ganzen Fläche für dieselbe Umdrehungsachse zu setzen.

Nennen wir r die Entfernung SM des Schwerpunktes S der Erzeugungsfläche von der Umdrehungsachse XX', so ist:

$$Fr = \Sigma F_1\, r_1.$$

Der Inhalt des Umdrehungskörpers ist daher:

$$K = Fr \,.\, 2\,\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Haben wir für einen Theil des Umdrehungskörpers den Inhalt k zu bestimmen, so ist statt $2\,\pi$ in der letzten Formel der zugehörige Drehungswinkel α einzuführen:

$$k = Fr\,\alpha.$$

Die beiden Gesetze zur Bestimmung der Inhalte von Umdrehungsflächen und Umdrehungskörpern, sind bekannt unter dem Namen, **Guldin's Regel.**

Wir stellen uns ein normales dreiseitiges Prisma vor, dessen Grundebene den Inhalt f haben mag, und schneiden dasselbe durch eine Ebene, welche mit der Grundebene den Winkel α bildet. Das normale dreiseitige

Prisma wird dadurch in zwei dreiseitige Prismen getheilt, die an einem Ende schief abgeschnitten sind.

Der Inhalt K eines derartigen schief abgeschnittenen Prismas $A\ B\ C\ A_1\ B_1\ C_1$ (Fig. 139) ist, wenn man die Kanten mit a, b, c bezeichnet:

$$K = f\frac{a+b+c}{3}.$$

Sieht man f als die Projection der schiefen Begrenzung z an und projicirt man auch noch den Schwerpunkt der letzteren auf f, so erhält man dadurch den Schwerpunkt S von f selbst, und die Entfernung l der beiden Schwerpunkte, die Flächen-Schwerpunkts-Achse genannt, ist gleich $\frac{a+b+c}{3}$. Bei Benutzung dieser Bezeichnung erhalten wir:

$$K = fl,$$

d. h. der Inhalt eines am Ende schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist ein Product aus der Grundebene f und der Flächen-Schwerpunktsachse l.

Fig. 139.

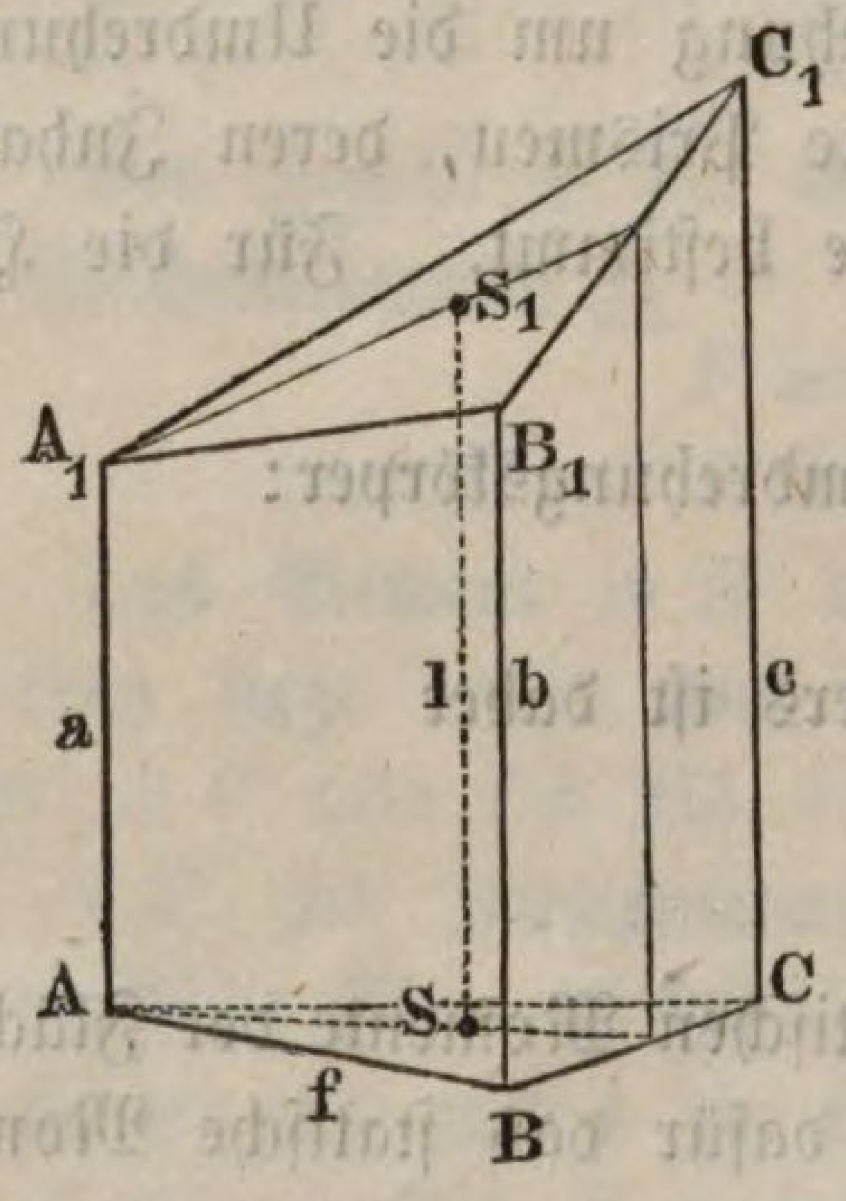
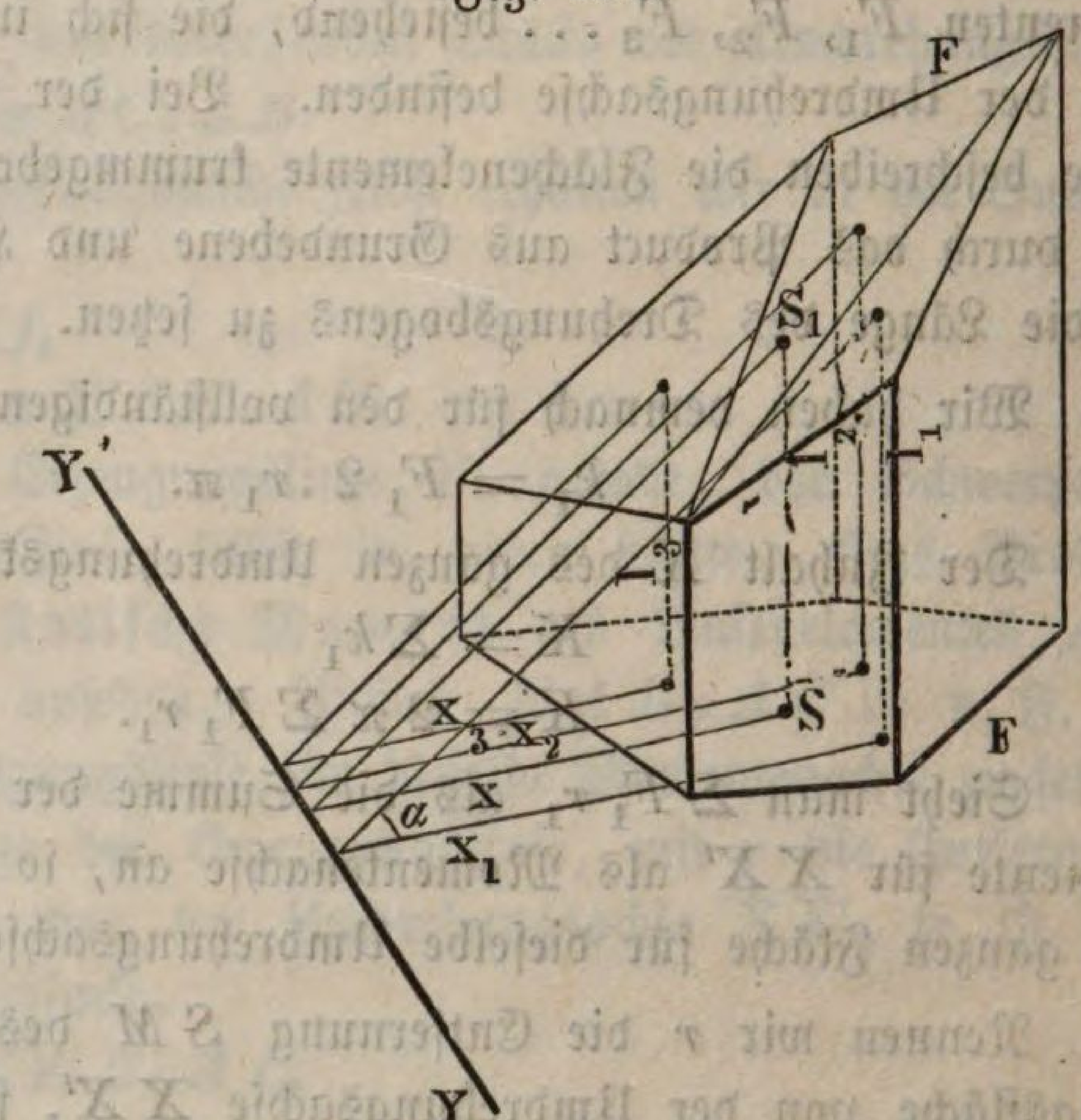


Fig. 140.



Wir nehmen jetzt ein normales $n$seitiges Prisma (Fig. 140), schneiden dasselbe an einem Ende schief ab und zerlegen es durch Ebenen, die durch dieselbe Kante gelegt werden, in $(n-2)$ dreiseitige Prismen, deren eine Begrenzung schief ist. Der Inhalt der schiefen Begrenzungsfläche sei F', der Inhalt der Grundebene F, die Inhalte der $(n-2)$ Dreiecke in der ersten Fläche seien $f'_1, f'_2, f'_3 \ldots f'_{n-2}$, die der Grundebene $f_1, f_2, f_3 \ldots f_{n-2}$.

Die Ebene der schiefen Begrenzung bilde mit der Grundebene den Winkel α, so ist:

$$F' \cos\alpha = F$$
$$f'_1 \cos\alpha = f_1$$
$$f'_2 \cos\alpha = f_2$$
u. s. w. bis
$$f'_{n-2} \cos\alpha = f_{n-2}.$$

Es sei S' der Schwerpunkt der schiefen Begrenzung, seine Entfernung von der Grundebene l, während die Entfernungen der Schwerpunkte der Dreiecke $f'_1, f'_2, f'_3 \ldots$ gleich $l_1, l_2, l_3 \ldots$ sein mögen.

Für diese Annahmen haben wir n. F. 93:

$$F' l = \Sigma f'_1 \, l_1.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit $\cos \alpha$, so entsteht

$$F' l \cos \alpha = \Sigma f'_1 \, l'_1 \cos \alpha,$$

d. h.

$$F l = \Sigma f_1 \, l_1.$$

Es bedeutet $\Sigma f_1 \, l_1$ die Summe der Inhalte der dreiseitigen Prismen, in welche das n seitige zerlegt worden ist, wobei sich $l_1, l_2, l_3 \ldots$ als die Flächen-Schwerpunktsachsen dieser dreiseitigen Prismen ergeben. Es ist also auch $\Sigma f_1 \, l_1$ oder der gleiche Werth $F l$ dem Inhalte des schief abgeschnittenen n seitigen Prismas gleich. Die vom Schwerpunkte S' der schiefen Begrenzung aus, parallel den Kanten gezogene Linie l trifft in der Grundebene F den Punkt S, welcher zugleich Schwerpunkt dieser Grundebene F ist. Zum Beweise hiervon denken wir die Endflächen des schief abgeschnittenen Prismas bis zu ihrer Durchschnittslinie $Y Y'$ verlängert und von den Schwerpunkten der zu F gehörigen Theildreiecke, sowie von dem Punkte S, Normalen x_1, $x_2, x_3 \ldots x$ auf $Y Y_1$ gefällt, so bestimmen zusammengehörige Werthe von l und x rechtwinkelige Dreiecke, die sämmtlich den Winkel α enthalten, also ähnlich sind. Es ist deshalb:

$$\frac{l_1}{x_1} = \frac{l_2}{x_2} = \frac{l_3}{x_3} = \ldots \frac{l}{x} \text{ und}$$

$$F l = \Sigma f_1 \, l_1 = \frac{l}{x} \Sigma f_1 \, x_1.$$

Hieraus ergiebt sich für die Linie $Y Y'$:

$$F x = \Sigma f_1 \, x_1,$$

d. h. S muß der Schwerpunkt der Grundebene F und l die Flächen-Schwerpunktsachse des schief abgeschnittenen Prismas sein. Aus dem Obigen folgt also:

1) Projicirt man eine ebene Figur F' auf eine Ebene, so fällt die Projection ihres Schwerpunktes mit dem ihrer Projection F zusammen.

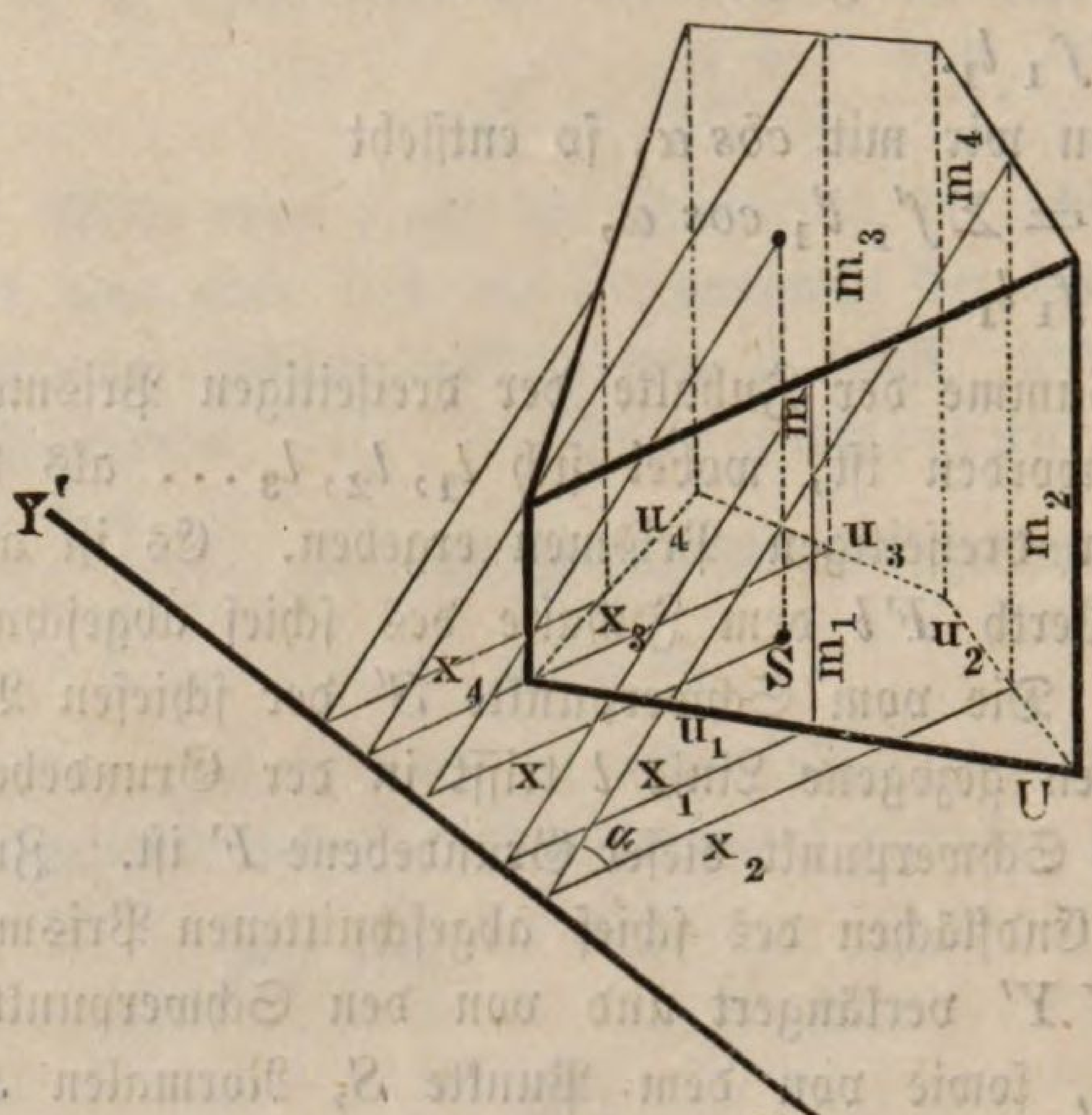
2) Der Inhalt des an einer Seite schief abgeschnittenen Prismas wird in dem Producte aus der Grundebene F und der Flächen-Schwerpunktsachse l erhalten:

$$K = F l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (106)$$

Diese Gesetze lassen sich auf Prismen ausdehnen, die an beiden Seiten schief abgeschnitten sind. Unter F ist dabei der Inhalt des Normalschnitts und unter l die Entfernung der Schwerpunkte der beiden schiefen Begrenzungsflächen zu verstehen. Es ist nämlich leicht zu sehen, daß die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte mit den Kanten des Prismas parallel läuft, da sie durch den Schwerpunkt des irgendwo construirten normalen Querschnitts gehen muß, der als gemeinschaftliche Projection beider Begrenzungsflächen angesehen werden kann. Diese Entfernung l wird man also, analog der obigen Bezeichnung, die Flächen-Schwerpunktsachse des Normalschnitts nennen können.

Der Mantel eines an einer Seite schief abgeschnittenen n seitigen Prismas besteht aus n Paralleltrapezen (Fig. 141), deren Höhen die Seiten $u_1, u_2, u_3 \ldots$ der normalen Grundfläche sind und deren Mittellinien mit $m_1, m_2, m_3 \ldots$ bezeichnet werden sollen. Für diese Bezeichnungen erhalten wir den Inhalt des Mantels M des schief abgeschnittenen Prismas in dem Ausdrucke:

Fig. 141.



$$M = u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3 + \ldots$$

Man denke die Endflächen dieses Prismas bis zu ihrer Durchschnittslinie YY' verlängert und von den Mitten der Seite $u_1, u_2, u_3 \ldots$ der normalen Grundebene Normalen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ auf diese Linie gefällt. Die entsprechende Entfernung des Schwerpunktes S des **Umfanges** der normalen Grundebene von der Linie YY' nennen wir x und die in S zu der Grundebene errichtete Normale, bis zu ihrem Durchschnitt mit der schiefen Begrenzungsfläche, werde mit m bezeichnet. Zusammengehörige Werthe von x und m bestimmen rechtwinkelige Dreiecke, die sämmtlich den Winkel α, welchen die beiden Grundebenen des Prismas miteinander bilden, enthalten, die also einander ähnlich sind. Demnach ist:

$$\frac{m_1}{x_1} = \frac{m_2}{x_2} = \frac{m_3}{x_3} = \ldots \frac{m}{x}$$

und bei Benutzung dieser Beziehungen erhalten wir für den Inhalt des Mantels:

$$M = \frac{m}{x}(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + \ldots).$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck läßt sich als die algebraische Summe der Momente der Seiten der normalen Grundebene, bezogen auf die Linie YY', ansehen und n. §. 93 durch das Moment der Mittelkraft, die hier der Umfang U der normalen Grundebene ist, ersetzen. Es ist deshalb

$$M = Um \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

Nennen wir hierin m die **Umfangs-Schwerpunktsachse** der normalen Grundebene, so heißt das Gesetz:

Der Inhalt des Mantels eines an einer Seite schief abgeschnittenen n seitigen Prismas wird erhalten in dem Product aus dem Umfange der normalen Grundebene und der dazu gehörigen Umfangs-Schwerpunktsachse. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die letztere im Allgemeinen in der

schiefen Begrenzungsfläche nicht den Schwerpunkt des Umfanges derselben, sondern irgend einen beliebigen Punkt trifft, wodurch sich die Umfangs-Schwerpunktsachse ganz besonders von der Flächen-Schwerpunktsachse unterscheidet. Die eben entwickelte Formel 107 findet auf beiderseitig schief abgeschnittene Prismen Anwendung, wenn man unter U den Umfang des Normalschnitts und unter m die durch den Schwerpunkt dieses Umfanges mit den Kanten parallel gezogene Linie versteht, soweit dieselbe innerhalb des schief abgeschnittenen Prismas liegt. Dieselbe trifft aber im Allgemeinen nicht die Schwerpunkte der Umfänge der schiefen Begrenzungsfläche.

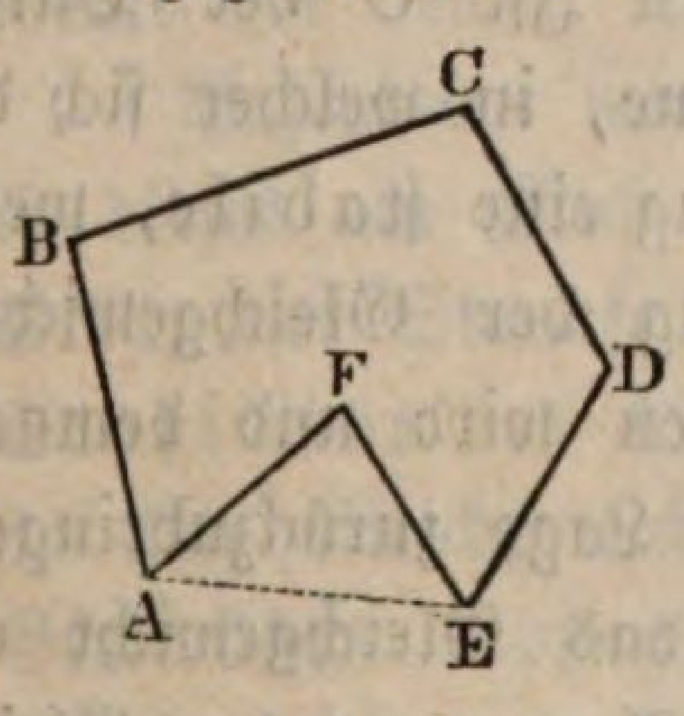
Die beiden in Formel 106 und 107 für prismatische Körper hergeleiteten Gesetze gelten für alle zur Gattung der geraden Cylinder gehörigen Körper.

Das ganze Gewicht eines Körpers kann in dessen Schwerpunkt vereinigt 44
gedacht werden als eine abwärts wirkende lothrechte Kraft. Der Körper wird nach §. 39 in Ruhe bleiben, sobald sein Schwerpunkt unterstützt, die Bewegung des Körpers senkrecht gegen den Horizont verhindert ist.

Stützt sich ein Körper mit einem Punkte gegen eine Ebene und soll er in Ruhe bleiben, so muß die Reaction der Ebene in lothrechter Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

Soll ein Körper ruhig liegen, indem er sich mit zwei Punkten gegen eine feste Oberfläche stützt, so müssen die Reactionen der beiden Stützpunkte mit dem im Schwerpunkte des Körpers wirksamen Gewichte in einer Ebene liegen. Die Richtung des Gewichts muß also einen Punkt der Verbindungslinie der beiden Stützpunkte treffen, wobei die Reactionen diesem Gewichte parallel sein, oder sich in einem Punkte mit demselben schneiden können.

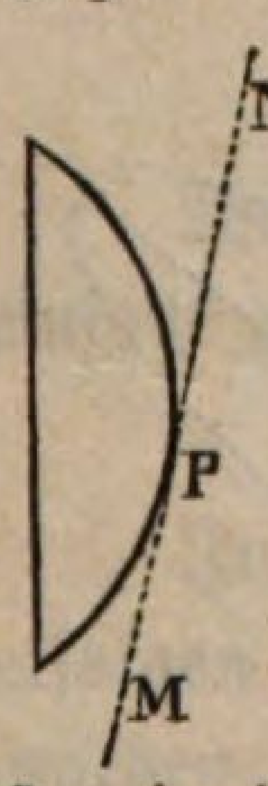
Fig. 142.



Ist ein Körper in drei Punkten unterstützt, so wird Gleichgewicht bestehen, wenn sich die drei Reactionen mit der im Schwerpunkte wirksamen Kraft in demselben Punkte schneiden oder mit derselben parallel sind.

Findet die Unterstützung des Körpers auf einer Horizontalebene in drei oder mehreren Punkten statt, die nicht in gerader Linie liegen, so bleibt der Körper in Ruhe, wenn die durch den Schwerpunkt gerichtete lothrechte Linie einen Punkt innerhalb der Grundfläche des Körpers trifft. Als Grundfläche ist hierbei stets die Figur anzusehen, um deren Seiten als Kanten der Körper sich drehen kann. Für die (Fig. 142) sechs angenommenen Unterstützungspunkte A, B, C, D, E, F würde also hiernach das Fünfeck $ABCDE$ die Grundfläche des Körpers bilden.

Fig. 143.



Wird die Grundfläche durch eine krumme Linie (Fig. 143) begrenzt, so sind die in den einzelnen Punkten P zur Linie construirten Tangenten MN als Seiten der Grundfläche anzusehen.

Denken wir einen auf einer Horizontalebene ruhenden Körper um ein Geringes dadurch aus seiner Lage gebracht, daß wir ihn um eine der Seiten seiner Grundfläche drehen, so wird die im Schwerpunkte wirksame Kraft sich auf verschiedene Weise bemerkbar machen.

1) Der ursprüngliche Zustand wird wieder hergestellt, wenn der Schwerpunkt S (Fig. 144) bei der Drehung gehoben wurde.

2) Der Körper wird umschlagen, sobald der Schwerpunkt S (Fig. 145) durch die Drehung in eine tiefere Lage gebracht wurde.

Fig. 144.

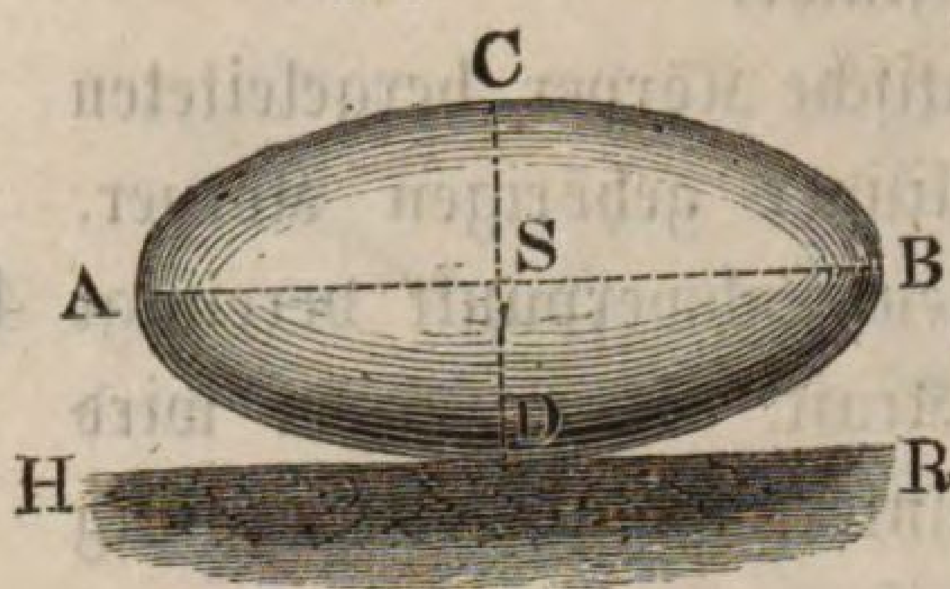


Fig. 145.

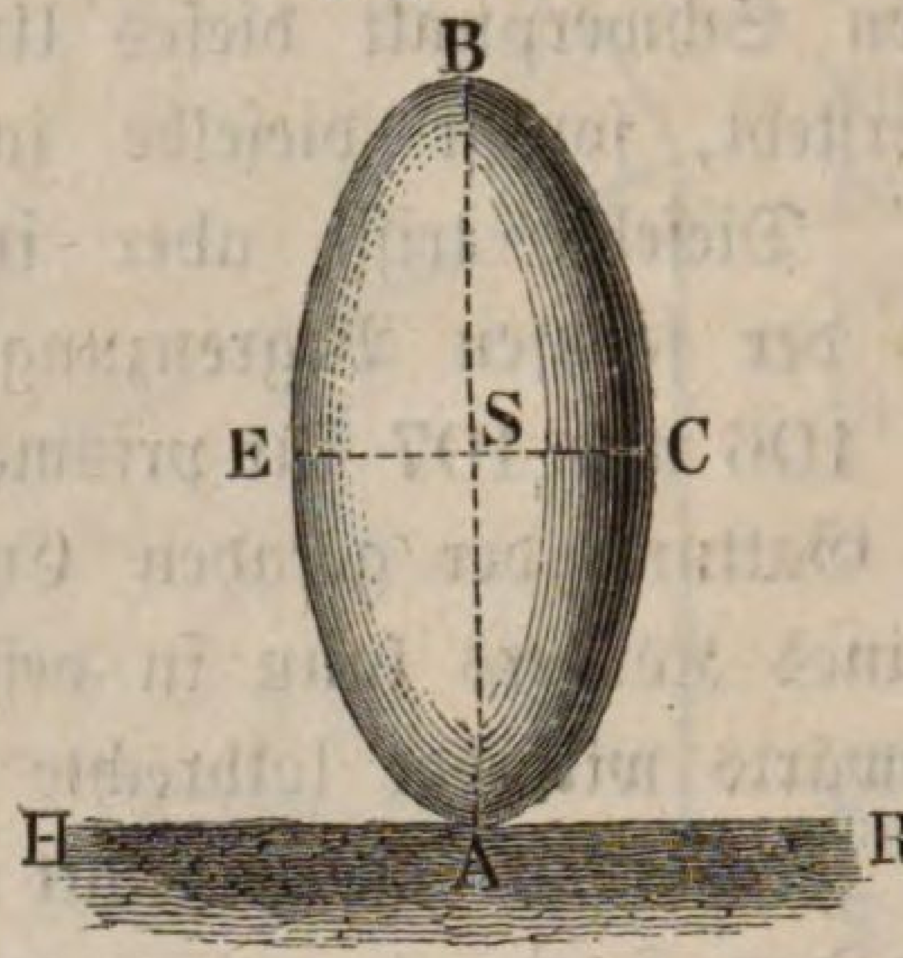
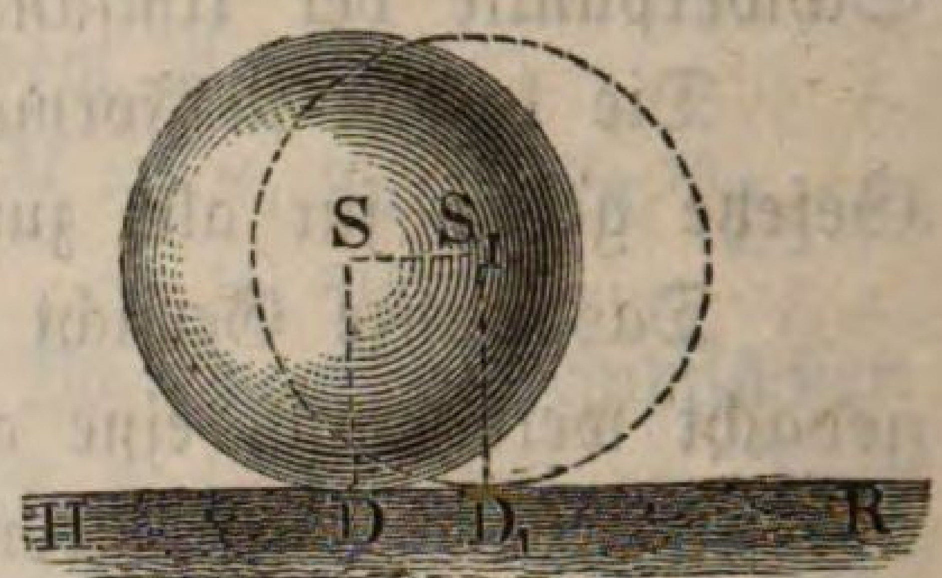


Fig. 146.



3) Der Körper wird in der neuen Lage beharren, wenn die Entfernung des Schwerpunktes S (Fig. 146) von der Horizontalebene durch die Drehung nicht geändert wurde. Hiernach kann das ursprüngliche Gleichgewicht des Körpers ein dreifaches sein.

Das Gleichgewicht heißt stabil, wenn der Schwerpunkt die möglich tiefste Lage einnimmt, dagegen nennen wir es labil, wenn sich der Schwerpunkt auf der höchsten Stelle befindet, endlich ist das Gleichgewicht ein neutrales oder indifferentes, wenn der Schwerpunkt bei jeder Stellung des Körpers dieselbe Entfernung von der Grundfläche behauptet.

Dieser dreifache Gleichgewichtszustand läßt sich auch bei Körpern, die sich um eine feste Achse zu drehen vermögen, unterscheiden. Ist C der Durchschnittspunkt dieser Drehachse und derjenigen Verticalebene, in welcher sich der Schwerpunkt S des Körpers findet, so ist die Aufhängung eine stabile, wenn S vertical unter C liegt (Fig. 147), da bei Aenderung der Gleichgewichtslage das in S wirksame Gewicht G des Körpers gehoben wird und demnach das Bestreben äußert, den Körper in die ursprüngliche Lage zurückzubringen. Liegt dagegen C vertical über S (Fig. 148), so ist das Gleichgewicht ein labiles, da das in S wirksame Gewicht G, bei einer Aenderung der Gleichgewichtslage, die angefangene Bewegung fortzusetzen bestrebt ist. Endlich ist

Fig. 147.

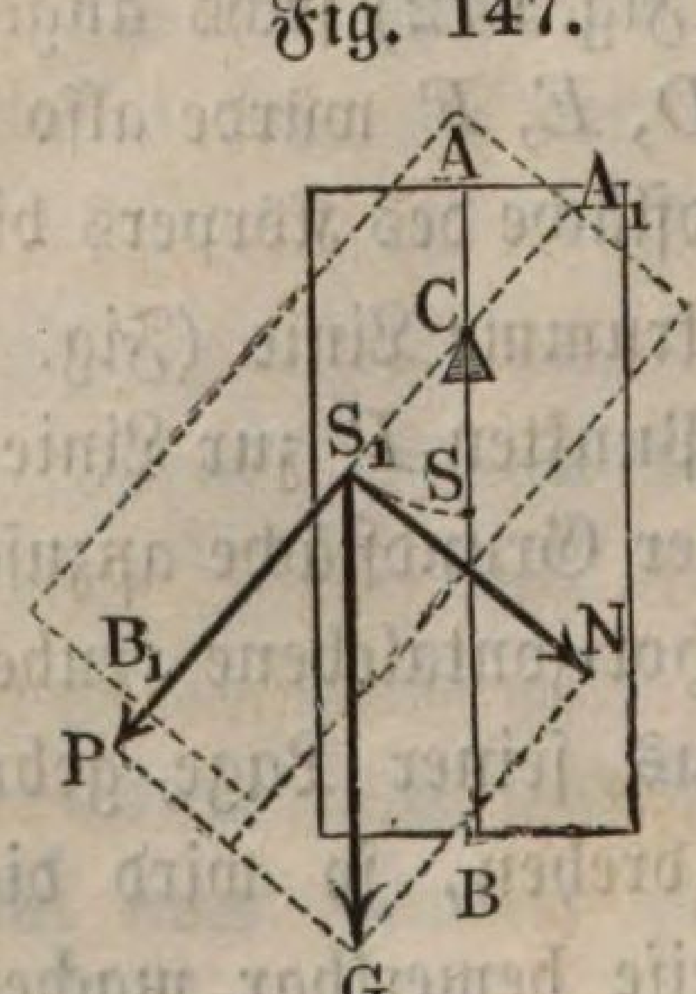


Fig. 148.

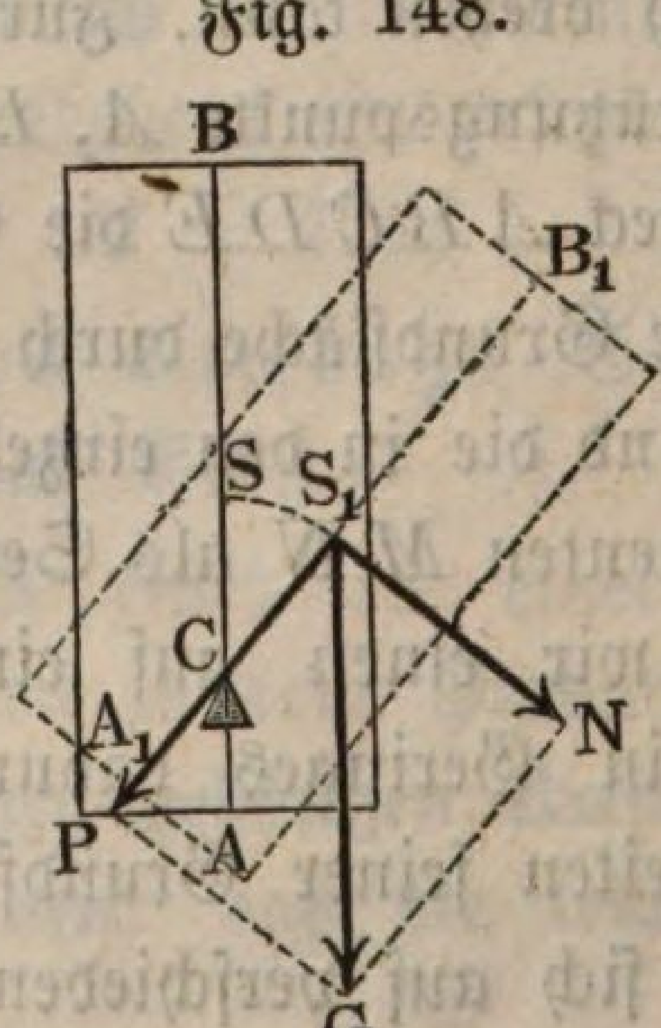
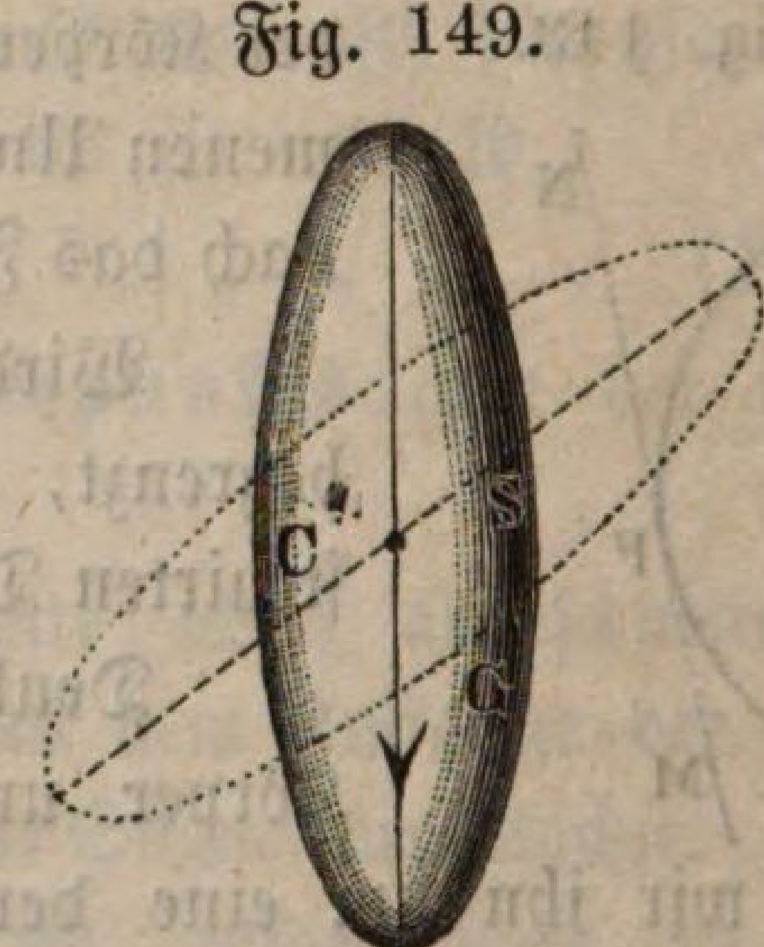


Fig. 149.



die Aufhängung des Körpers indifferent (Fig. 149), wenn der Punkt S mit dem Punkte C zusammenfällt, da bei einer Drehung des Körpers um C resp. S, keine Bewegung eintritt, vielmehr jede andere Lage ebenfalls als Gleichgewichtslage angesehen werden muß.

Ein Körper stütze sich auf eine Horizontalebene und sei im stabilen Gleichgewicht. Für diese Annahme muß der Schwerpunkt des Körpers unterstützt sein, die Richtung der lothrecht wirksamen Kraft muß also einen Punkt innerhalb der Begrenzung der Grundfläche treffen.

Auf den Körper wirken nach beliebigen Richtungen Kräfte, welche sich nach §. 38 immer zu einer Resultante R und einem Kräftepaar $Q\,q$ vereinigen lassen. Die Kräfte mögen kein Bestreben haben, den Körper in fortschreitende Bewegung zu versetzen, dagegen mögen sie denselben umzuwerfen versuchen. Dem Umwerfen geht ein Kippen um eine Seite der Grundfläche voran. Das Kippen ist Drehung, wird also durch das Kräftepaar $Q\,q$ herhervorgebracht, das aus den drei Kräftepaaren $L\,l$, $M\,m$, $N\,n$ besteht. Sehen wir die Seite, um welche das Kippen erfolgt, als die jedesmalige Z-Achse an, so werden $L\,l$ und $M\,m$ von selbst außer Wirkung gebracht und das Kräftepaar $N\,n$ wirkt allein auf Kippen.

Das Gewicht W des Körpers liegt immer in einer zur Grundfläche normalen Ebene und widersetzt sich dem Umwerfen. Das Maß dieses Widerstandes ist in dem statischen Momente $W\,w$ für die Seite der Grundfläche als Drehachse gegeben, um welche die Drehung erfolgen wird. Die beiden Kräftepaare $N\,n$ und $W\,w$ liegen entweder in derselben oder in parallelen Ebenen und haben entgegengesetztes Drehungsbestreben, sie lassen sich deshalb durch ein Paar ersetzen, dessen Moment gleich der algebraischen Summe der Momente der beiden Kräftepaare ist.

Bezeichnen wir das Moment des resultirenden Paares durch $S\,s$, so ist dieses ein Maß für die Widerstandsgröße gegen das Umwerfen, für die Größe der Standfestigkeit des Körpers. Wir nennen den Ausdruck $S\,s$ die Stabilität des Körpers. Dieselbe ist positiv, so lange der Körper sich im stabilen Gleichgewichte befindet, negativ, wenn um irgend eine Seite der Grundfläche Kippen erfolgt, Null, wenn sich der Körper an der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen befindet.

Es ist: $$S\,s = W\,w - N\,n$$

oder für $N\,n$ den Werth gesetzt:

$$S\,s = W\,w - \Sigma P_1\,(x_1 \cos \beta_1 - y_1 \cos \alpha_1) \quad . \; . \; . \quad (108)$$

Wirken keine äußeren Kräfte auf den Körper, so ist die Stabilität desselben einfach gleich $W\,w$

$$S\,s = W\,w \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (109)$$

In den meisten Fällen der Anwendung wird die Seite, um welche Kippen erfolgen kann, unmittelbar gegeben sein, oder sich durch eine einfache Schätzung ergeben. Will man jedoch die Achse des Kippens bestimmen, so ist folgendermaßen zu verfahren.

Wir nehmen die X-Achse des Systems normal zu der Ebene, auf die der Körper sich stützt, wählen in der letzteren die Z-Achse beliebig, bestimmen darauf die Y-Achse normal dazu und bilden aus den äußeren Kräften die Resultante R und die drei Kräftepaare $L\,l$, $M\,m$, $N\,n$.

Wir lassen R ganz außer Betracht. Es ist weiter ersichtlich, daß das Paar $L\,l$, welches um die X-Achse ein Drehen hervorbringen will, für unsern vorliegenden Fall bei der Untersuchung des Kippens ebenfalls vernachlässigt werden muß.

Die beiden Kräftepaare $M\,m$ und $N\,n$ vereinigen wir zu einem Kräftepaar, dessen Ebene durch dieselbe X-Achse geht, die also normal zur Stützebene des Körpers gerichtet ist. Nachdem die Paarebene dieses resultirenden Paares der Lage nach bestimmt ist, wird diejenige Seite der Grundfläche des Körpers als Achse des Kippens genommen werden müssen, welche normal zu dieser Ebene gerichtet ist.

Uebungen.

1. Ein mit Blei ausgefüllter Stein wiegt 150 Kilogramm und hat ein specifisches Gewicht gleich 7,3. Das darin enthaltene Blei habe ein Gewicht von 100 Kilogramm und das specifische Gewicht 11,32. Welches specifische Gewicht hat die Steinmasse für sich allein?

4,26.

2. Ein Kegel, der durch die Höhe h und den Halbmesser r_1 der Grundebene gegeben ist, besteht aus zwei Theilen. Der untere Theil, ein abgestumpfter Kegel, habe das specifische Gewicht s_1, der obere, d. i. der zugehörige Ergänzungskegel, habe das specifische Gewicht s_2. Es ist die Höhe eines jeden der beiden Körper zu berechnen, wenn sie gleiches Gewicht erhalten sollen.

Höhe des vollständigen Kegels:

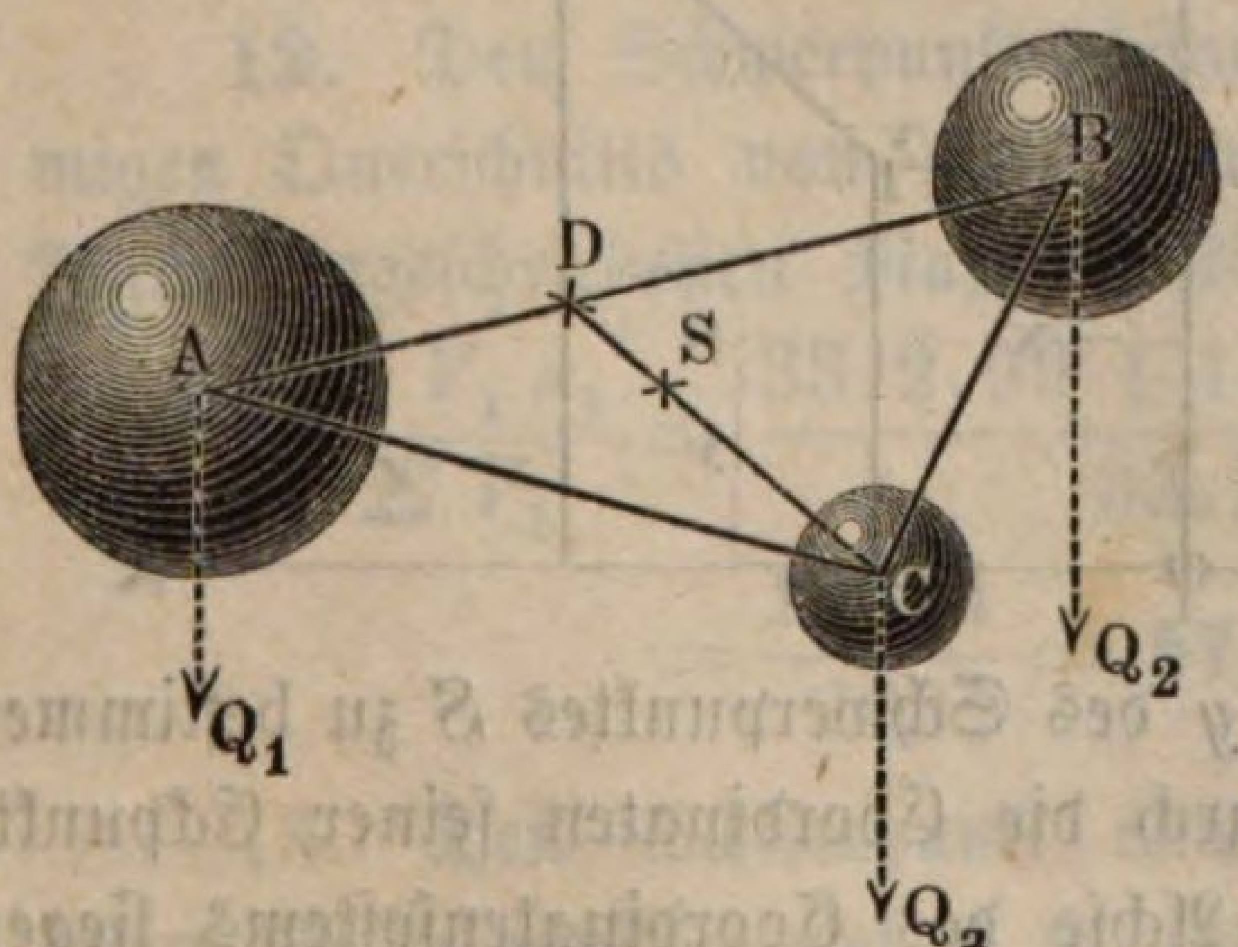
$$h \sqrt[3]{\frac{s_1}{s_1 + s_2}}.$$

Höhe des abgestumpften Kegels:

$$h \left(1 - \sqrt[3]{\frac{s_1}{s_1 + s_2}}\right).$$

3. Es ist der Schwerpunkt für drei homogene Kugeln von den Gewichten Q_1, Q_2, Q_3 zu bestimmen, welche in ihrer festen Verbindung durch ihre Mittelpunkte A, B, C, das Dreieck ABC bestimmen, das also als vollkommen bekannt angesehen werden darf (Fig. 150). Es sei D der Schwerpunkt zu Q_1 und Q_2, dann ist CD eine Schwerlinie, und der Punkt S derselben Schwerpunkt der drei Kugeln. Bezeichnet man AB mit c und CD mit t, so ist

Fig. 150.



$$BD = c \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \text{ und}$$

$$DS = t \frac{Q_3}{Q_1 + Q_2 + Q_3}.$$

Für $Q_1 = Q_2$ wird $BD = \frac{c}{2}$,

daher CD die Mittellinie t_3 von C ausgehend, und

$$DS = t_3 \frac{Q_3}{2\,Q_1 + Q_3}.$$

Ist auch noch $Q_3 = Q_1 = Q_2$, so ist

$$DS = \tfrac{1}{3}\,t_3,$$

und S ist dann zugleich Schwerpunkt der schweren Dreiecksfläche ABC.

4. Den Schwerpunkt einer geraden Linie von der Länge l zu bestimmen, die von sehr vielen parallelen Kräften in gleichen Abständen angegriffen wird. Die Kräfte mögen sich der Größe nach wie die Producte 1.2.3, 2.3.4, 3.4.5, 4.5.6 u. s. w. verhalten, und die erste derselben sei P

$$\frac{l}{n}\,\frac{4n+1}{5}.$$

5. Es ist der Schwerpunkt von dem schweren Umfange einer beliebigen geradlinigen Figur zu bestimmen.

6. Den Schwerpunkt eines schweren Kreisbogens zu bestimmen, dessen zugehörige Sehne 15^m und dessen Halbmesser 12^m Länge hat

$11{,}11^m$ vom Mittelpunkte entfernt.

7. Wo liegt der Schwerpunkt eines schweren Bogens von demselben Halbmesser, dessen Mittelpunktswinkel $34°\,7'$ ist?

$11{,}82^m$ vom Mittelpunkte entfernt.

8. Es ist der Schwerpunkt eines beliebigen schweren Sechsecks zu bestimmen.

9. Von einem Paralleltrapez (Fig. 151) sind die parallelen Seiten a und b, die Höhe h und ein Winkel α an der unteren Grundlinie gegeben.[1] Es ist der Abstand x des Schwerpunktes S von derjenigen nicht parallelen Seite des Trapezes zu bestimmen, welche Schenkel des Winkels α ist,

$$x = \tfrac{1}{3}\,\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}\,\sin\alpha.$$

Fig. 151.

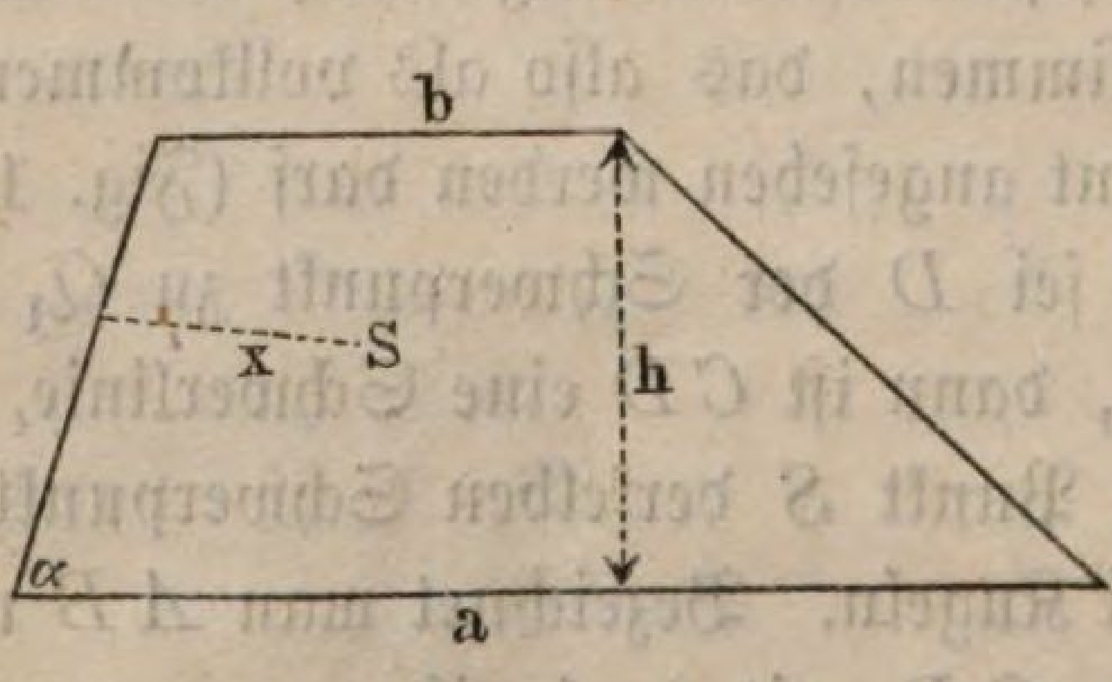
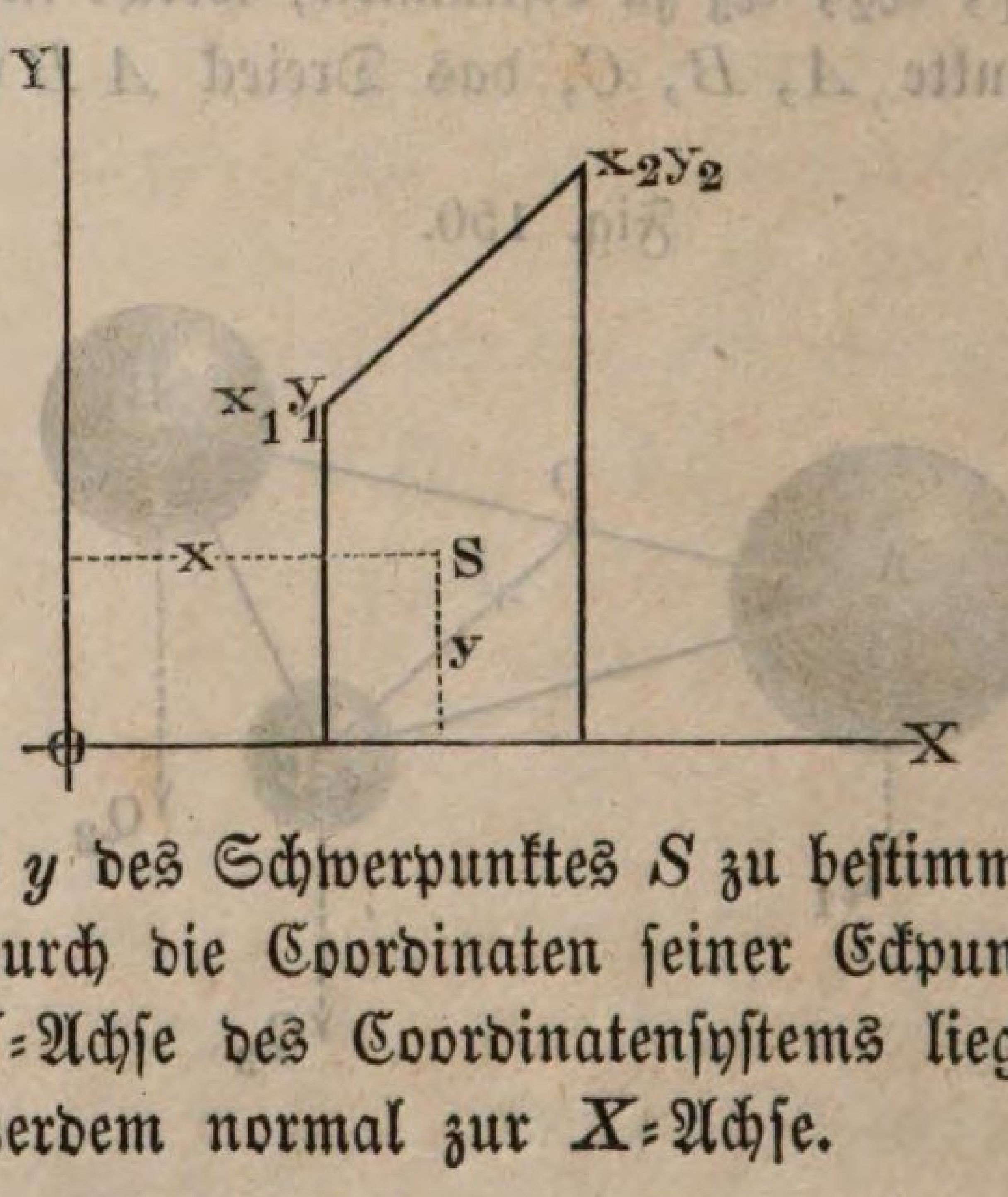


Fig. 152.



10. Es sind die Coordinaten x und y des Schwerpunktes S zu bestimmen für ein Paralleltrapez (Fig. 152), das durch die Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben ist, von denen zwei in der X=Achse des Coordinatensystems liegen mögen. Die parallelen Seiten seien außerdem normal zur X=Achse.

$$x = \tfrac{1}{3}\,\frac{y_1\,(2\,x_1 + x_2) + y_2\,(x_1 + 2\,x_2)}{y_1 + y_2},$$

$$y = \tfrac{1}{3}\,\frac{y_1^{\,2} + y_1\,y_2 + y_2^{\,2}}{y_1 + y_2}.$$

11. Den Schwerpunkt S des unregelmäßigen Fünfecks (Fig. 153) zu bestimmen, das durch die Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben ist.

$$\begin{cases} x_1 = 2,\ x_2 = 10,\ x_3 = 18,\ x_4 = 16,\ x_5 = 8 \\ y_1 = 10,\ y_2 = 14,\ y_3 = 12,\ y_4 = 6,\ y_5 = 2. \end{cases}$$

$$6\,\Sigma\,V_1\,x_1 = +\,3584,\ +\,8672,\ -\,1848,\ -\,2432,\ -\,936$$

$$6\,\Sigma\,V_1\,y_1 = +\,3488,\ +\,4064,\ -\,504,\ -\,416,\ -\,744$$

$$2\,\Sigma\,V_1 = 228$$

$$x = \frac{1760}{171} = 10{,}3;\ y = \frac{1472}{171} = 8{,}6.$$

Fig. 153.

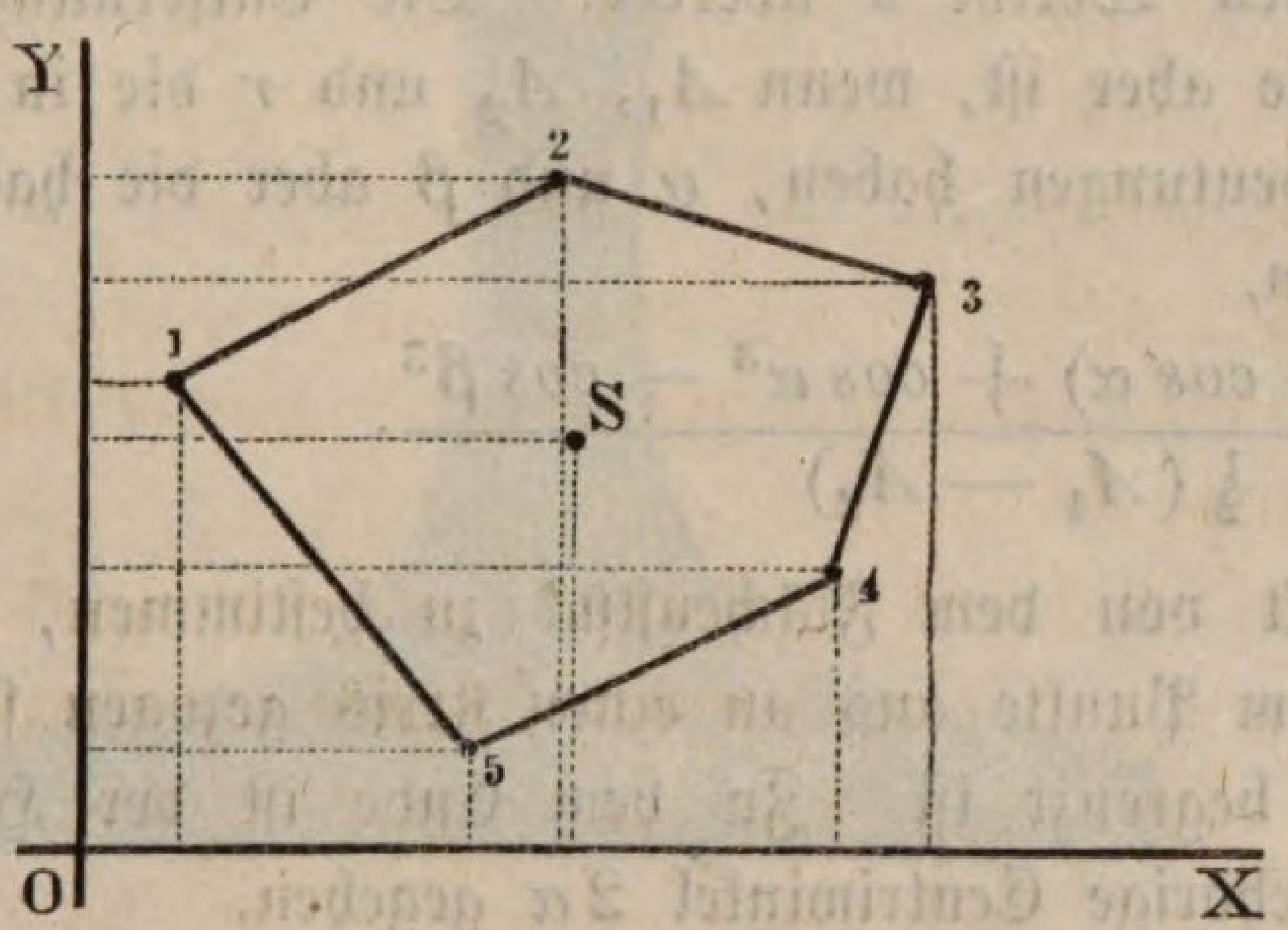
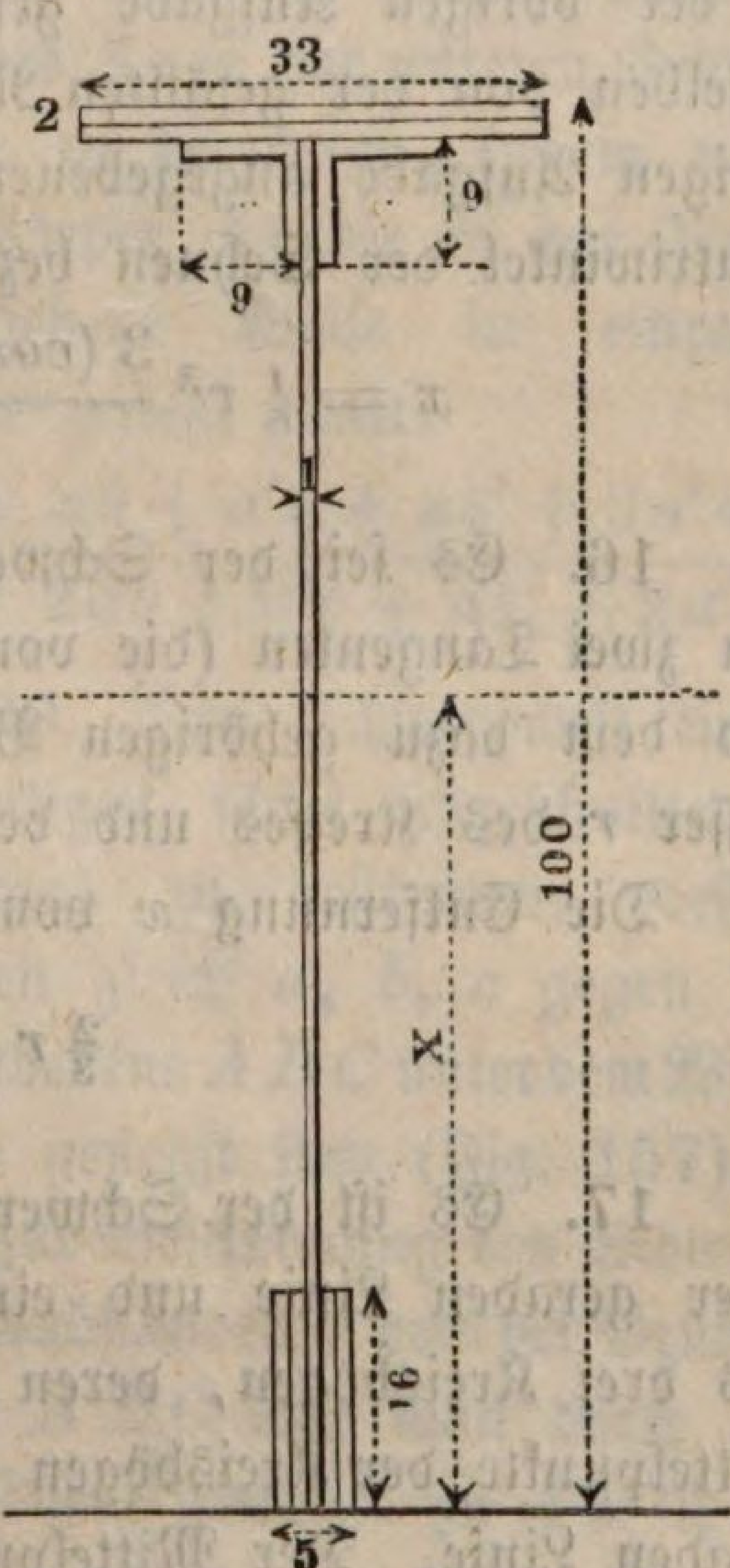


Fig. 154.



12. Den Schwerpunktsabstand x des in Figur 154 gezeichneten T förmigen Querschnitts von der unteren Kante zu berechnen, wenn die in der Figur eingeschriebenen Maße Centimeter bedeuten.

$$x = \frac{\Sigma\,V_1\,x_1}{\Sigma\,V_1} = \frac{33.2.99 + 18.1.97{,}5 + 8.2.93 + 98.1.49 + 16.4.8}{33.2 + 18.1 + 8.2 + 98.1 + 16.4.}$$

$$= \frac{15091}{262} = 57{,}6^{cm}.$$

13. Den Schwerpunkt eines schweren Kreisausschnittes zu bestimmen, dessen Mittelpunktswinkel $\frac{5}{6}\,\pi$ und dessen Halbmesser 6^m ist.

$2{,}951^m$.

14. Das zwischen zwei parallelen Sehnen von der Länge $2a$ und $2b$ eines Kreises gelegene Stück sei schwer.

Wo liegt der Schwerpunkt, wenn der Halbmesser des Kreises gleich r gegeben ist?

Die Fläche ist gleich der Differenz zweier Kreisabschnitte, gleich $A_1 - A_2$. Der Schwerpunkt liegt auf der vom Mittelpunkte des Kreises auf die Sehnen gefällten Normale, und sein Abstand z vom Mittelpunkte ist

$$z = \frac{2}{3}\frac{a^3 - b^3}{A_1 - A_2}.$$

15. Fällt man von dem Mittelpunkt des Kreises bei der letzten Bestimmung die angegebene Normale, so theilt dieselbe das vorige Flächenstück in zwei congruente Theile.

Es ist der Schwerpunkt eines solchen schweren Theiles zu bestimmen.

Die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte stimmt mit dem in der vorigen Aufgabe gefundenen Werthe z überein. Die Entfernung x desselben von der gefällten Normale aber ist, wenn A_1, A_2 und r die in der vorigen Aufgabe angegebenen Bedeutungen haben, α und β aber die halben Centriwinkel der Sehnen bezeichnen,

$$x = \frac{1}{6} r^3 \frac{3\,(\cos\beta - \cos\alpha) + \cos\alpha^3 - \cos\beta^3}{\frac{1}{2}(A_1 - A_2)}.$$

16. Es sei der Schwerpunkt von dem Flächenstück zu bestimmen, das von zwei Tangenten (die von einem Punkte aus an einen Kreis gezogen sind) und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt ist. Zu dem Ende ist der Halbmesser r des Kreises und der zugehörige Centriwinkel 2α gegeben.

Die Entfernung x vom Mittelpunkte des Kreises ist

$$\frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha^3}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos\alpha^2}.$$

17. Es ist der Schwerpunkt einer schweren Fläche zu bestimmen, die von einer geraden Linie und einem Korbbogen begrenzt ist. Der letztere bestehe aus drei Kreisbögen, deren Halbmesser gleich r und $\frac{1}{2}r$ gegeben sind. Die Mittelpunkte der Kreisbögen am Ende liegen in der zur Begrenzung dienenden geraden Linie. Der Mittelpunktswinkel für den mittleren Bogen sei 2α gleich $60°$ oder gleich $\frac{\pi}{3}$.

Der Abstand z des Schwerpunktes von der die Fläche begrenzenden gegeraden Linie ist:

$$z = \frac{1}{6} r \frac{4 + 28\sin\alpha + \cos\alpha\,(\sin 2\alpha - 24\,\alpha)}{\pi + 6\,\alpha - \sin 2\,\alpha}$$

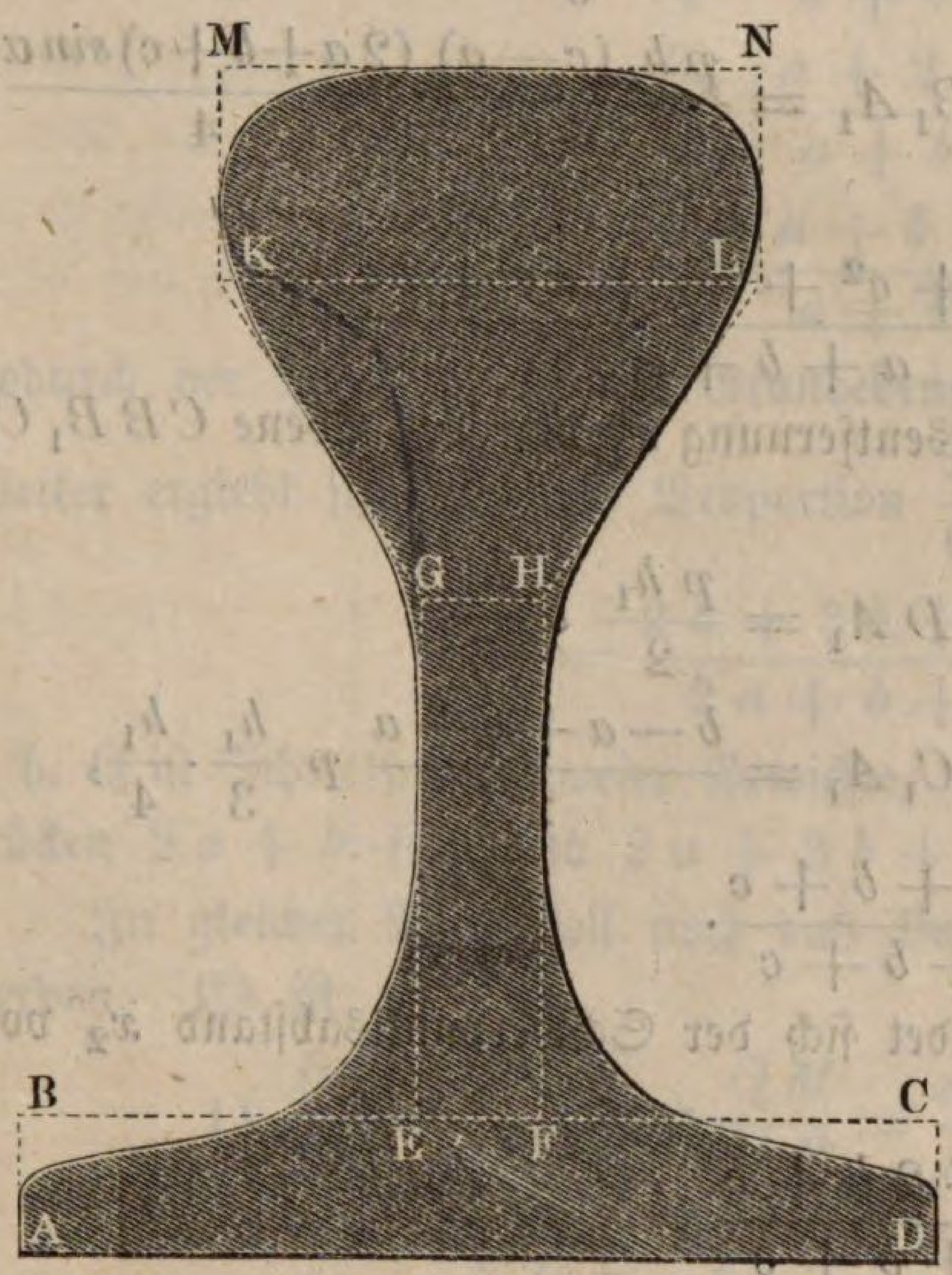
$$z = 0{,}242\ r.$$

18. Den Schwerpunktsabstand x des Schienenprofils (Fig. 155) von der unteren Kante AD zu berechnen, unter der Voraussetzung, daß die krummlinigen Begrenzungen durch die in der Figur angegebenen geraden

Umrisse ersetzt werden. Dabei sei: $AB = 14^{mm}$, $AD = 93^{mm}$, $EF = 13^{mm}$, $EG = 53^{mm}$, $KL = 54^{mm}$, $KM = 21^{mm}$, und die Höhe des Paralleltrapezes $GHLK$ gleich 32^{mm}.

$$x = \frac{\Sigma V_1 x_1}{\Sigma V_1} = \frac{253666,2}{4197} = 60,4^{mm}.$$

Fig. 155.

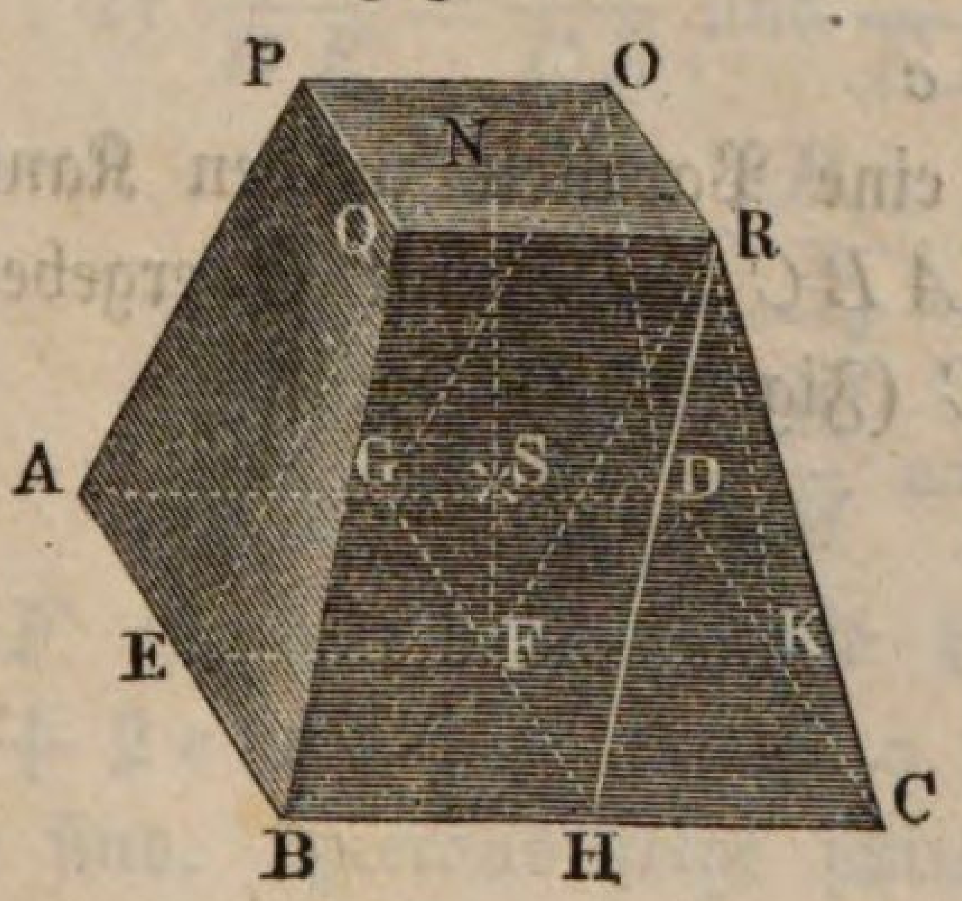


19. Es ist der Schwerpunkt eines schweren Obelisken zu bestimmen, wenn dessen Abmessungen gegeben sind (Fig. 156).

Es sei h die Höhe des Obelisken, die Seiten der unteren rechteckigen Grundebene seien $AB = a$ und $BC = b$, die der oberen $PQ = a'$ und $QR = b'$. Es ist der Abstand z des Schwerpunktes S von der unteren Grundebene zu berechnen, indem man den Körper auf die in der Figur angegebene Weise in einzelne Theile zerlegt denkt:

$$z = \frac{h}{2} \cdot \frac{ab + a'b + ab' + 3a'b'}{2ab + a'b + ab' + 2a'b'}.$$

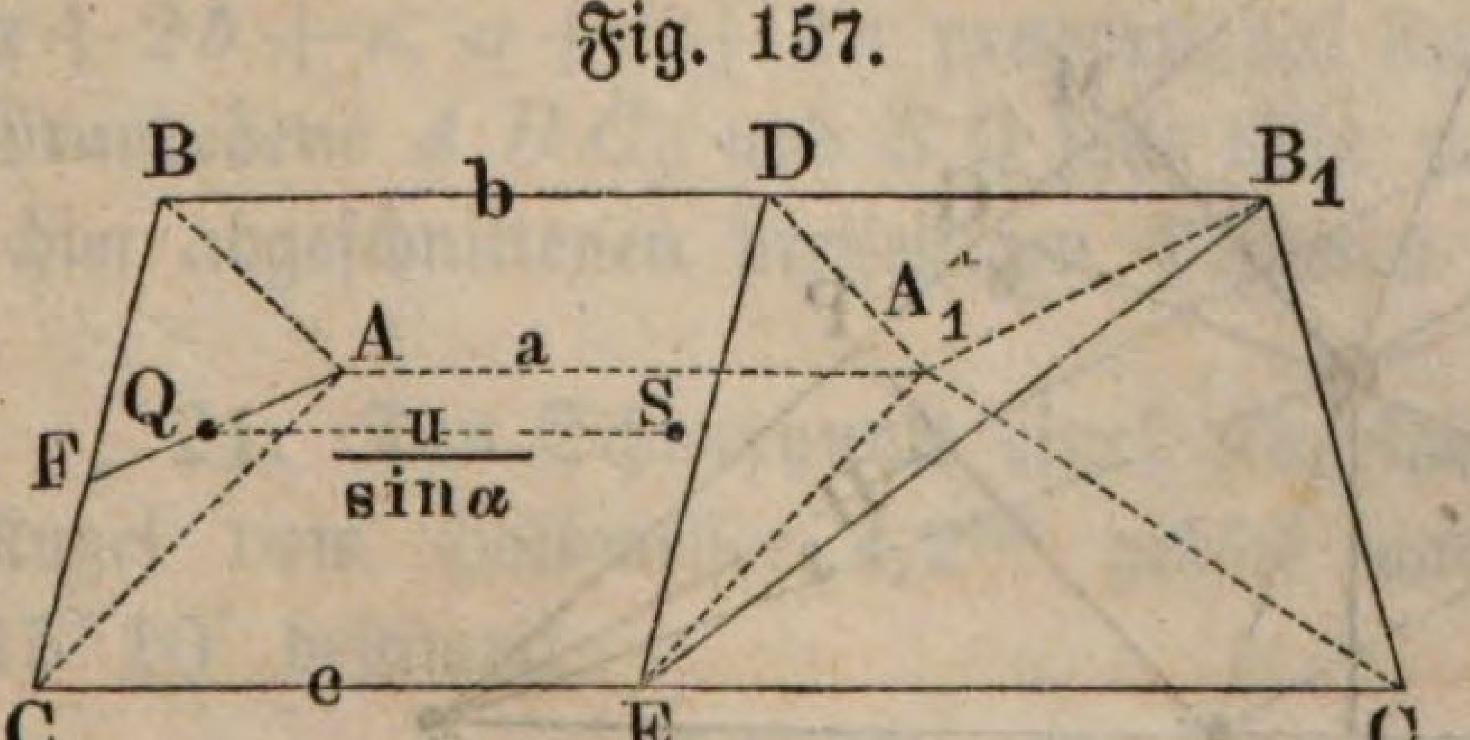
Fig. 156.



20. Den Schwerpunkt eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prismas zu bestimmen, dessen Kanten gleich a, b, c gegen die Grundebene ABC unter dem Winkel α geneigt sind (Fig. 157).

Zur Bestimmung des Schwerpunktsabstandes u von der Grundebene ABC lege man durch A_1 eine Ebene parallel zu ABC, so wird der Körper in das dreiseitige Prisma $ABCEDA_1$ und in die vierseitige Pyramide $EDB_1C_1A_1$ zerlegt, welche letztere durch die Ebene EB_1A_1 wieder in zwei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden mag. Es seien die Seiten des Normalschnitts p, q, r, und die Höhen desselben h_1, h_2, h_3, so daß p die normale Entfernung der Kante BB_1 von CC_1, und h_1 die

Fig. 157.



der Kante $A A_1$ von der Ebene $C B B_1 C_1$, q die Entfernung der Kante $A A_1$ von $C C_1$, und h_2 die der Kante $B B_1$ von der Ebene $C A A_1 C_1$ bezeichnet. In Bezug auf $A B C$ als Momentenebene ist:

das Moment des Prismas $ABCEDA_1 = \frac{p\,h_1}{2}\,a\,\frac{a \sin\alpha}{2}$

» » der Pyramide $E D B_1 A_1 = \frac{p\,h_1(b-a)}{6} \cdot \frac{(3a+b)\sin\alpha}{4}$

» » » » $E C_1 B_1 A_1 = \frac{p\,h_1(c-a)}{6} \cdot \frac{(2a+b+c)\sin\alpha}{4}$.

Hieraus ergiebt sich:

$$u = \tfrac{1}{4} \sin\alpha \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc}{a + b + c}.$$

Zur Berechnung der Schwerpunktsentfernung x_1 von der Ebene CBB_1C_1 haben wir:

das Moment des Prismas $ABCEDA_1 = \frac{p\,h_1}{2}\,a\,\frac{h_1}{3}$

» » der Pyramide $EDB_1C_1A_1 = \frac{b-a+c-a}{2}\,p\,\frac{h_1}{3} \cdot \frac{h_1}{4}$,

daher
$$x_1 = \frac{h_1}{4} \cdot \frac{2a + b + c}{a + b + c}.$$

Bei entsprechender Zerlegung findet sich der Schwerpunktsabstand x_2 von der Ebene CAA_1C_1

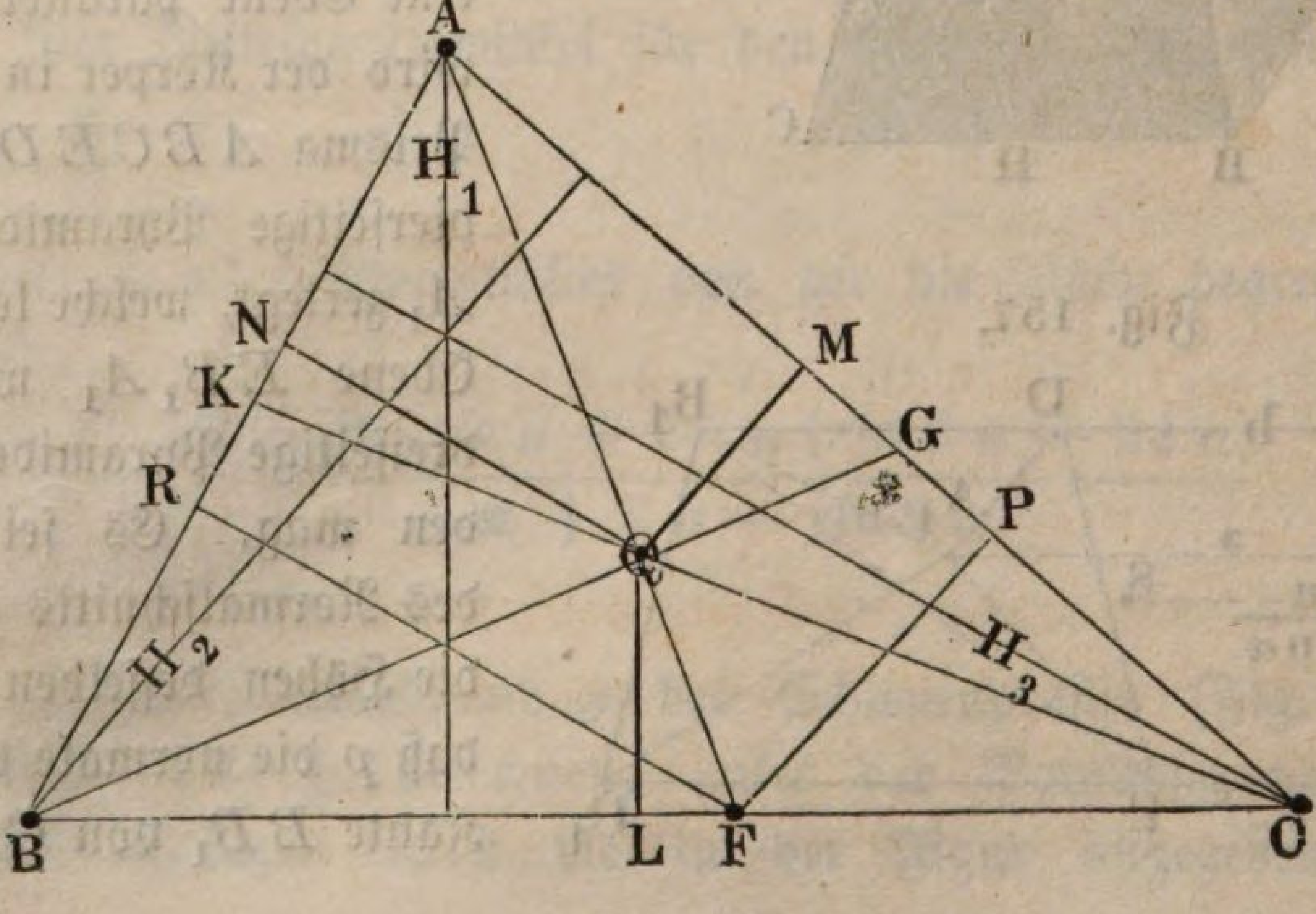
$$x_2 = \frac{h_2}{4} \cdot \frac{a + 2b + c}{a + b + c}$$

und der von der Ebene ABB_1A_1

$$x_3 = \frac{h_3}{4} \cdot \frac{a + b + 2c}{a + b + c}.$$

Man ziehe durch den Schwerpunkt S eine Parallele zu den Kanten des Prismas, wodurch sich in der Grundebene ABC der Punkt Q ergeben mag. Verbindet man denselben mit A, B und C (Fig. 158), so ist

Fig. 158.



$$h_1 : x_1 = AF : QF = H_1 : QL$$
$$h_2 : x_2 = BG : QG = H_2 : QM$$
$$h_3 : x_3 = CK : QK = H_3 : QN,$$

wenn wir mit H_1, H_2, H_3 die Höhen des Dreiecks ABC bezeichnen.

Hieraus folgt:

$$QL = \frac{H_1}{4} \cdot \frac{2a + b + c}{a + b + c}$$
$$QM = \frac{H_2}{4} \cdot \frac{a + 2b + c}{a + b + c}$$
$$QN = \frac{H_3}{4} \cdot \frac{a + b + 2c}{a + b + c},$$

wodurch der Punkt Q in der Grundebene ABC der Lage nach bestimmt ist. Weiter ergiebt sich aus der Proportion $\frac{AF}{QF} = \frac{H_1}{QL}$

$$\frac{AQ}{FQ} = \frac{2a + 3b + 3c}{2a + b + c},$$

d. h. Q ist Schwerpunkt zweier Gewichte, in A und F wirksam, die den Ausdrücken $2a + b + c$ und $2a + 3b + 3c$ proportional sind.

In gleicher Weise soll noch das Verhältniß von BF und CF bestimmt werden. Es ist

1) $\frac{BC}{FC} = \frac{H_2}{FP}$ und $\frac{QM}{FP} = \frac{AQ}{AF} = \frac{H_1 - QL}{H_1}$ oder

$$FC = \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{QM}{H_1 - QL} \cdot BC;$$

2) $\frac{BC}{BF} = \frac{H_3}{FR}$ und $\frac{QN}{FR} = \frac{AQ}{AF} = \frac{H_1 - QL}{H_1}$ oder

$$FB = \frac{H_1}{H_3} \cdot \frac{QN}{H_1 - QL} \cdot BC,$$

daher $$\frac{BF}{CF} = \frac{H_2}{H_3} \cdot \frac{QN}{QM} = \frac{a + b + 2c}{a + 2b + c},$$

d. h. F ist der Schwerpunkt von zwei Gewichten, die den Ausdrücken $a + b + 2c$ und $a + 2b + c$ proportional und in den Punkten C und B wirksam sind. Hieraus folgt schließlich: Q ist der Schwerpunkt von drei in den Punkten A, B, C wirksamen Gewichten, welche den Ausdrücken $2a + b + c$, $a + 2b + c$, $a + b + 2c$ proportional sind, Q ist also nicht Schwerpunkt der Grundebene ABC, und SQ fällt nicht mit der Flächen-Schwerpunktsachse des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas zusammen.

21. Den Schwerpunkt eines Kugelabschnittes zu bestimmen, der zu einer Kugel vom Halbmesser $4{,}2^{dm}$ gehört und sich durch den Mittelpunktswinkel $15° 10'$ bestimmt

$4{,}175^{dm}$ vom Mittelpunkte entfernt.

22. Aus einer Halbkugel ist ein normaler Kegel mit kreisförmiger Basis herausgeschnitten worden, der mit der Halbkugel dieselbe Höhe hat, dessen Grundflächenhalbmesser aber gleich der Hälfte des Kugelhalbmessers ist.

Es ist der Schwerpunkt des ausgehöhlten Körpers zu bestimmen.

Die Entfernung von der unteren Grundebene ist

$$\frac{11}{28}r.$$

23. Für die nebengezeichneten Figuren (Fig. 159, Fig. 160 und Fig. 161), bei denen MN eine feste Achse bezeichnet, sind aus den eingeschriebenen Maßen die Inhalte der Oberflächen F und der Volumina K der Umdrehungskörper zu bestimmen, die bei einer vollständigen Umdrehung der Figuren um MN entstehen.

Fig. 159.

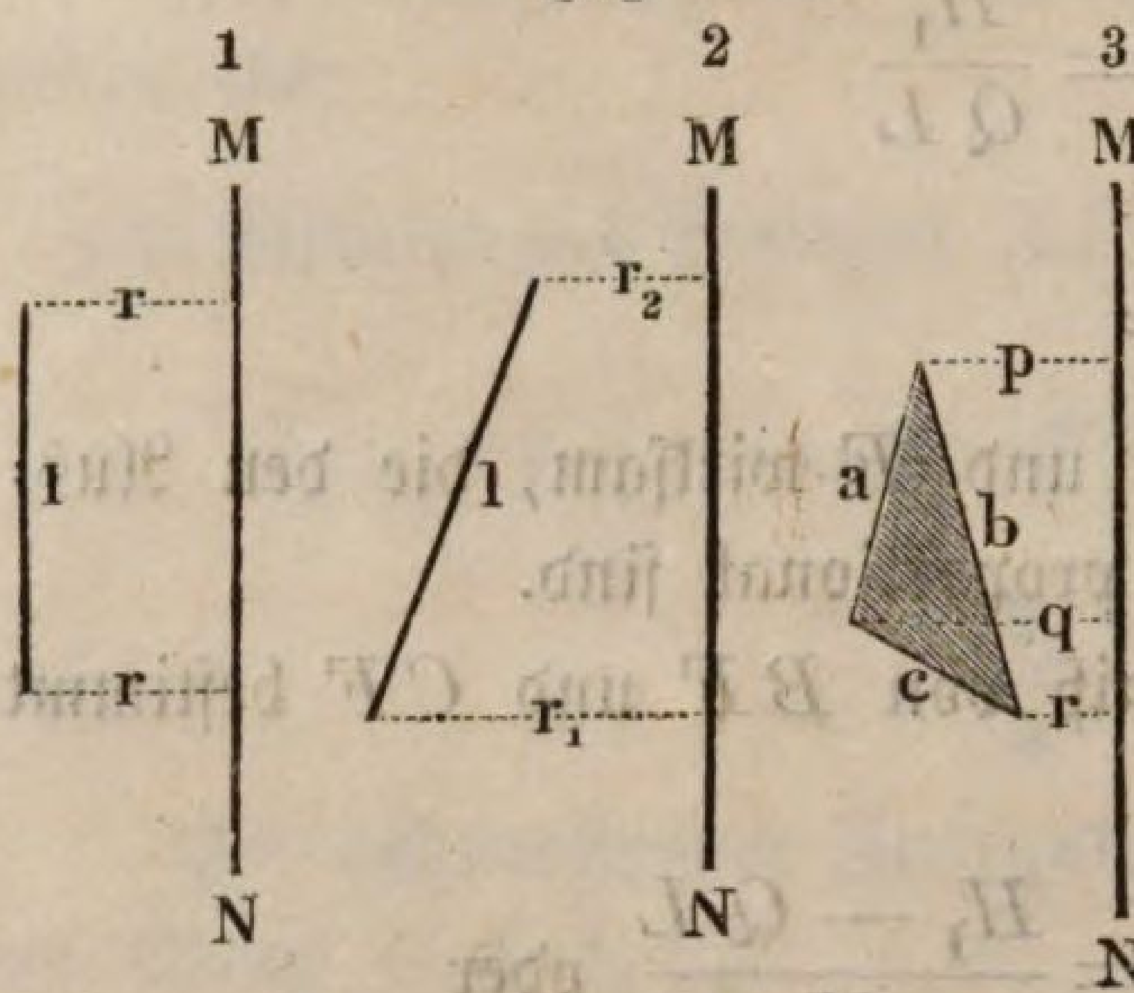


Fig. 160.

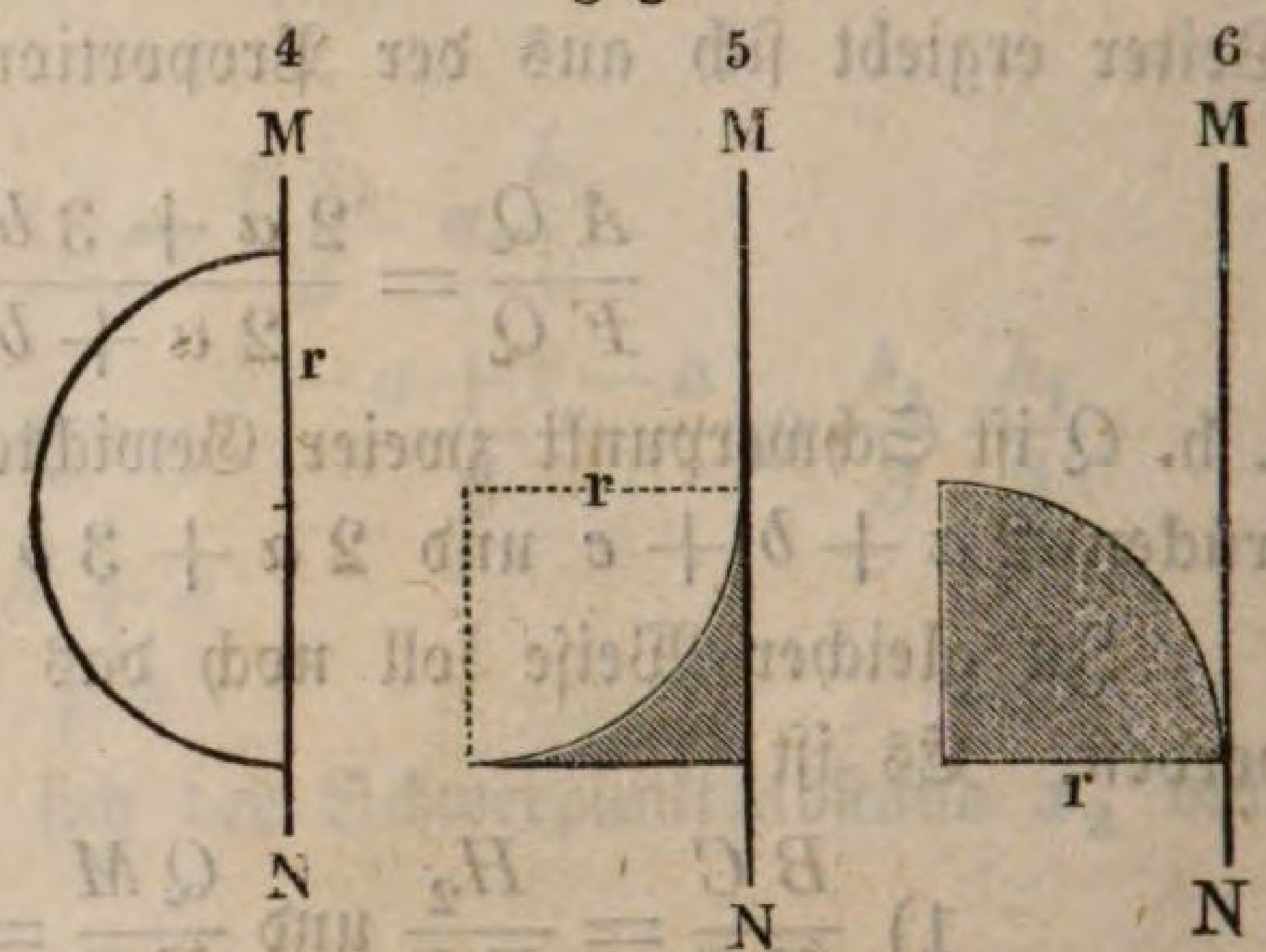
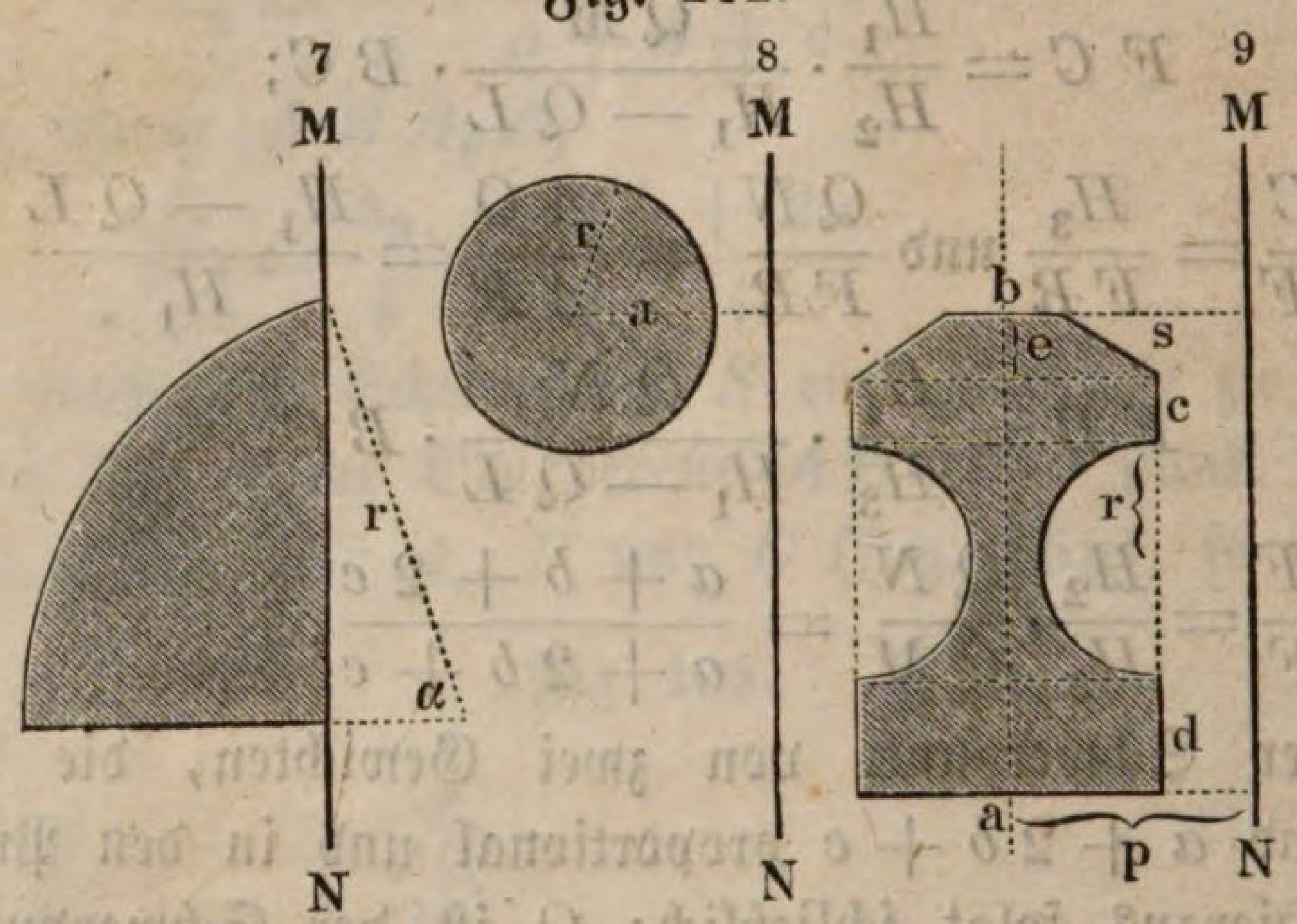


Fig. 161.



1. $F = 2\pi r l$; $K = r^2 \pi l$

2. $F = \pi l (r_1 + r_2)$; $K = \frac{\pi}{3}(r_1{}^2 + r_1 r_2 + r_2{}^2)\sqrt{l^2 - (r_1 - r_2)^2}$,

3. $F = \pi [a(p+q) + b(p+r) + c(q+r)]$
$K = \frac{2}{3}\pi f(p+q+r)$, wenn f den Inhalt des durch die Seiten $a\,b\,c$ bestimmten Dreiecks bezeichnet,

4. $F = 4\pi r^2$; $K = \frac{4}{3}\pi r^3$

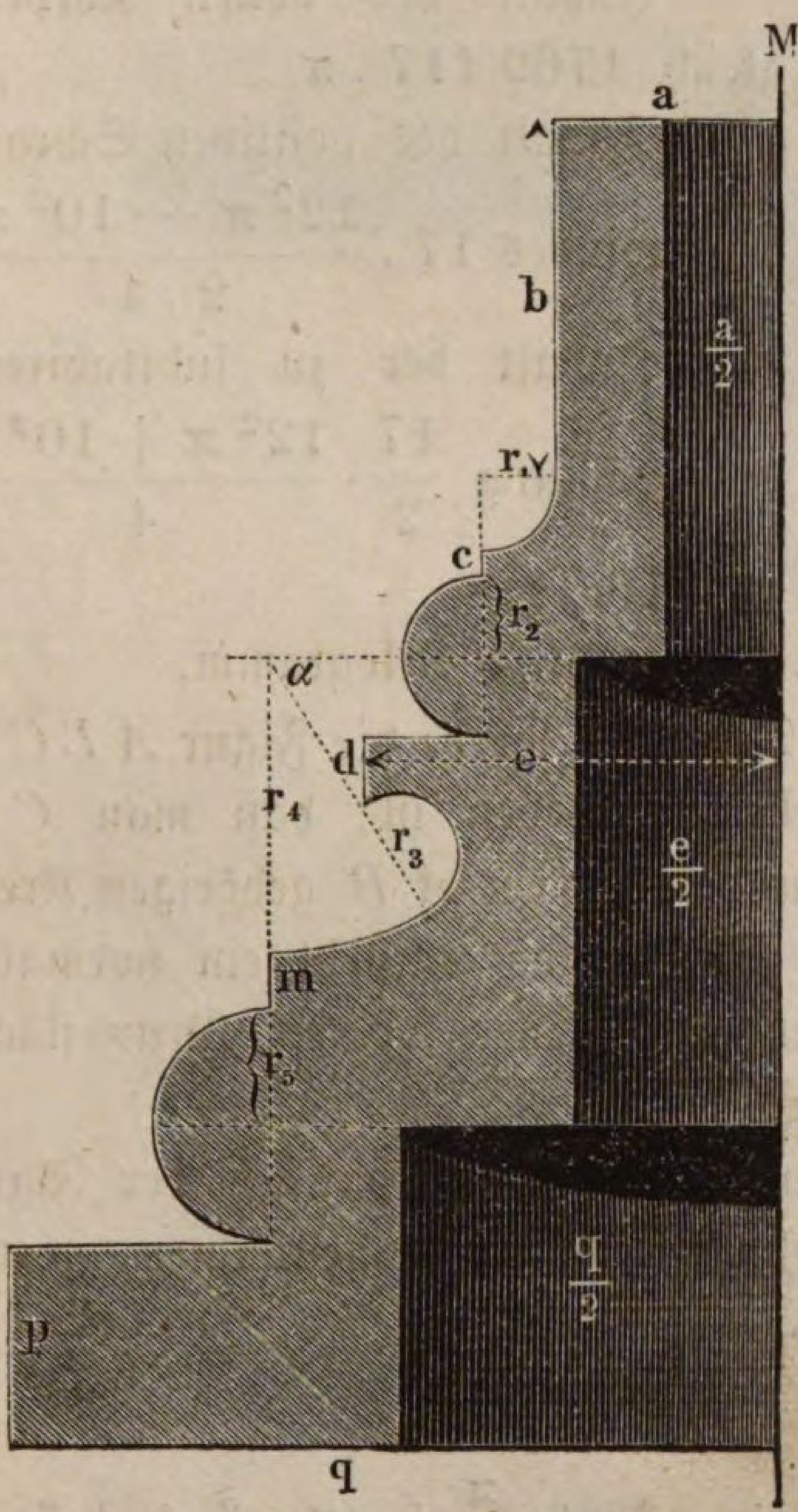
5. $F = 1{,}14159\,\pi r^2$; $K = 0{,}09587\,\pi r^3$,

6. $F = 1{,}14159\,\pi r^2$; $K = 0{,}90413\,\pi r^3$,

7. $F = 2\pi r^2 (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$
$K = \frac{1}{3}\pi r^3 [2\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha(\sin 2\alpha - 6\alpha)]$,
8. $F = 4\pi^2 ar$; $K = 2\pi^2 ar^2$,
9. $F = 2\pi p (a + b + 2c + 2d + 2s + 2r\pi)$
$K = \pi p [a(2c + 2d + e + 4r) + be - 2r^2\pi]$.

24. Zur numerischen Berechnung der Oberfläche und des cubischen Inhalts von dem nebengezeichneten Säulenfuße (Fig. 162) seien die eingeschriebenen Abmessungen in Centimetern gegeben.

Fig. 162.



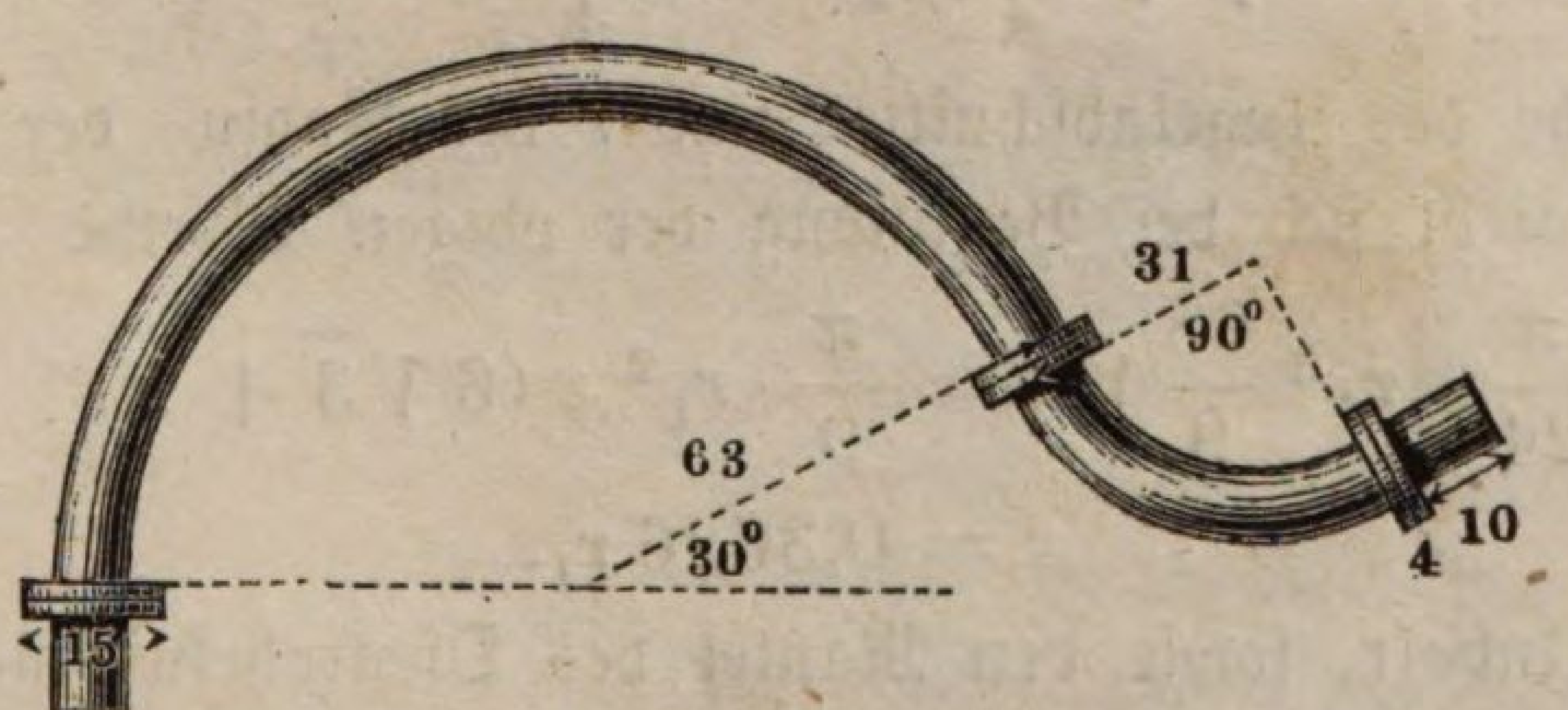
$r_1 = 1$; $r_2 = r_3 = 2$; $r_4 = 8$; $r_5 = 3$; $a = 7$; $b = 6$; $c = 1$; $d = m = 1$; $e = 12$; $p = 4$; $q = 21$; $\alpha = 45°$.

$F = 4245{,}2 \square^{cm}$
$K = 12{,}137$ Cubdm.

25. Das in Fig. 163 verzeichnete Rohr aus Kupfer vom specifischen Gewicht 8,8 bestehend, hat eine Metallstärke von 6^{mm} und einen äußeren Durchmesser von 8^{cm}. Wie schwer ist dasselbe bei Benutzung der eingeschriebenen Centimetermaße?

Rohrquerschnitt gleich $13{,}95 \square^{cm}$; Flantschquerschnitt gleich $140{,}39 \square^{cm}$; Inhalt der drei Flantschen $3 . 140{,}39 . 4 = 1{,}685$ Cubdm.; Inhalt der beiden geraden Rohrenden $= 13{,}95 . 10 . 2 = 0{,}279$ Cubdm.; Inhalt des großen Bogens $13{,}95 . 63 . 2\pi \frac{150}{360}$; Inhalt des

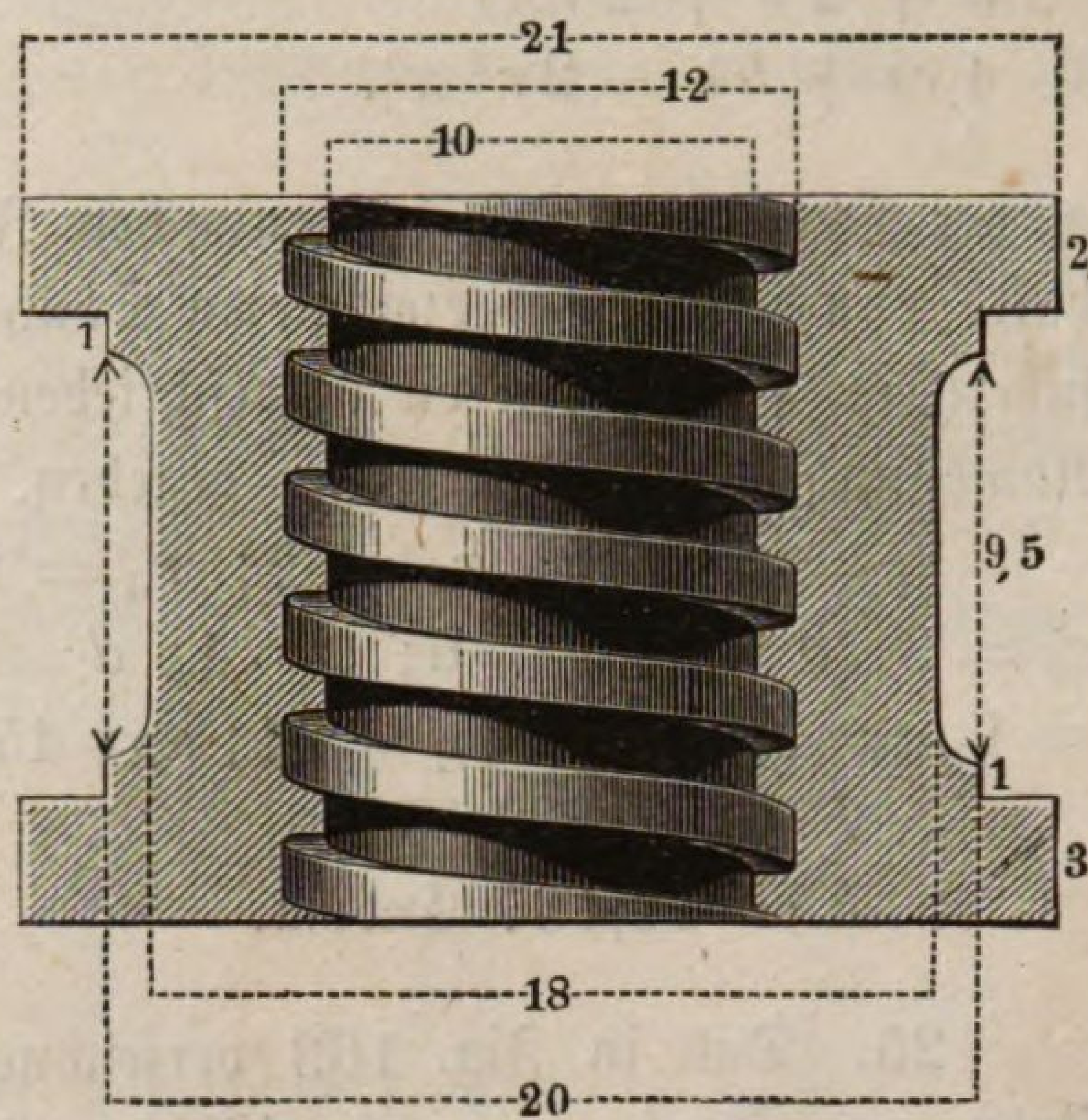
Fig. 163.



kleinen Bogens $13{,}95 . 31 . 2\pi \frac{90}{360}$; beide Bogen haben zusammen den Inhalt $13{,}95 . \pi \left(\frac{105}{2} + \frac{31}{2}\right) = 2{,}980$ Cubdm. Der Inhalt der ganzen Rohr-

verbindung ist deshalb = 4,944 Cubdm. und das Gewicht desselben beträgt 4,944 . 8,8 = 43,5 Kilogramm.

Fig. 164.



26. Es ist das Gewicht der aus Messing vom specifischen Gewicht 8,5 bestehenden Schraubenmutter (Fig. 164) zu berechnen, wenn die in der Figur angegebenen Maße Centimeter bedeuten.

Inhalt des vollen Körpers gleich 1769,417 . π.

Inhalt des positiven Schraubengewindes $17 \cdot \frac{12^2 \pi - 10^2 \pi}{2 \cdot 4}$.

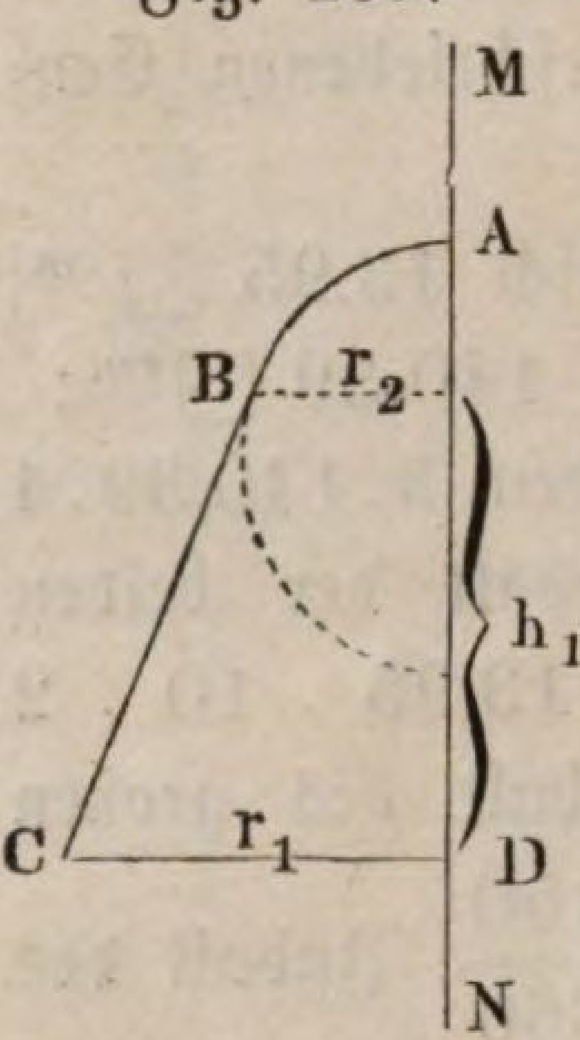
Inhalt der zu subtrahirenden Höhlung $\frac{17}{2} \cdot \frac{12^2 \pi + 10^2 \pi}{4}$

$= 518,5\,\pi$.

Gewicht der Mutter $1,250917 \cdot \pi \cdot 8,5 = 33,4$ Kilogramm.

27. Um die Linie MN (Fig. 165) als Drehachse werde die Figur $ABCD$ gedreht, die dadurch gebildet worden ist, daß man CB als Tangente für den zu dem Bogen AB gehörigen Kreis construirte. Durch die Umdrehung entsteht ein normaler abgestumpfter Kegel, der auf seiner oberen Grundfläche einen Kugelabschnitt trägt.

Fig. 165.



Es ist die Entfernung des Schwerpunktes der Figur $ABCD$ von der Drehachse MN zu bestimmen, wenn $r_2 = \frac{1}{2} r_1$ und $h = \frac{1}{2} r_1 \sqrt{3}$ ist.

Es ist:

$$\frac{\pi h_1}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + \frac{\pi}{6} h_2 (3 r_2^2 + h_2^2)$$

$$= \left\{ \frac{r_1 + r_2}{2} h_1 + \frac{r^2}{4} \cdot \tfrac{2}{3} \pi - \frac{r^2}{4} \sin 120 \right\} 2 \pi x,$$

worin h_2 die Höhe des Kugelabschnittes und r den Radius der Kugel bezeichnen.

Hieraus ergiebt sich bei Benutzung der obigen Werthe

$$\frac{\pi}{24} \cdot r_1^3 \frac{68}{9} \sqrt{3} = \frac{\pi}{9} \cdot r_1^2 x (6 \sqrt{3} + \pi)$$

$$x = 0,3626\, r_1.$$

28. Den Inhalt, sowie den Mantel des Ofenrohrkniestücks nach den angegebenen Maßen in Centimeter zu berechnen (Fig. 166):

$$K = \frac{\pi}{4} 31^2 \frac{94 + 90}{2} \cdot 2 = 138,88. \text{Cubdm.}$$

$$M = \pi \cdot 31 \frac{94 + 90}{2} \cdot 2 = 17\,920 \,\square^{cm}.$$

29. Von einem normalen Cylinder mit kreisförmiger Basis ist ein cylindrisches Stück durch eine Ebene parallel der Achse abgeschnitten worden, dessen Grundebene also ein Kreisabschnitt ist, zum Mittelpunktswinkel 2α gehörig. Der auf die Weise entstandene Cylinder werde an seinen Enden beliebig schief abgeschnitten. Es ist der Inhalt, sowie die krumme Oberfläche des nun entstandenen Körpers zu berechnen. Die Figur **167** stelle den be-

Fig. 166.

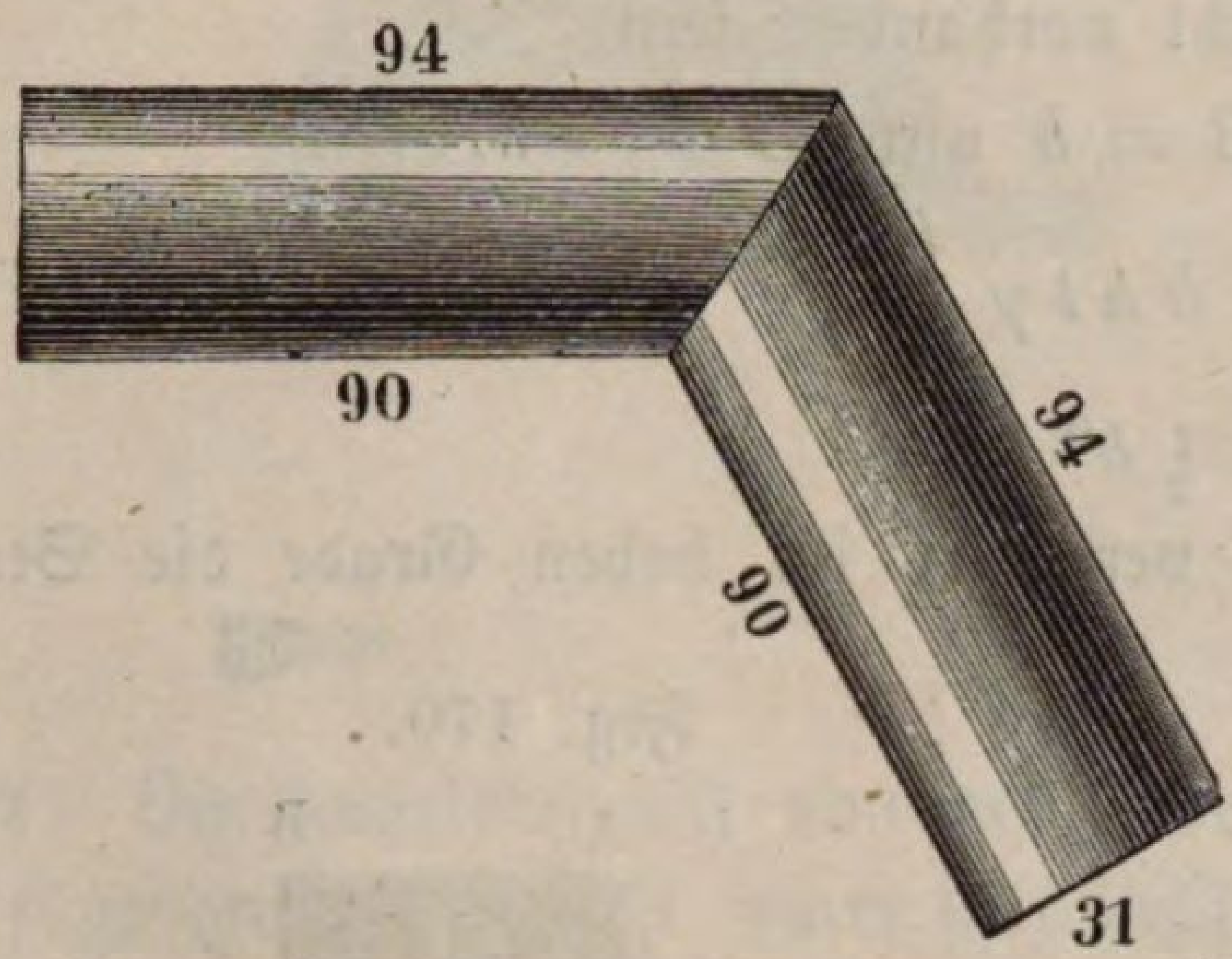
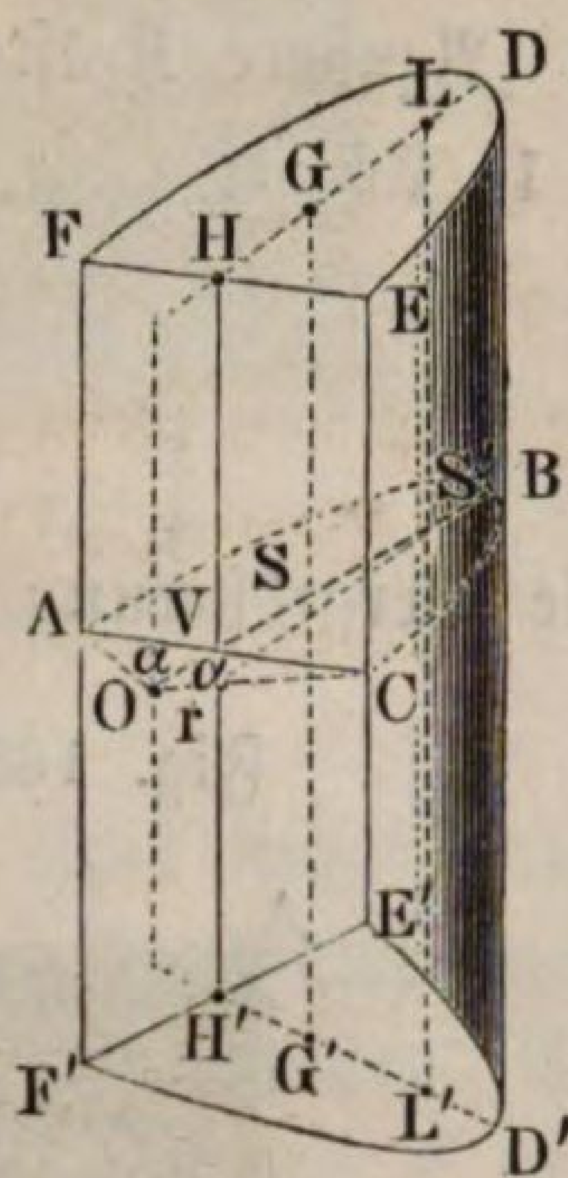


Fig. 167.



treffenden Körper vor, $A\,B\,C$ sei der normale Querschnitt, r der Halbmesser des Kreises, zu dem der Abschnitt $A\,B\,C$ gehört; ferner sei $D\,D' = h$, $E\,E' = a$, $F\,F' = b$.

Ist S der Schwerpunkt des Kreisabschnittes $A\,B\,C$, und $G\,G'$ durch S parallel der Seite des Cylinders gelegt, so ist der Inhalt

$$K = \text{Abschnitt } A\,B\,C \text{ mal } G\,G'$$

$$K = \frac{r^2}{12}\,\frac{4\,[2h-(a+b)]\,\sin\alpha^3 + 3\,(2\alpha - \sin 2\alpha)\,(a+b-2h\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

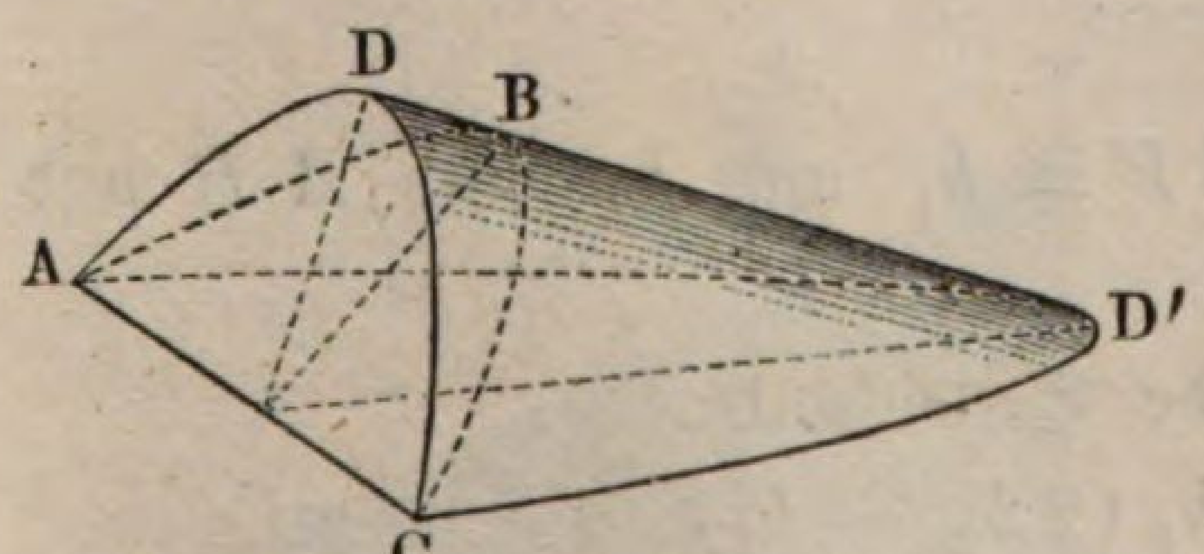
Ist S_1 der Schwerpunkt des Kreisbogens $A\,B\,C$ und $L\,L'$ durch S_1 parallel der Seite des Cylinders gelegt, so ist der Inhalt der krummen Oberfläche, der Mantel

$$M = \text{Bogen } A\,B\,C \text{ mal } L\,L'$$

$$M = r\,\frac{[2h-(a+b)]\,\sin\alpha + \alpha\,(a+b-2h\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

Fallen bei dem eben betrachteten Körper die Linien $F\,E$ und $F'\,E'$ mit $A\,C$ zusammen, so entsteht ein Klauen oder Huf (Fig. 168). Für diesen ist

Fig. 168.



$$K = \frac{h\,r^2}{6}\,\frac{4\sin\alpha^3 - 3\cos\alpha\,(2\alpha - \sin 2\alpha)}{1-\cos\alpha}$$

$$M = 2hr\,\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Wird in dem Klauen AC gleich dem Durchmesser $2r$, der Mittelpunktswinkel 2α also zu $180°$, so ist

$$K = \tfrac{2}{3} h r^2 \text{ und } M = 2 h r.$$

30. Die Stabilität für die normalen Prismen zu berechnen, die mit einer Seitenfläche auf einer Horizontalebene liegen und um eine der Seitenkanten gedreht werden sollen.

Die normalen Querschnitte sind nachstehend angegeben, die Länge der Körper sei l, die Dichtigkeit (das Gewicht eines Cubikdecimeters) sei γ Kilogramm. Aeußere Kräfte mögen nicht vorhanden sein.

1. Es sei (Fig. 169) $AB = b$ und $BC = h$.

$$S s = b h l \gamma \frac{b}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2} b^2 h l \gamma.$$

Die Vergrößerung der Breite vermehrt im hohen Grade die Stabilität.

Fig. 169.

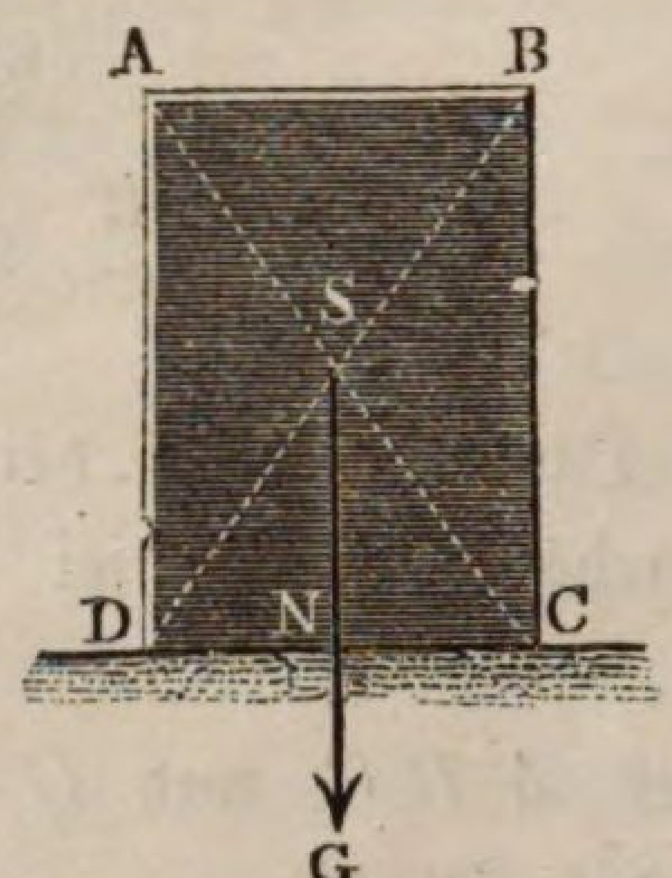
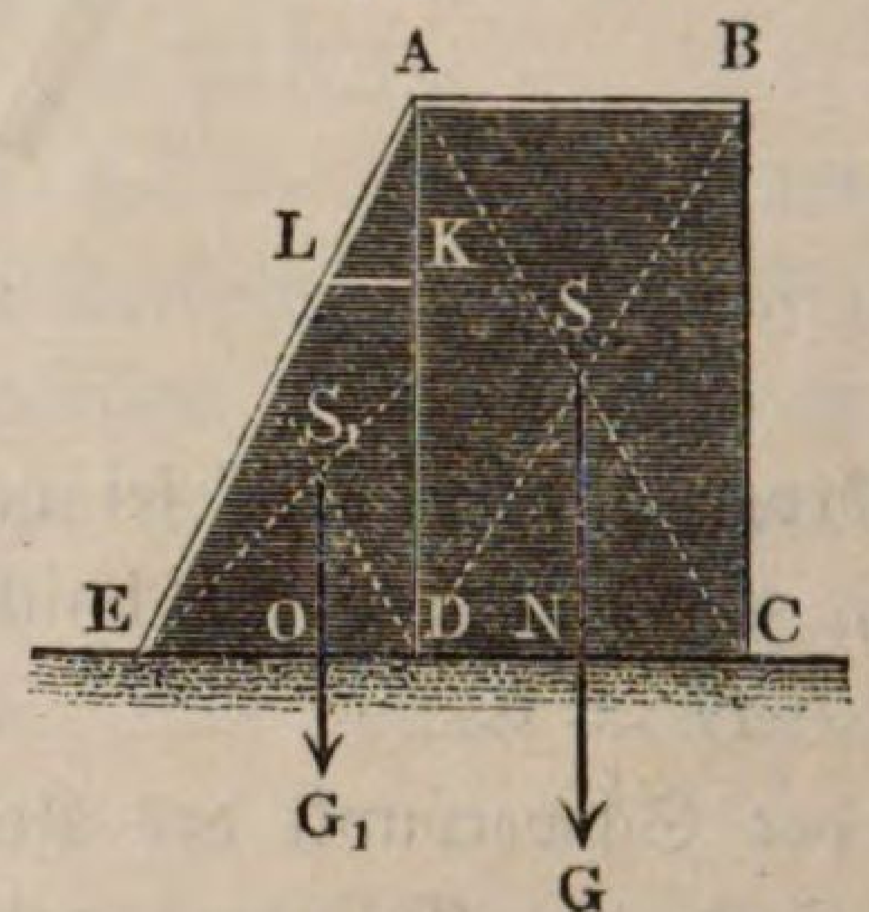


Fig. 170.



2. Es sei (Fig. 170) $AB = b$, $BC = h$ und $ED = nh$, d. h die Mauer erhalte bei 1 Meter Höhe eine Ausladung von n Metern.

a. für die durch E gehende Seitenkante:

$$S s = h l \gamma \frac{2 n^2 h^2 + 3 b (b + 2 n h)}{6},$$

b. für die durch C gehende Seitenkante:

$$S s = h l \gamma \frac{3 b^2 + n h (3 b + n h)}{6}.$$

3. Es sei (Fig. 171) die Mauer nach beiden Seiten auf gleiche Weise geböscht, so ist für dieselben Bezeichnungen:

$$S s = h l \gamma \frac{(b + n h)(b + 2 n h)}{2}.$$

4. Es sei (Fig. 172) BC und $EF = h_1$ und h_2, und AB und $CF = b_1$ und b_2, so ist:

a. für die durch F gehende Seitenkante:

$$S s = l \gamma \frac{(b_2 - b_1)^2 h_2 + b_1 h_1 (2 b_2 - b_1)}{2},$$

b. für die durch C gehende Seitenkante:

$$S s = l \gamma \frac{b_1^2 h_1 + h_2 (b_2^2 - b_1^2)}{2}.$$

Fig. 171.

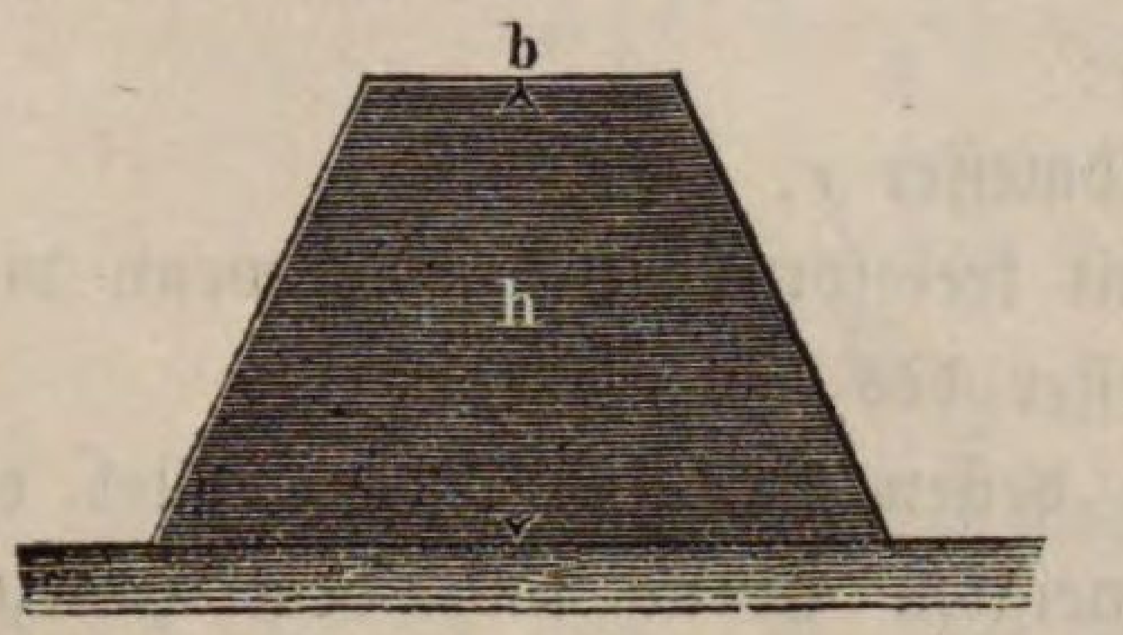
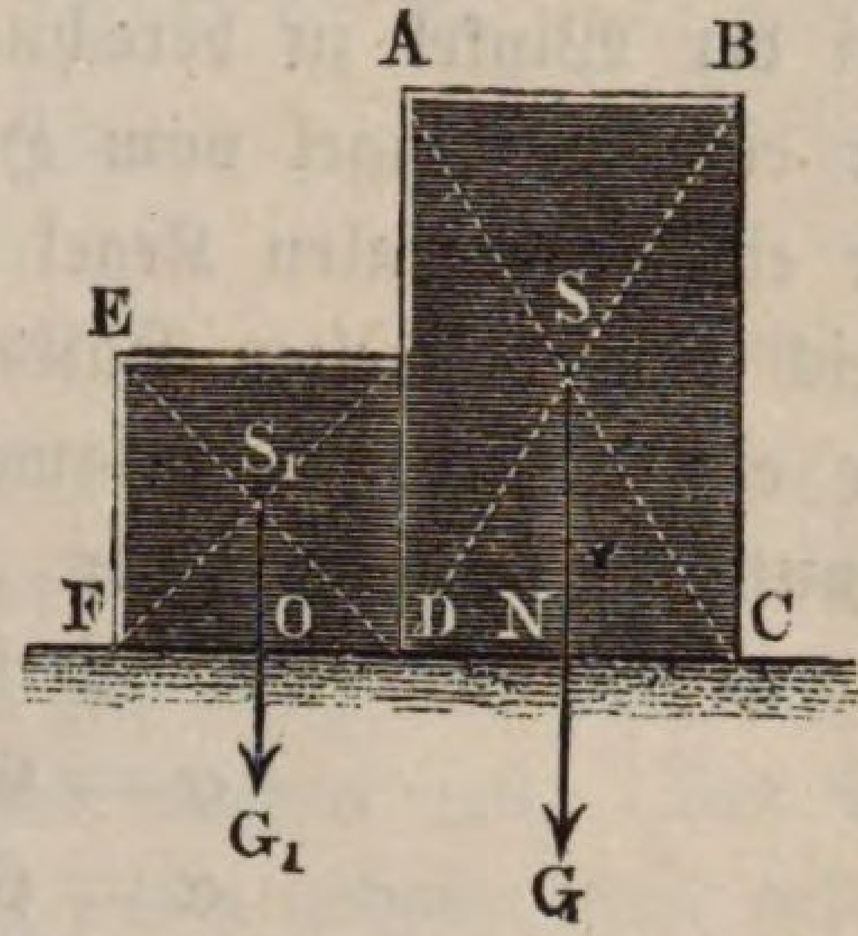


Fig. 172.



31. Ein Kugelabschnitt von der Höhe h und zu einer Kugel vom Halbmesser r gehörig, liegt mit seiner Grundfläche auf einer Horizontalebene. Eine im Schwerpunkte desselben angreifende Kraft P wirke unter einem Winkel α gegen den Horizont auf Umwerfen. Es ist die Größe der Kraft P zu finden, so daß der Körper sich auf der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen befinde. Nehmen wir das Gewicht G des Körpers als eine im Schwerpunkte desselben lothrecht wirksame Kraft an, so erfolgt das Kippen um diejenige Tangente des Grundkreises, die auf der durch die Richtungen von P und G gelegten Ebene normal steht.

Bezeichnen wir die Dichtigkeit des Körpers mit γ, so ist

$$\left(\frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)\gamma - P \sin\alpha\right)\sqrt{h(2r-h)} - P\cos\alpha \cdot \frac{h(4r-h)}{4(3r-h)} = 0 \text{ und}$$

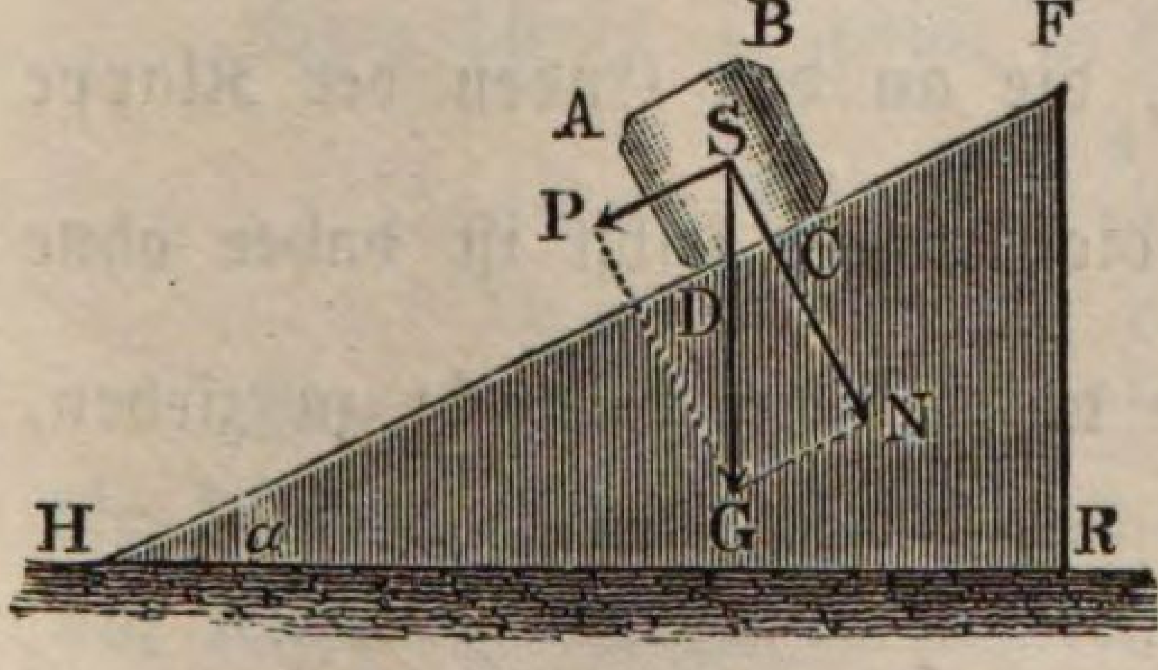
$$P = \tfrac{4}{3}\pi h^2 \gamma \frac{(3r-h)^2 \sqrt{h(2r-h)}}{h(4r-h)\cos\alpha + 4(3r-h)\sin\alpha\sqrt{h(2r-h)}}.$$

Zur numerischen Berechnung sei:

$$r = 2^{dm};\ h = 3^{dm};\ \alpha = 15^\circ;\ \gamma = 0{,}7 \text{ Kilogramm.}$$

$$P = \tfrac{4}{3}\pi . 9 . 0{,}7 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{15\cos\alpha + 12\sin\alpha\sqrt{3}} = 20{,}7 \text{ Kilogramm.}$$

Fig. 173.



32. Auf einer zum Horizont geneigten Ebene (Fig. 173) liegt ein Körper vom Gewicht G. Das Abgleiten des Körpers sei unmöglich gemacht.

Es ist der Winkel der geneigten Ebene zu bestimmen, so daß sich der Körper auf der Grenze des Gleichgewichts gegen Kippen befinde.

Es gehe die Kippachse durch den Punkt D und es sei $DC = a$, $SC = b$, dann ist:

$$S s = G a \cos \alpha - G b \sin \alpha.$$

Für den Grenzfall ist $S s = 0$, d. h. $\tang \alpha = \frac{a}{b}$.

Es sei der Winkel zu berechnen:

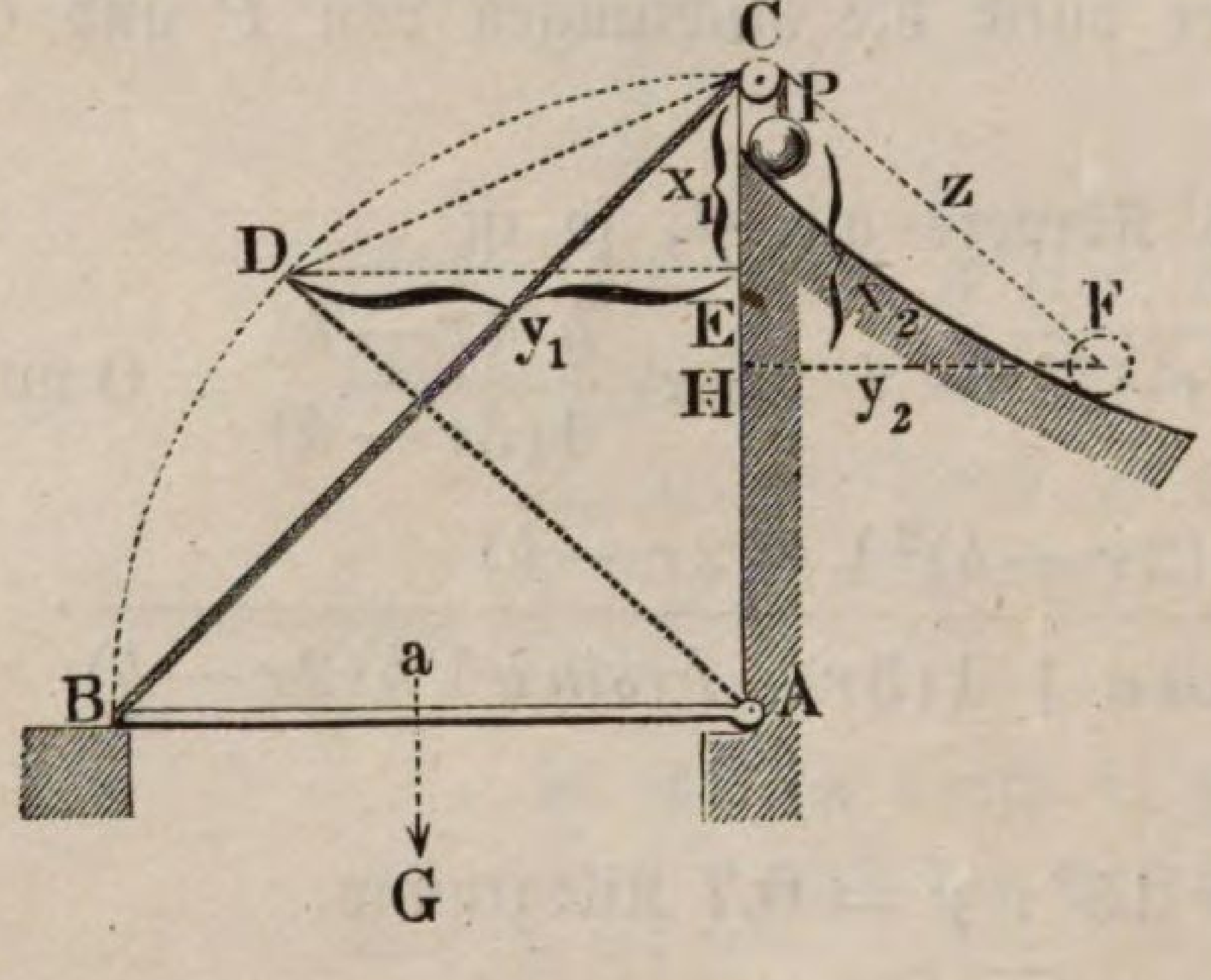
a. für eine Halbkugel vom Halbmesser r,
b. für einen normalen Kegel mit kreisförmiger Basis, wenn die Höhe h gleich dem doppelten Halbmesser des Grundkreises ist,
c. für ein dreiseitiges Prisma, dessen Seitenkanten parallel der Durchschnittslinie zwischen der geneigten Ebene und dem Horizonte sind, und dessen normaler Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist:

$$\alpha = 69^\circ 26' 38'',$$
$$\alpha = 63^\circ 26' 6'',$$
$$\alpha = 60^\circ.$$

33. Eine Klappe AB (Fig. 174) wird in horizontaler Lage durch ein Gewicht P im Gleichgewicht erhalten, das Gewicht ist mittelst eines Seiles über eine feste Rolle geführt und hängt vertical herab.

Wird die Klappe gehoben, so hört auch das Gleichgewicht auf, so daß eine Bewegung entsteht, durch welche die Klappe mit Heftigkeit gegen die verticale Wand geschlagen wird. Um das Letztere zu vermeiden, läßt man das Gewicht P nicht vertical, sondern auf einer krummen Bahn herabsinken, so daß P mit der Klappe in jeder Lage im Gleichgewichte ist. Es ist diese krumme Bahn zu construiren.

Fig. 174.



Das Gewicht der Klappe sei G, ihre Länge a, das Seil BC habe die Länge l und für die horizontale Lage befindet sich das Gewicht P in dem Punkte C.

Für die horizontale Lage ist

$$G \frac{a}{2} - P a \cdot \tfrac{1}{2} \sqrt{2} = 0,$$

d. h.:

$$P = \tfrac{1}{2} G \sqrt{2}.$$

Wir zerlegen G in zwei parallele Kräfte, die an den Enden der Klappe wirksam sind, jede wird also gleich $\frac{G}{2}$, und die Klappe selbst ist daher ohne Gewicht anzunehmen. Die beiden Kräfte, die deshalb in Betracht zu ziehen, sind $\frac{G}{2}$, in B wirksam, und P.

Der Schwerpunkt der beiden Gewichte P und $\frac{G}{2}$ liege für die horizontale Lage in der Entfernung λ von der durch C gezogenen Horizontalen.

Die zur Bestimmung von λ dienende Gleichung ist:

$$\lambda\left(P + \frac{G}{2}\right) = P \, . \, o + \tfrac{1}{2}\, G\, a$$

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}\, G}{P + \frac{G}{2}}\, a.$$

Das Gleichgewicht, welches für jede beliebige Lage der Klappe und des Gewichtes P bestehen soll, ist ein neutrales, da jede noch so kleine Vermehrung auf einer Seite eine Bewegung zur Folge hat, die nach Wegnahme des Uebergewichtes sogleich wieder vernichtet werden soll. Der Schwerpunkt des Systemes kann daher bei der Bewegung weder gehoben noch gesenkt werden, das Gleichgewicht muß also ein neutrales sein, d. h. der Schwerpunkt des Systemes ist von der durch C gelegten Horizontalen immer um λ entfernt.

Es stelle $A\,D$ eine beliebige Lage der Klappe vor, für die P nach F gekommen ist.

Es sei

$$C\,E = x_1,\; C\,H = x_2,$$
$$D\,E = y_1,\; F\,H = y_2 \text{ und } C\,F = z.$$

Zwischen z und x_2 erhalten wir auf folgende Weise eine Beziehung. Es ist

$$z = l - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$
$$z = l - \sqrt{2\, a\, x_1},$$

und wegen des neutralen Gleichgewichtes:

$$\tfrac{1}{2}\, G\, x_1 + P\, x_2 = \lambda\left(P + \frac{G}{2}\right),$$

d. h.:

$$x_1 = \frac{\lambda\,(P + \frac{1}{2}\, G) - P\, x_2}{\frac{1}{2}\, G},$$

oder den oben entwickelten Werth von λ substituirt:

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2}\, a\, G - P\, x_2}{\frac{1}{2}\, G}.$$

Wir erhalten hiernach:

$$z = l - \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\, a\, G - P\, x_2}{\frac{1}{2}\, G} \cdot 2\, a.}$$

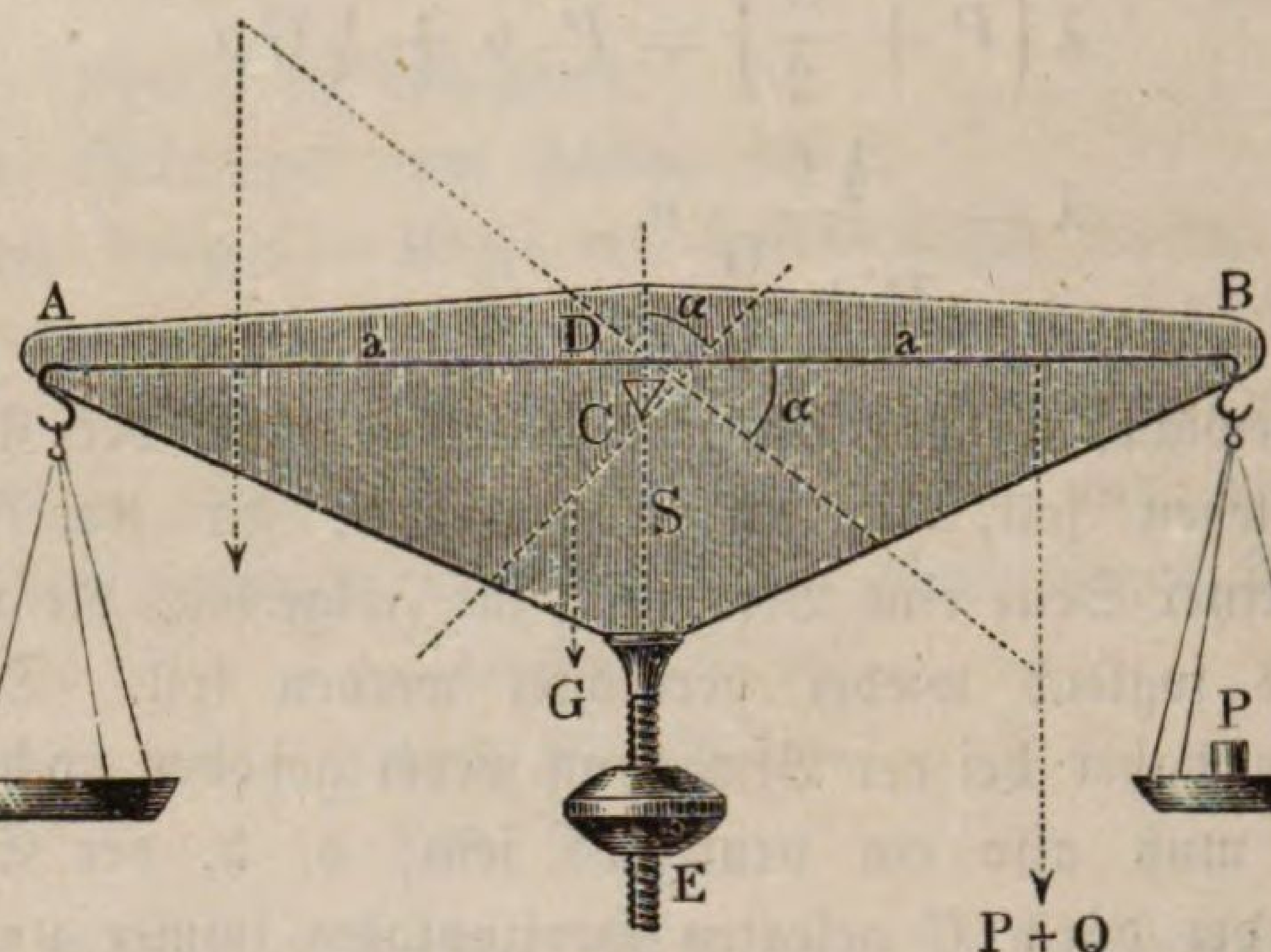
Wird hierin P gleich $\frac{1}{2}\, G\, \sqrt{2}$ gesetzt, so entsteht:

$$z = l - \sqrt{2\, a\,(a - x_2\, \sqrt{2}\,)}$$
$$z = l - \sqrt{l\,(l - 2\, x_2)}.$$

Hieraus läßt sich zu jedem Werthe von x_2 das zugehörige z berechnen; die krumme Bahn, welche dem Gewichte P zur Unterlage dienen muß, ist also auf leichte Weise zu construiren.

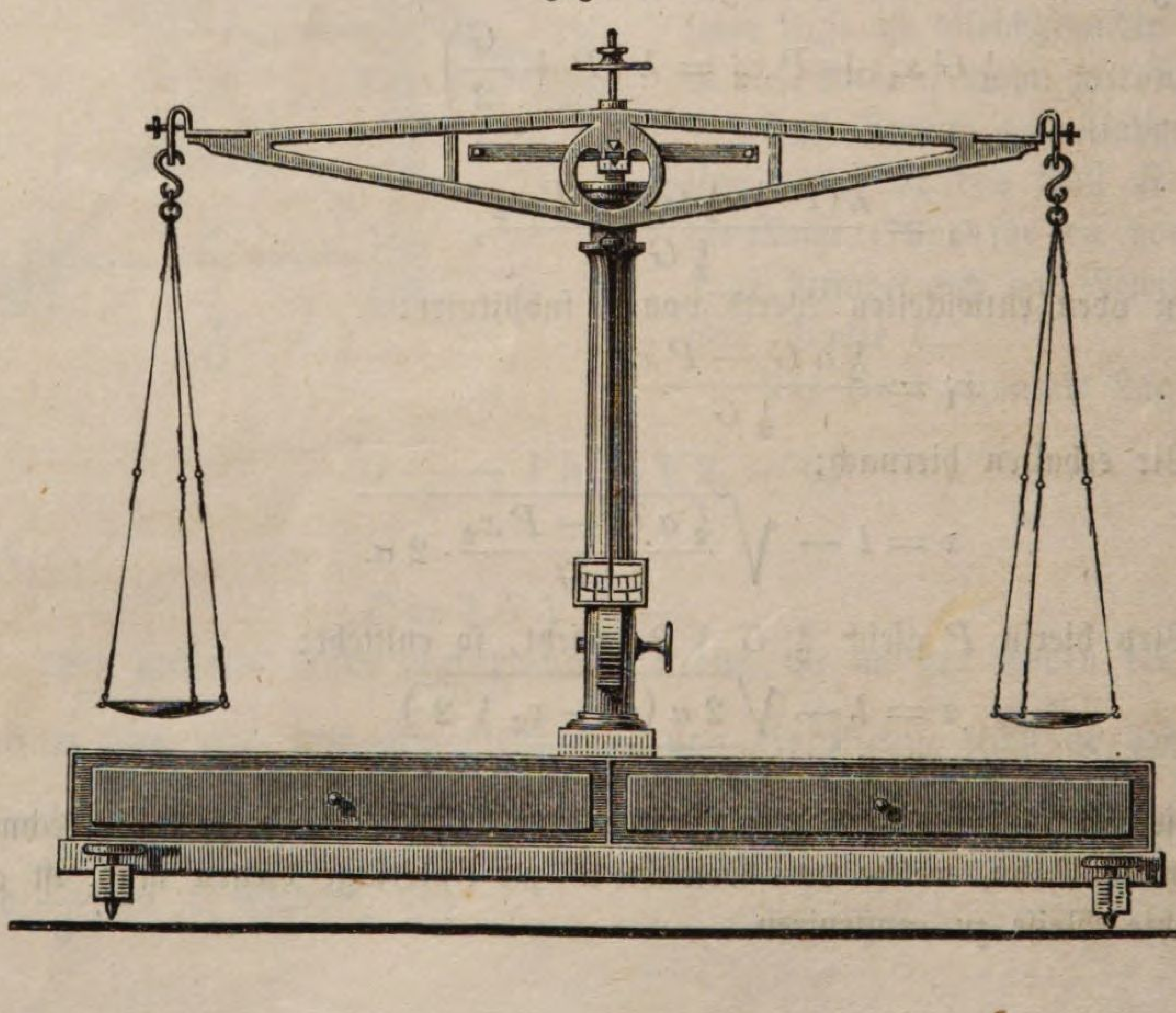
34. Die gemeine Krämerwage zeigt eine Anwendung des um einen Punkt drehbaren Körpers, der sich im stabilen Gleichgewicht befindet, bei dem also der Schwerpunkt S senkrecht unter dem Drehpunkt C liegt (Fig. 175).

Fig. 175.



Es sei AB, der Wagebalken von der Länge $2a$, G das Gewicht desselben, Q das Gewicht einer Schale mit Zubehör, C der Drehpunkt des Balken, S der Schwerpunkt der Wage und D der Durchschnittspunkt der Linie AB mit der Linie CSE. Es werde an einer Seite ein Uebergewicht P angebracht, wodurch der Balken aus seiner horizontalen Gleichgewichtslage in eine geneigte übergeht, die durch den Winkel α bestimmt werden kann, welchen die neue Lage von AB mit der Horizontalen bildet. Es ist der

Fig. 176.



Winkel α zu bestimmen, wenn $CS = b$ und $CD = -c$ ist, da sich S und D zu verschiedenen Seiten des Drehpunktes C befinden.

$$(P + Q)(a \cos\alpha - c \sin\alpha) - Q(a \cos\alpha + c \sin\alpha) - G b \sin\alpha = 0$$
$$\cos\alpha (P a + Q a - Q a) - \sin\alpha (P c + Q c + Q c + G b) = 0.$$

Hieraus folgt:

$$tang\, \alpha = \frac{P a}{(2 Q + P) c + G b}.$$

Man will bei einem kleinen Uebergewicht P einen großen Ausschlagwinkel α haben. In dem vorliegenden Ausdruck soll also $tang\, \alpha$ recht groß werden. Es läßt sich das erreichen, wenn man a, den Arm des Balkens, recht lang macht, das Gewicht G desselben möglichst reducirt und die Entfernung c recht klein annimmt.

In der praktischen Ausführung, besonders für feine, zum chemischen Gebrauche geeignete Wagen (Fig. 176) ist c gewöhnlich gleich Null, d. h. der Drehpunkt des Balkens liegt mit den Aufhängepunkten der Schalen in derselben geraden Linie, woraus folgt:

$$tang\, \alpha = \frac{P a}{G b}.$$

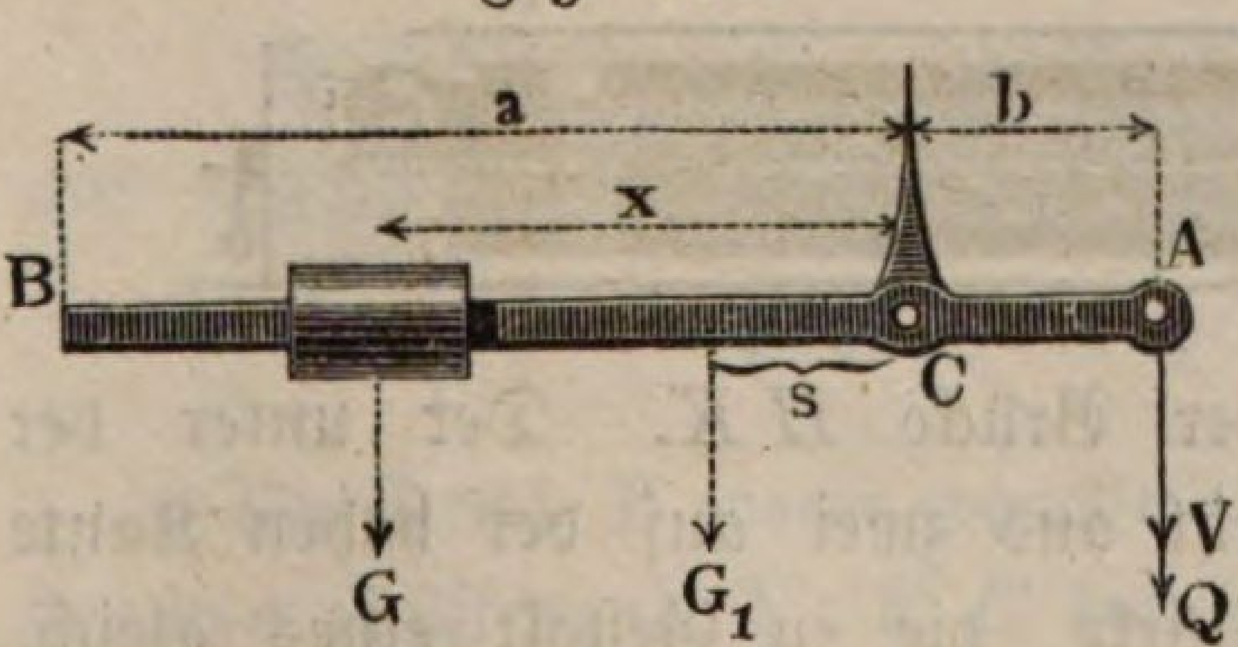
Weiter vermindert man, um bei der Wage eine recht große Empfindlichkeit zu erreichen, b so viel als möglich, d. h. man bringt den Schwerpunkt S wenig tiefer als den Aufhängepunkt.

35. Ein Körper vom Gewicht W wird, in die eine Schale einer Krämerwage gelegt, durch ein Gewicht von der Größe Q_1 abbalancirt. Bringt man den Körper in die andere Wagschale, so sind dazu Q_2 Gewichte nothwendig. Hieraus ist ersichtlich, daß die Arme der Wage ungleiche Länge haben. Wie läßt sich durch diese doppelte Wägung das wahre Gewicht des Körpers ermitteln, und in welchem Verhältniß stehen die Arme a_1 und a_2 der Wage?

$$W = \sqrt{Q_1 Q_2};\; a_1 : a_2 = \sqrt{Q_2} : \sqrt{Q_1}.$$

36. Es sei $A B$ (Fig. 177) ein ungleicharmiger Hebel von der Länge $a + b$ und dem Gewicht G_1, das in der Entfernung s von der Drehachse C wirksam zu denken ist. In welcher Entfernung von C ist auf dem Arm $C B$ das Gewicht G anzubringen, damit im Verein mit dem in A aufgehängten Gewichte $Q + V$ Gleichgewicht entstehe?

Fig. 177.



Das Gewicht V mag den Hebel nach Wegnahme von G und Q im Gleichgewicht erhalten. Die Bedingung hierfür ist dann:

$$G_1 s - V b = 0.$$

Für den Fall, daß Q und G an dem Hebel ebenfalls wirksam sind, haben wir als Gleichgewichtsbedingung:

$$G x + G_1 s - b(Q + V) = 0.$$

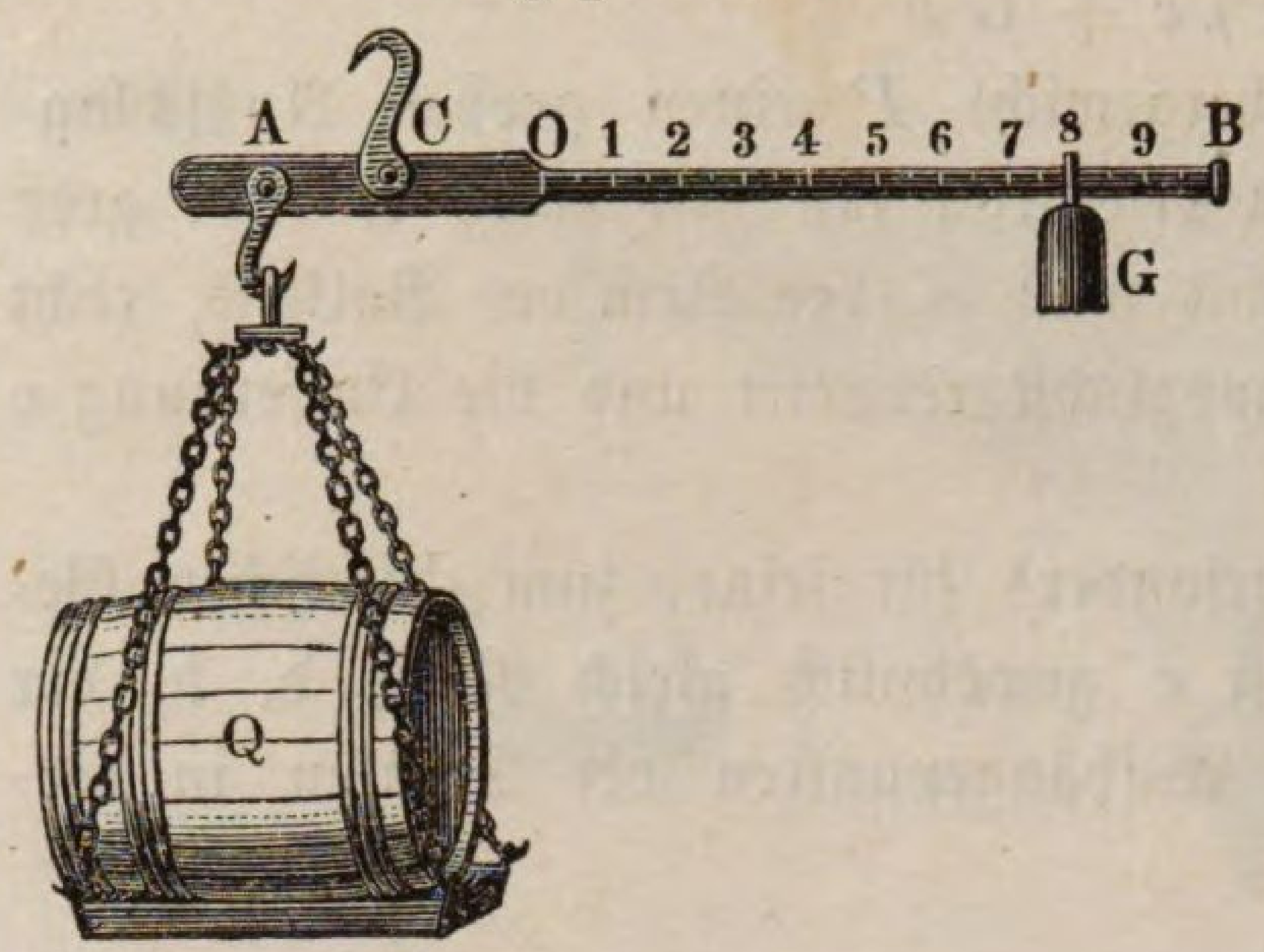
Die Subtraction der beiden Gleichungen liefert:

$$G x = Q b \text{ und}$$

$$x = b \cdot \frac{Q}{G},$$

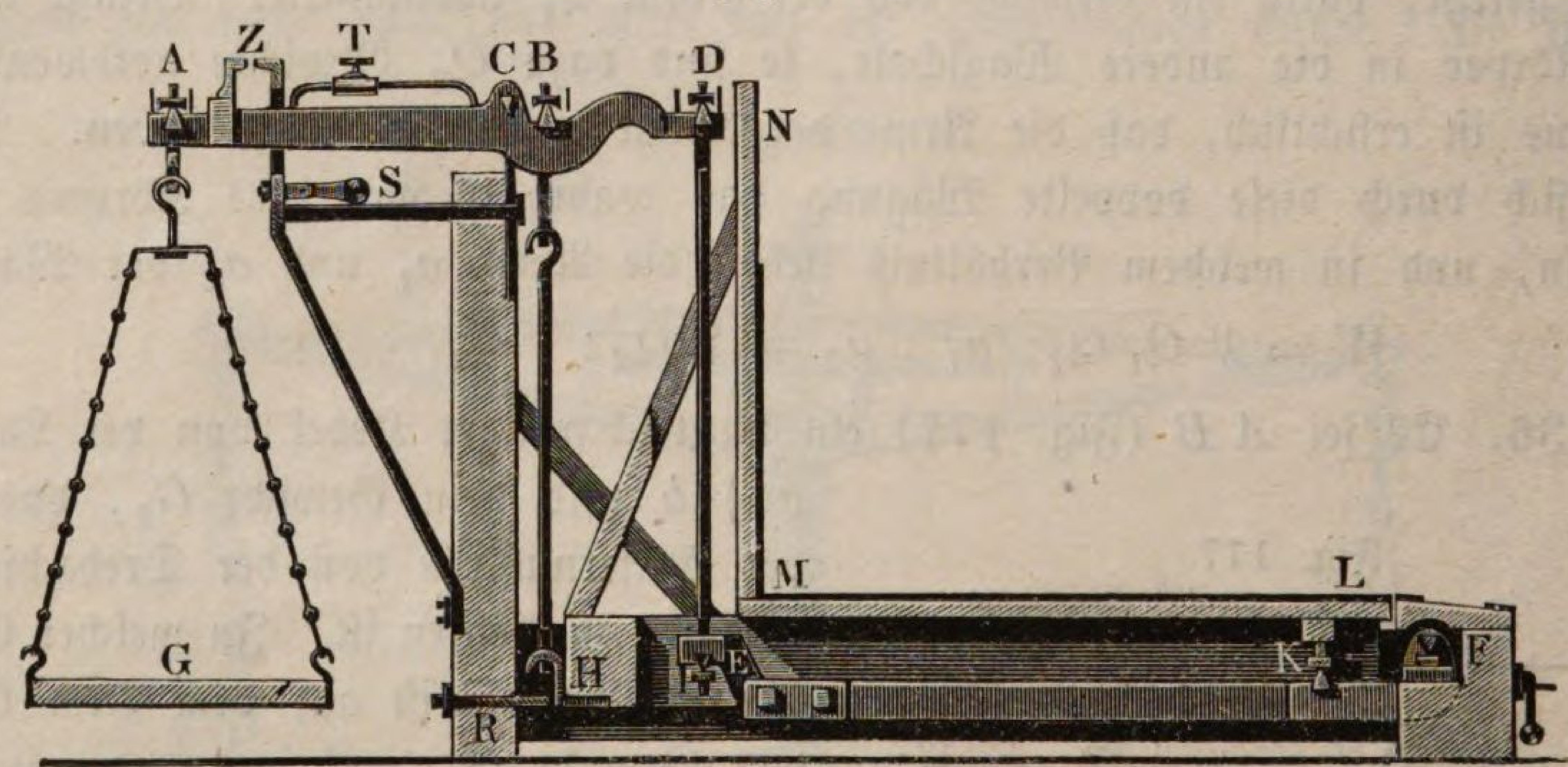
welcher Werth proportional der Last Q wächst. Die praktische Ausführung dieses Apparates wird als Wiegevorrichtung benutzt und heißt römische Schnellwage (Fig. 178). Bei derselben ist der lange Hebelarm, zur Aufnahme des constanten Gegengewichtes G, der Gleichung $x = b \frac{Q}{G}$ gemäß, in gleiche Theile zu theilen.

Fig. 178.



37. In der Figur 179 ist der Durchschnitt einer Brückenwage dargestellt. Der ungleichförmige Wagebalken $A D$ hat seinen Drehpunkt C in einer auf dem Ständer R befestigten Stahlpfanne und trägt am Ende A seines längeren Armes die Wagschale zur Aufnahme der verjüngten Gewichte. Am kürzeren Arme befinden sich zwei Aufhängepunkte B und D; der am äußersten Ende dient zur Aufhängung des Traghebels $E F$, der dem

Fig. 179.



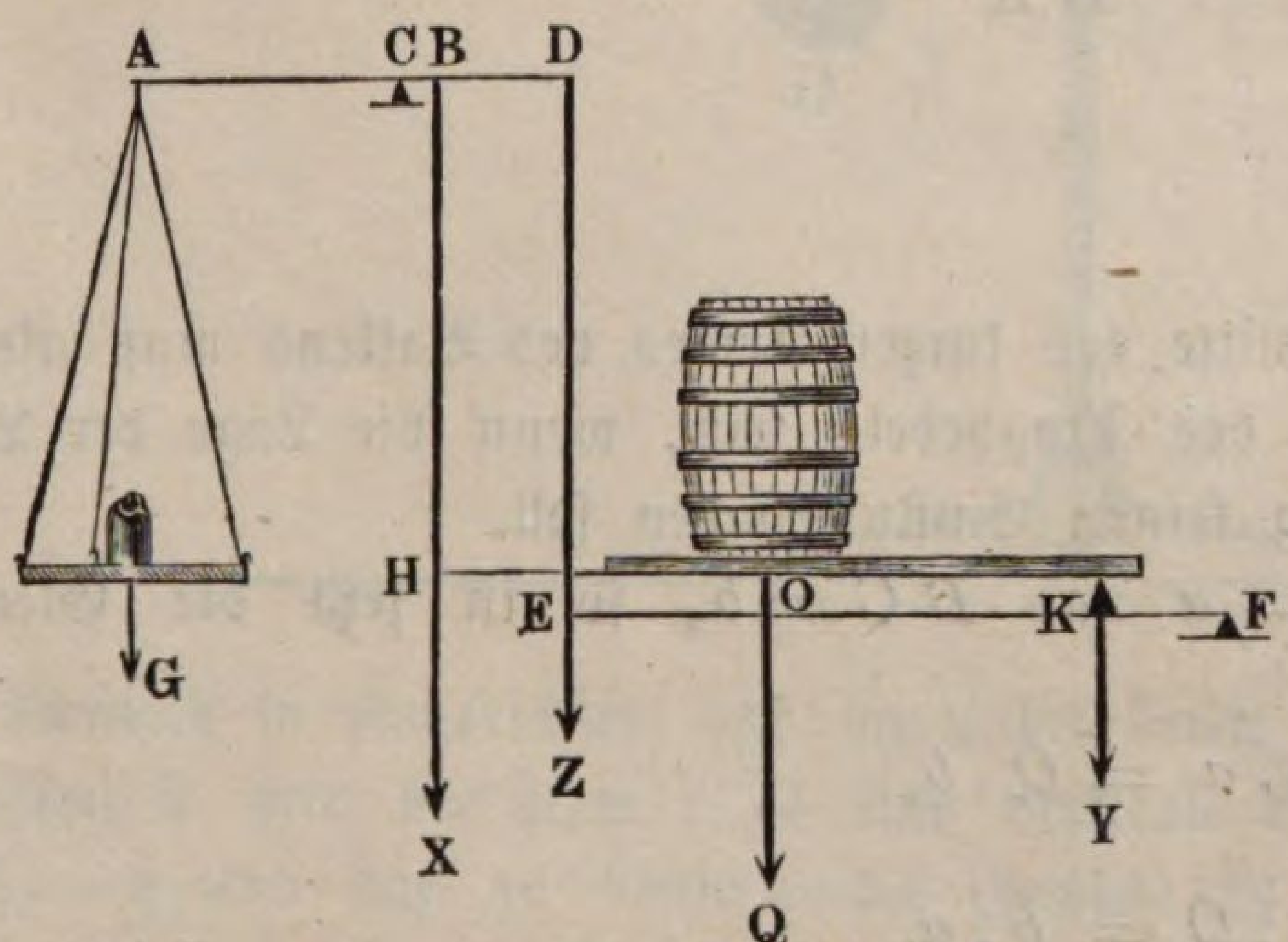
Drehpunkte zunächstliegende zum Tragen der Brücke $H K$. Der unter der Brücke horizontal gelagerte Traghebel besteht aus zwei auf der hohen Kante stehenden Eisenstangen von hinreichender Stärke, die in Gestalt eines gleichschenkligen Dreiecks zusammengesetzt sind. Die Basis dieses Dreiecks bildet das hintere Ende des Traghebels, und hier sind unter den Schenkeln desselben zwei, eine gerade Linie bildende Stahlschneiden F befestigt, welche, in unbeweglichen Stahlpfannen ruhend, dem Hebel zum Stützpunkte dienen. Mit dem vorderen Ende ist dagegen der Hebel durch die Eisenstange ED an dem kurzen Arme des Balkens aufgehängt. Die horizontale Brücke KH ist zur

Aufnahme der Last bestimmt, deren Gewicht gefunden werden soll. Vermittelst der Eisenstange HB hängt sie einerseits am kurzen Arme des Wagebalkens, während sie andererseits auf zwei Stahlschneiden K ruht, die auf den Schenkeln des Traghebels so befestigt sind, daß ihre nach oben gekehrten Schneiden in eine gerade Linie fallen. Zur Anzeige der horizontalen Stellung der Brücke dient der Pendelzeiger Z. Das verschiebbare Gewicht T wird bei der unbelasteten Wage zur Ausgleichung der Gewichte sämmtlicher Theile gebraucht. Die Vorrichtung S benutzt man zur Arretirung der Wage, während die Last auf die Brücke geschafft oder von derselben heruntergenommen wird. Die drei Aufhängepunkte müssen mit dem Unterstützungspunkte des Balkens in einer geraden Linie liegen. Ein Gleiches gilt insofern auch von dem Traghebel, als bei diesem die Schneiden der an ihm befestigten Stahlprismen in einer wagerechten Ebene liegen müssen. Die Richtigkeit einer Brückenwage ist an folgende zwei Bedingungen geknüpft:

1) Hinsichtlich des zum Gleichgewicht erforderlichen Gegengewichtes muß es gleichgültig sein, auf welche Stelle der Brücke die zu wiegende Last gelegt wird.

2) Zwischen den sich das Gleichgewicht haltenden Gewichten muß ein bestimmtes Verhältniß stattfinden, entweder das von 1 : 10 oder von 1 : 100, wonach die Wagen Decimal- oder Centesimalwagen heißen.

Fig. 180.



In der hier folgenden Figur 180 soll das Gewicht G der Last Q das Gleichgewicht halten. Man lege Q parallel seiner Richtung nach K, und das dadurch entstehende Kräftepaar $Q.OK$ bringe man auf die Breite HK, so ist der in der Stange BH wirksame Druck:

$$X = Q\frac{OK}{HK},$$

und der im Punkte K wirksame Druck:

$$Y = Q - Q\frac{OK}{HK} = Q\frac{HO}{HK}.$$

Der Druck Y werde parallel seiner Richtung nach F gelegt und das entstehende Kräftepaar $Y.KF$ bringe man auf die Breite EF, so ist der in Richtung der Stange DE wirksame Druck

$$Z = Y\frac{KF}{EF},$$

während der in F vorhandene durch die feste Unterlage aufgehoben wird. An dem Hebel $ACBD$ wirken jetzt die drei Kräfte G, X und Z, die unter sich im Gleichgewichte sein sollen, deren algebraische Summe der Momente für C

als Momentenpunkt, also gleich Null sein muß. Als Gleichgewichtsbedingung erhalten wir hiernach:

$$G . A C - X . B C - Z . D C = 0,$$

$$G . A C - Q \cdot \frac{O K}{H K} \cdot B C - Q \cdot \frac{H O}{H K} \cdot \frac{K F}{E F} \cdot D C = 0,$$

$$G . A C = Q \left(\frac{O K}{H K} \cdot B C + \frac{H O}{H K} \cdot \frac{K F}{E F} \cdot D C \right).$$

Der Arm von Q ist vorläufig noch von der Lage O der Last Q abhängig. Nach der Bestimmung über die Construction der Brückenwagen soll die Lage der Last keinen Einfluß auf die Größe des Gewichts G haben. Es ist deshalb das Verhältniß der vorkommenden Entfernüngen so zu wählen, daß der Arm von Q stets gleich $B C$ werde, daß also die Last, ganz unabhängig von ihrer Lage auf der Brücke, immer in Richtung der Stange $B H$ wirksam zu denken sei. Wir setzen zu dem Ende:

$$\frac{O K}{H K} \cdot B C + \frac{H O}{H K} \cdot \frac{K F}{E F} \cdot D C = B C.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{H O}{H K} \cdot \frac{K F}{E F} \cdot D C = B C - \frac{O K}{H K} \cdot B C,$$

$$\frac{H O}{H K} \cdot \frac{K F}{E F} \cdot D C = \frac{H O}{H K} \cdot B C,$$

oder

$$\frac{K F}{E F} = \frac{B C}{D C},$$

d. h. das Verhältniß der Abschnitte des kurzen Armes des Balkens muß gleich dem Verhältniß der Abschnitte des Traghebels sein, wenn die Lage der Last auf die Richtigkeit der Wägung keinen Einfluß haben soll.

Wir setzen weiter $A C = a$ und $B C = b$, so ist jetzt die Gleichgewichtsbedingung:

$$G . a = Q . b,$$

oder

$$G : Q = b : a.$$

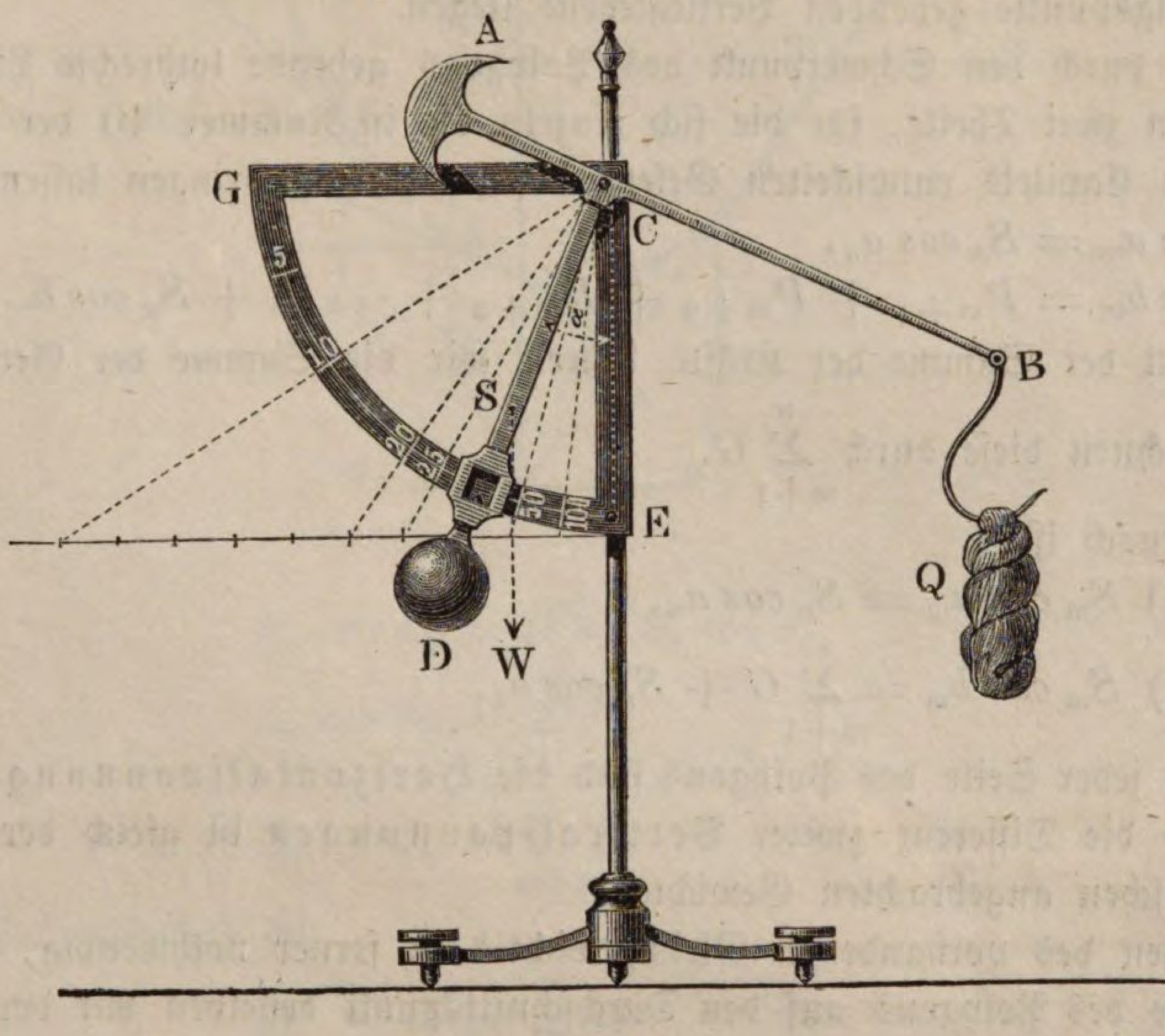
Die zweite Vorschrift für die Richtigkeit der Brückenwage bezieht sich auf das Verhältniß von $G : Q$. Bei praktisch ausgeführten Wagen sind also nach der obigen Angabe für $\frac{b}{a}$ die beiden Verhältnisse 0,1 und 0,01 allein gestattet.

38. Zeigerwagen sind Wiegevorrichtungen, bei welchen die Größe einer abzuwiegenden Last durch ein constantes Gewicht, welches mit der Wage unveränderlich verbunden ist, bestimmt werden kann, und bei denen das Gewicht der Last von einem Zeiger auf bestimmter Scala angegeben wird.

In Figur 181 ist eine Garnsortirwage abgebildet, wie dieselbe jetzt allgemein zur Bestimmung der Feinheitsnummer baumwollener geweifter Garne benutzt wird.

Der Wagebalken AB ist ein ungleicharmiger Hebel, der bei C seinen Drehpunkt hat, bei B mit einem Haken zur Aufnahme der Garnsträhne versehen ist und bei A ein Gegengewicht von solcher Größe trägt, daß der Schwerpunkt des Balkens in den Drehpunkt C fällt. Rechtwinkelig zu AB, im Punkte C ist mit dem Balken der Arm CD fest verbunden, der an seinem Ende das constante Gewicht trägt und unmittelbar darüber mit einem durchbrochenen Rahmen versehen ist, um dadurch die Zahlen auf dem Gradbogen EG erkennen zu können. Das Gewicht des Armes CD mit dem constanten Gewicht am Ende sei W und dasselbe wirke im Schwerpunkt S. Die Wage

Fig. 181.



ist hiernach so eingerichtet, daß im unbelasteten Zustande der Balken AB eine horizontale und der Arm CD eine verticale Lage hat. Es sei $CB = a$, $CS = b$ und das zu bestimmende Gewicht in B sei gleich Q, dann haben wir, wenn der Arm CD bei dieser Belastung mit der Verticalen den Winkel α bildet, als Gleichgewichtsbedingung

$$Q\,a \cos\alpha - W\,b \sin\alpha = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{Q\,a}{W\,b},$$

d. h. die trigonometrischen Tangenten der Ausschlagwinkel sind den Gewichten der Garnsträhne proportional. Hiernach ist eine in E zu CE errichtete Normale in gleiche Theile zu theilen, und die Verbindungslinien dieser Theilpunkte mit C werden auf dem Gradbogen die entsprechenden Theilstriche angeben, welche also unter sich ungleich sind. Bei den Garnen wird anstatt des

Gewichtes die Feinheitsnummer angegeben, d. i. diejenige Zahl, mit der das Gewicht von 840 Yards Garnlänge zu multipliciren ist, um 1 Pfund englisch zu erhalten. Baumwolle Nr. 50 bedeutet also: 840 Yards dieser Baumwolle wiegen $1/_{50}$ Pfund.

In der Figur sind auf dem Gradbogen, dieser Bezeichnung entsprechend, die einzelnen Theilstriche mit diesen Nummern versehen, wonach die Wage von Garn Nr. 100 bis Garn Nr. 5 benutzt werden kann.

39. Ein vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil sei mit seinen beiden Enden befestigt und an verschiedenen Punkten durch herabhängende Gewichte belastet, so wird das sich bildende Seilpolygon in der durch die beiden Befestigungspunkte gehenden Verticalebene liegen.

Die durch den Schwerpunkt des Polygons gehende lothrechte Linie theilt dasselbe in zwei Theile, für die sich einzeln die in Nummer 40 der Uebungen des ersten Capitels entwickelten Gesetze in Anwendung bringen lassen.

$$S_m \cos a_m = S_n \cos a_n,$$

$$S_m \cos b_m = P_{m+1} + P_{m+2} + P_{m+3} + \cdots P_n + S_n \cos b_n.$$

Statt der Summe der Kräfte führen wir die Summe der Gewichte ein und bezeichnen diese durch $\sum\limits_{m+1}^{n} G$.

Hiernach ist:

$$1)\ S_m \cos a_m = S_n \cos a_n,$$

$$2)\ S_m \cos b_m = \sum_{m+1}^{n} G + S_n \cos b_n,$$

d. h. auf jeder Seite des Polygons sind die Horizontalspannungen gleich groß, und die Differenz zweier Verticalspannungen ist gleich der Summe der dazwischen angebrachten Gewichte.

Wegen des vorhandenen Gleichgewichtes ist ferner nothwendig, daß von jeder Seite des Polygons auf den Durchschnittspunkt desselben mit der erwähnten Schwerlinie eine gleiche Einwirkung ausgeübt werde, daß hier also die entstehenden Horizontalspannungen gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

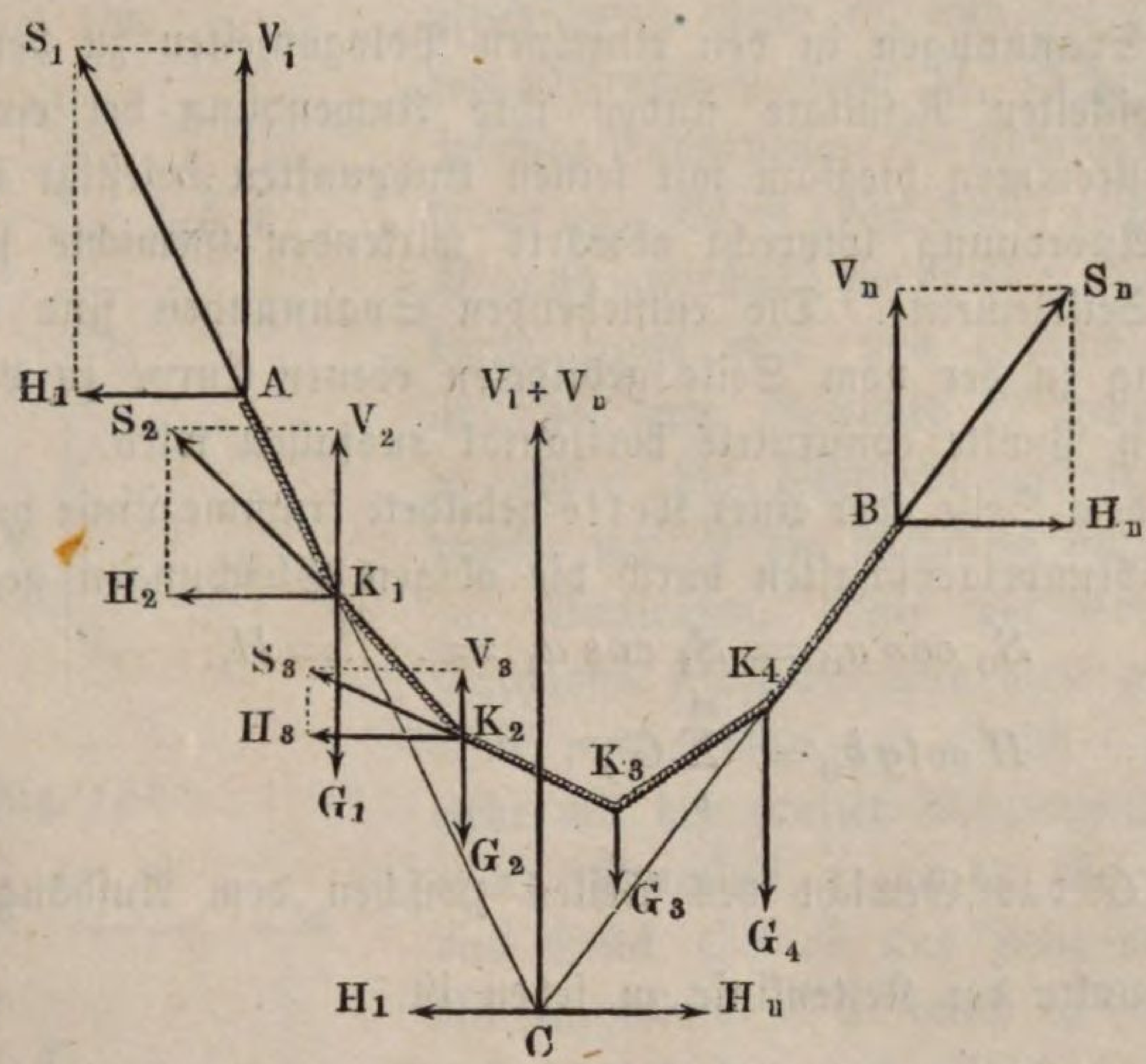
Setzen wir den absoluten Werth der constanten Horizontalspannung gleich H, so ist der obigen Gleichung gemäß:

$$S_0 \cos a_0 = S_1 \cos a_1 = S_2 \cos a_2 = \ldots S_n \cos a_n = H.$$

Verlängert man (Fig. 182) die erste und letzte Polygonseite bis zu ihrem Durchschnitte, so muß in der durch denselben gelegten verticalen Linie der Schwerpunkt des Seilpolygons liegen, da die Horizontalcomponenten sich aufheben und die Verticalcomponenten sämmtliche Gewichte tragen, also die entgegengesetzte Resultante zu den Gewichten bilden, die durch den Mittelpunkt der parallelen Kräfte, den Schwerpunkt des Systemes, gehen muß. Es sei eine Seite des Seilpolygons horizontal, so treten hierin allein die beiden constanten Horizontalcomponenten H nach entgegengesetzter Richtung auf, während die Verticalspannungen gleich Null werden.

Finden sich bis zu dieser Seite daher m Gewichte, und von hier bis zu dem anderen befestigten Punkte des Seiles n, so haben wir:

Fig. 182.



$$S_0 \cos a_0 = H = S_n \cos a_n,$$

$$S_0 \cos b_0 = \sum_1^m G,$$

$$S_n \cos b_n = \sum_{m+1}^n G.$$

Hieraus erhalten wir:

$$H \frac{\cos b_0}{\cos a_0} = \sum_1^m G$$

und

$$H \frac{\cos b_n}{\cos a_n} = \sum_{m+1}^n G.$$

Da $\cos a_0 = \sin b_0$ und $\cos a_n = \sin b_n$, so haben wir für diesen Fall:

$$H \operatorname{cotg} b_0 = \sum_1^m G,$$

$$H \operatorname{cotg} b_1 = \sum_2^m G,$$

$$H \operatorname{cotg} b_2 = \sum_3^m G \text{ u. s. w.,}$$

d. h. das Product aus der constanten Horizontalspannung H in die Cotangente des Winkels, den irgend eine Spannung mit der Verticalen bildet, ist gleich der Summe der angehängten Gewichte zwischen dieser Spannung und der horizontalen Seite des Seilpolygons.

Die beiden Grundgleichungen

$$S_0 \cos a_0 = H,$$

$$H \cot g\, b_0 = \sum_1^m G$$

genügen, die Spannungen in den einzelnen Polygonseiten zu bestimmen.

Die entwickelten Resultate finden ihre Anwendung bei einem schweren Seile, das vollkommen biegsam mit seinen Endpunkten befestigt ist. Die bei der vorigen Anordnung lothrecht abwärts wirkenden Gewichte sind hier die Gewichte der Seilelemente. Die entstehenden Spannungen sind in tangentialer Richtung zu der vom Seile gebildeten ebenen Curve zu denken, wobei die im tiefsten Punkte construirte horizontal ausfallen wird.

Die von dem Seile oder einer Kette gebildete krumme Linie heißt Kettenlinie, deren Grundeigenschaften durch die obigen Gleichungen gegeben sind.

$$S_0 \cos a_0 = S_1 \cos a_1 = \ldots = H,$$

$$H \cot g\, b_0 = \sum_1^m G,$$

worin statt $\sum_1^m G$ das Gewicht des Seiles zwischen dem Aufhängepunkte und dem tiefsten Punkte der Kettenlinie zu setzen ist.

40. Aus der letzten Gleichung

$$H \cot g\, b_0 = \sum_1^m G$$

läßt sich auf leichte Weise ein Verhältniß zwischen den Gewichten G_1, G_2, $G_3 \ldots G_m$, die in den Knoten eines Seilpolygons wirksam sind, ableiten, was zur Construction des Seilpolygons resp. der Kettenlinie benutzt werden kann. Man hat

$$\sum_1^m G - \sum_2^m G = H(\cot g\, b_0 - \cot g\, b_1),$$

$$\sum_2^m G - \sum_3^m G = H(\cot g\, b_1 - \cot g\, b_2) \text{ u. s. w.,}$$

d. h. aber

$$G_1 = H(\cot g\, b_0 - \cot g\, b_1),$$

$$G_2 = H(\cot g\, b_1 - \cot g\, b_2),$$

$$G_3 = H(\cot g\, b_2 - \cot g\, b_3) \text{ u. s. w.}$$

Die Gewichte verhalten sich also wie die Differenzen der Cotangenten der Winkel, die die Polygonseiten mit der Verticalen bilden.

Sind (Fig. 183) die Winkel b_0, b_1, $b_2 \ldots$ und die constante Horizontalspannung H gegeben, so lassen sich die Gewichte durch Construction folgendermaßen finden. Zu einer beliebigen Linie CK_1 construire man eine Normale ACB und schneide darauf $CA = CB$ proportional der Spannung H ab, ziehe die Linien AK_1, AK_2, AK_3, so daß dieselben mit CK_1 die Winkel b_0, b_1, $b_2 \ldots$ bilden, so sind die Abschnitte K_1K_2, $K_2K_3 \ldots$ nach der

letzten Entwickelung den Gewichten G_1, G_2, G_3 ... proportional. Umgekehrt lassen sich auf dieselbe Weise die Winkel finden, welche die Polygonseiten mit der Verticalen bilden, wenn die Gewichte und die constante Spannung gegeben sind. Nehmen wir die Gewichte sämmtlich gleich groß, gleich G, und die constante Horizontalspannung gleich H, so giebt die nebenstehende Construction die Richtung der Polygonseiten an. Es ist (Fig. 184) CH proportional H und normal zu GC. Auf der letzten Linie trage man von C aus gleiche Stücke ab, die dem Gewichte G proportional sind, so geben die Verbindungslinien der Theilpunkte mit H die Richtung der Polygonseiten zur Verticalen. Für die Construction des Polygons selbst verfahre man wie folgt: Auf CH mache man das Stück Ca gleich $C1$, ziehe mit der zweiten Richtungslinie $H1$ durch a eine Parallele, trage auf dieser bis b wieder das Stück Ca ab und ziehe mit der dritten Richtungslinie $H2$ durch b eine Parallele, auf der wieder das Stück Ca abzutragen und eine Parallele mit der vierten Richtungslinie zu ziehen ist. Wird in der Weise fortgefahren und zu beiden Seiten von C die Construction ausgeführt, so entsteht das Seilpolygon, das bei einer sehr großen Anzahl von Seiten in die Kettenlinie übergeht, so daß die angegebene Construction auch für diese krumme Linie paßt. In diesem Falle ist CG die halbe Länge der Kettenlinie, die in eine große Anzahl gleicher Theile zu theilen ist.

Fig. 183.

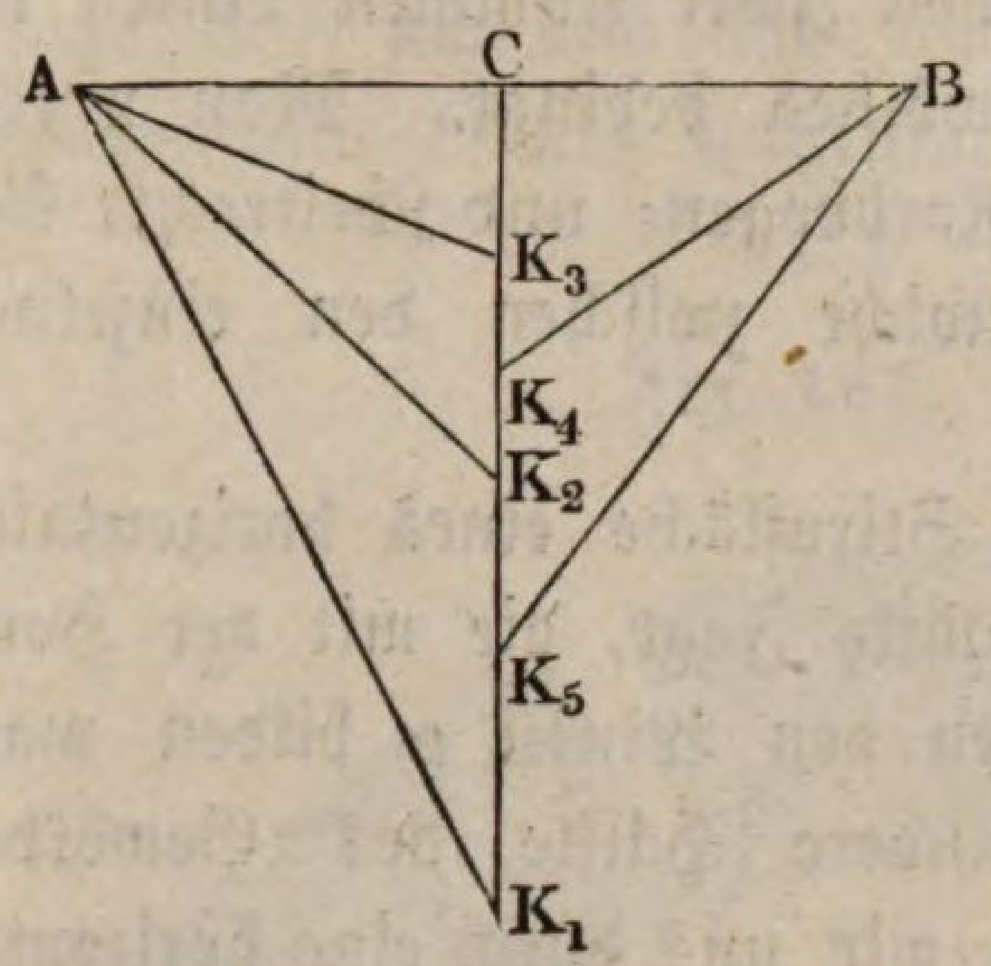
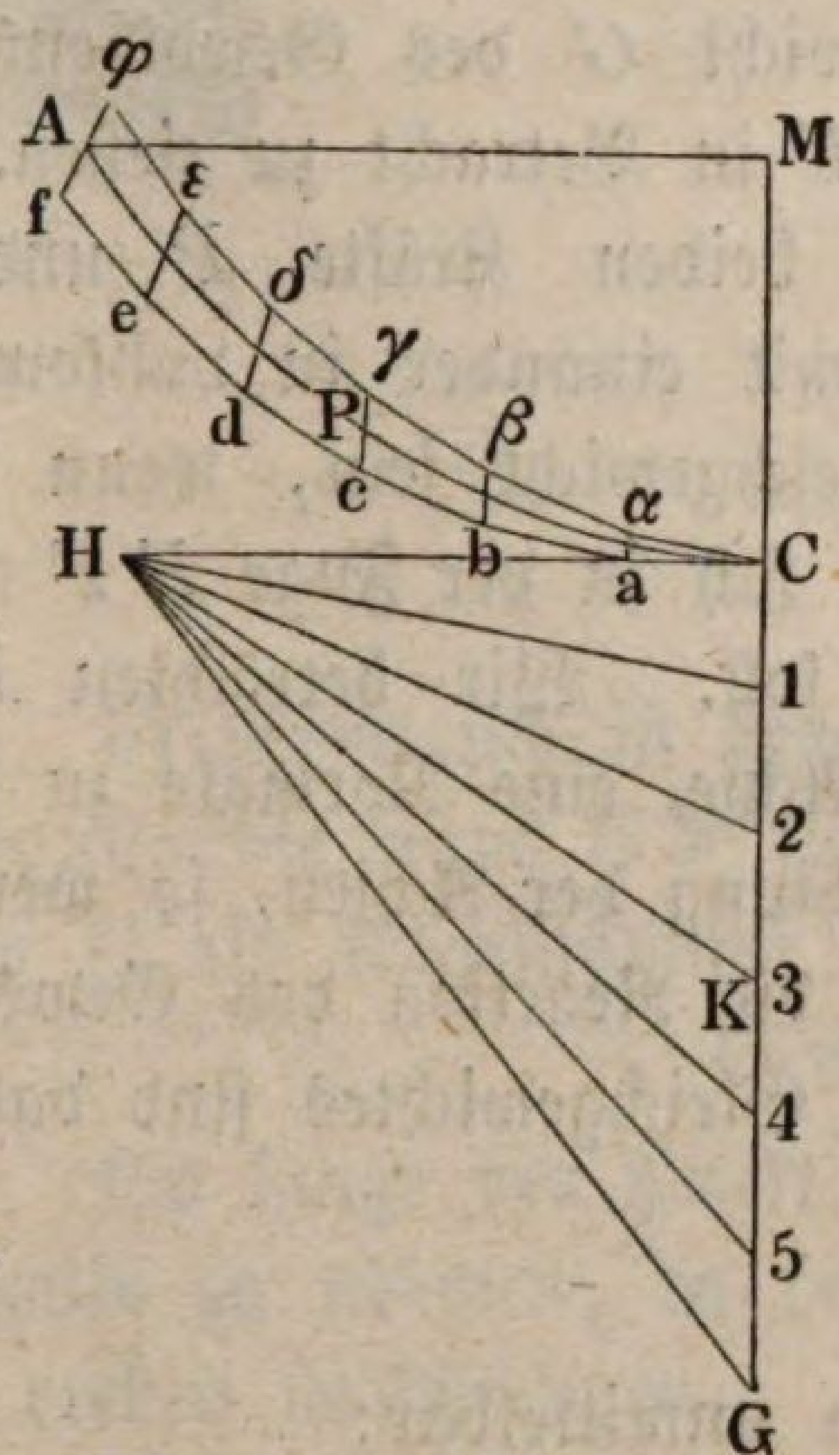
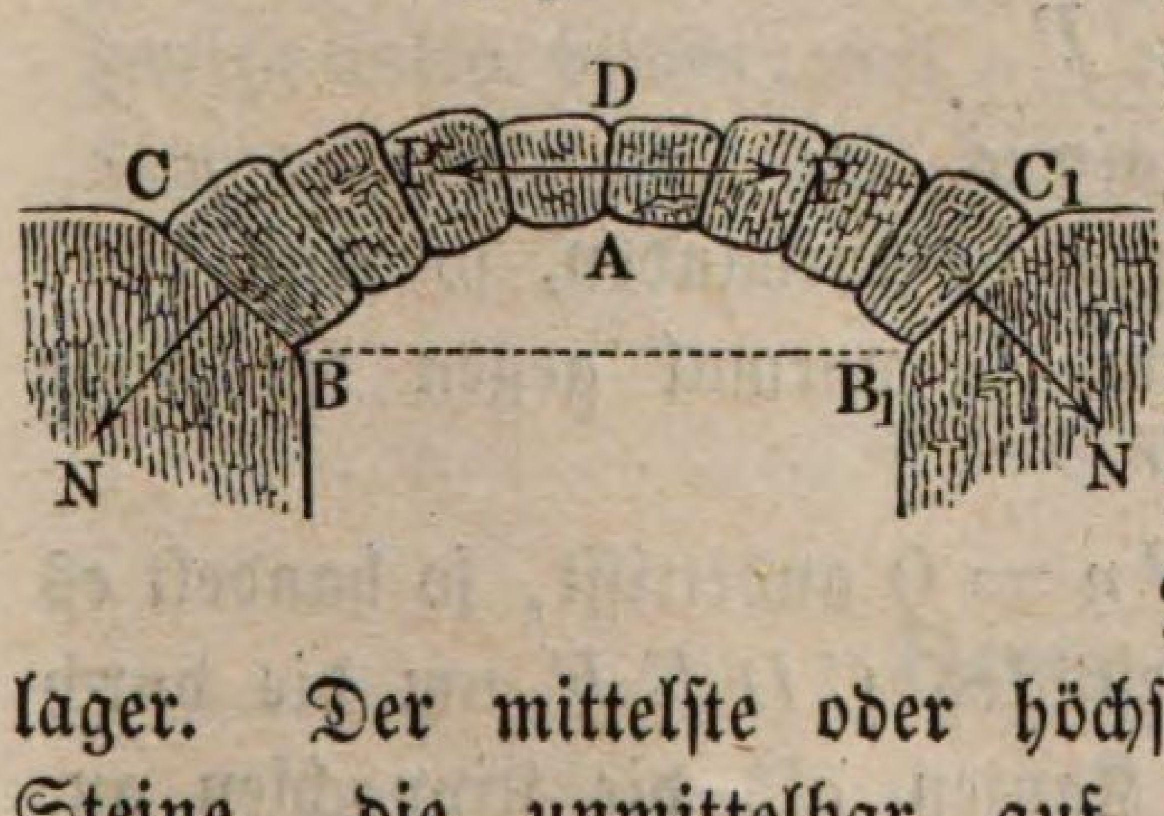


Fig. 184.



41. Ein Gewölbe (Fig. 185) ist eine Verbindung von Körpern, welche mit ihren Seitenflächen zusammenstoßen, während die ganze Verbindung durch zwei feste Hindernisse so gestützt wird, daß die Körper sowohl unter sich als auch mit anderen von außen darauf wirkenden Kräften im Gleichgewichte sind.

Fig. 185.

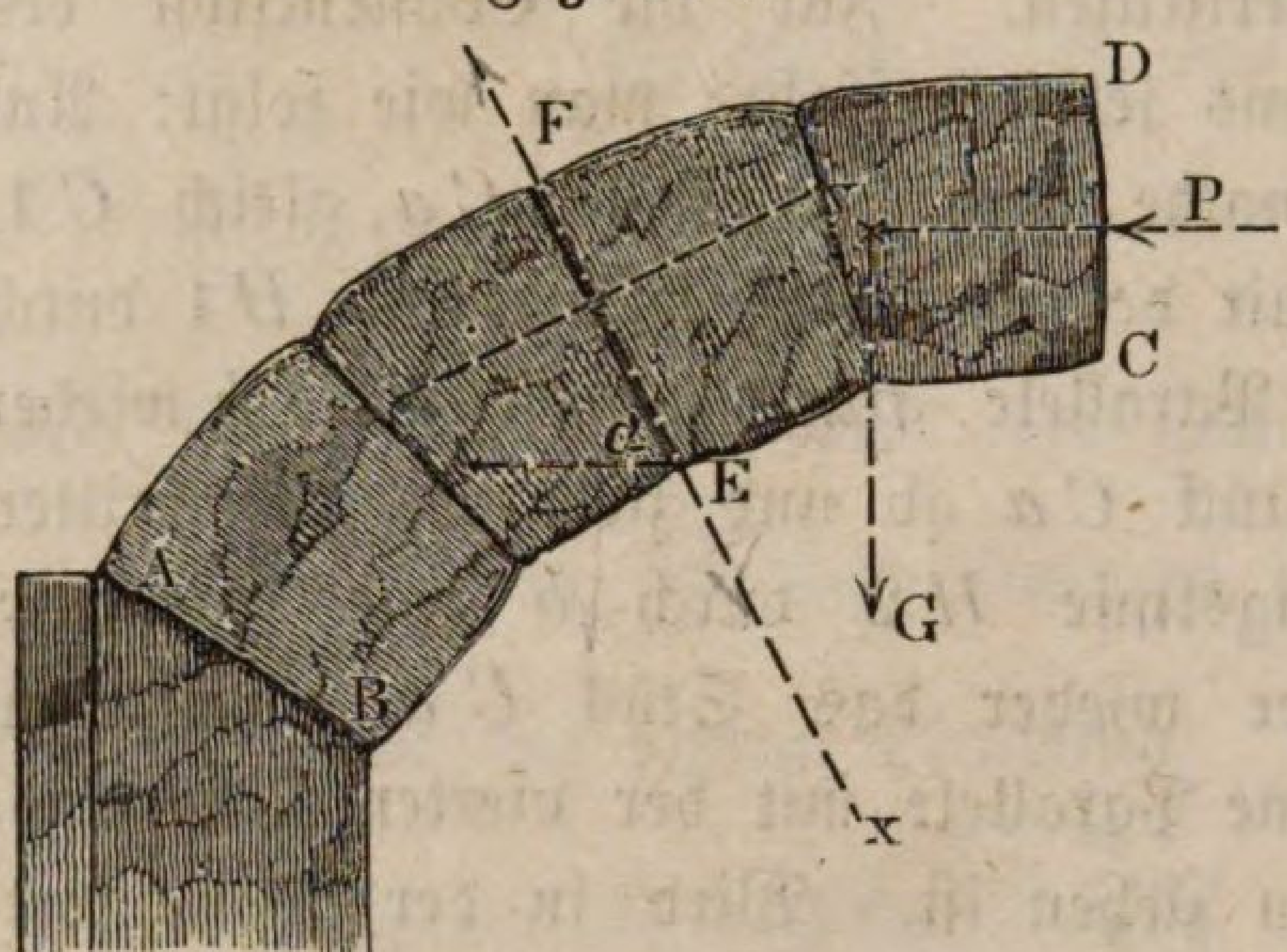


Die Körper heißen Gewölbsteine, die Flächen DA, CB, $C_1 B_1$ u. s. w., mit denen dieselben zusammenstoßen, heißen Gewölbfugen. Die festen Hindernisse N nennt man Widerlager. Der mittelste oder höchste Gewölbstein heißt Schlußstein, die beiden Steine, die unmittelbar auf dem Widerlager ruhen, werden Kämpfer genannt.

Ein Gewölbe wird von zwei gekrümmten Flächen, den Wölbungen, begrenzt, von denen man die innere und äußere zu unterscheiden hat. Man nennt das Gewölbe ein Tonnengewölbe, wenn beide Wölbungen cylinderische Flächen sind. Wir beschäftigen uns hier mit den horizontalen Tonnengewölben, deren Achse eine Horizontale ist. Dieselben sind von zwei Verticalebenen, den Stirnflächen, begrenzt. Die Stirnflächen sind von zwei krummen Linien begrenzt, deren Form den Namen des Tonnengewölbes bedingt. Man unterscheidet hiernach kreisförmige, elliptische, Ketten- Korbbogen- und scheitrechte Gewölbe. Findet das oben angedeutete Gleichgewicht zwischen den einzelnen Steinen nicht statt, so stürzt das Gewölbe ein.

Es stelle (Fig. 186) $ABCD$ die halbe Stirnfläche eines horizontalen Tonnengewölbes vor, FE sei eine beliebig gewählte Fuge, die mit der Horizontalen den Winkel α bilden mag. Die andere Hälfte des Gewölbes denken wir uns durch eine horizontal wirkende Kraft P ersetzt.

Fig. 186.



Außer dieser Kraft P ist noch das Gewicht G des Gewölbestückes $CDEF$ in Betracht zu ziehen.

Die beiden Kräfte P und G müssen mit einander in vollkommenem Gleichgewicht sein, wenn das Gewölbe sich in der Fuge EF nicht trennen soll. Wir betrachten EF als X-Achse, eine Normale zu derselben als Y-Achse und zerlegen P und G nach Richtung der Achsen, so werden die Componenten in Richtung der Y-Achse durch die Reaction des Gewölbestückes $ABFE$ aufgehoben, die Bedingungen des Gleichgewichtes sind daher:

$$\Sigma P_1 \cos \alpha_1 = 0$$
$$Nn = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man unmittelbar:

$$P \cos \alpha - G \sin \alpha = 0$$

oder

$$P \operatorname{cotg} \alpha = G,$$

der gegen die Fuge EF ausgeübte normale Druck D ist:

$$D = P \sin \alpha + G \cos \alpha$$

$$D = \frac{G}{\cos \alpha} \text{ oder } D = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

Ist in Bezug auf die Fuge EF Gleichgewicht vorhanden, so muß hiernach die Resultante der beiden Kräfte P und G normal gegen die Fuge gerichtet sein.

Was die zweite Gleichgewichtsbedingung $Nn = 0$ anbetrifft, so handelt es sich hier um Drehen oder Kippen des Gewölbestückes $CDEF$ um die durch E oder F gehende Kante. Sehen wir diese Kanten als die Kippachsen an, so muß das Gewölbestück $CDEF$ die nothwendige Stabilität gegen das

Kippen besitzen, d. h. das Gleichgewicht gegen Kippen genügt allein in diesem Falle nicht, der in §. 44 entwickelte Werth der Stabilität Ss muß vielmehr für die beiden möglichen Kippachsen einen positiven Werth haben.

Hiernach erhalten wir als Stabilitätsbedingungen:

a) Wenn die durch E (Fig. 187) gehende Kante Kippachse wird, die Fuge EF sich also nach außen, die Mittelfuge CD sich dagegen nach innen öffnet, und D als Angriffspunkt des Druckes P angesehen wird:

$$Py - Gx > 0.$$

Fig. 187.

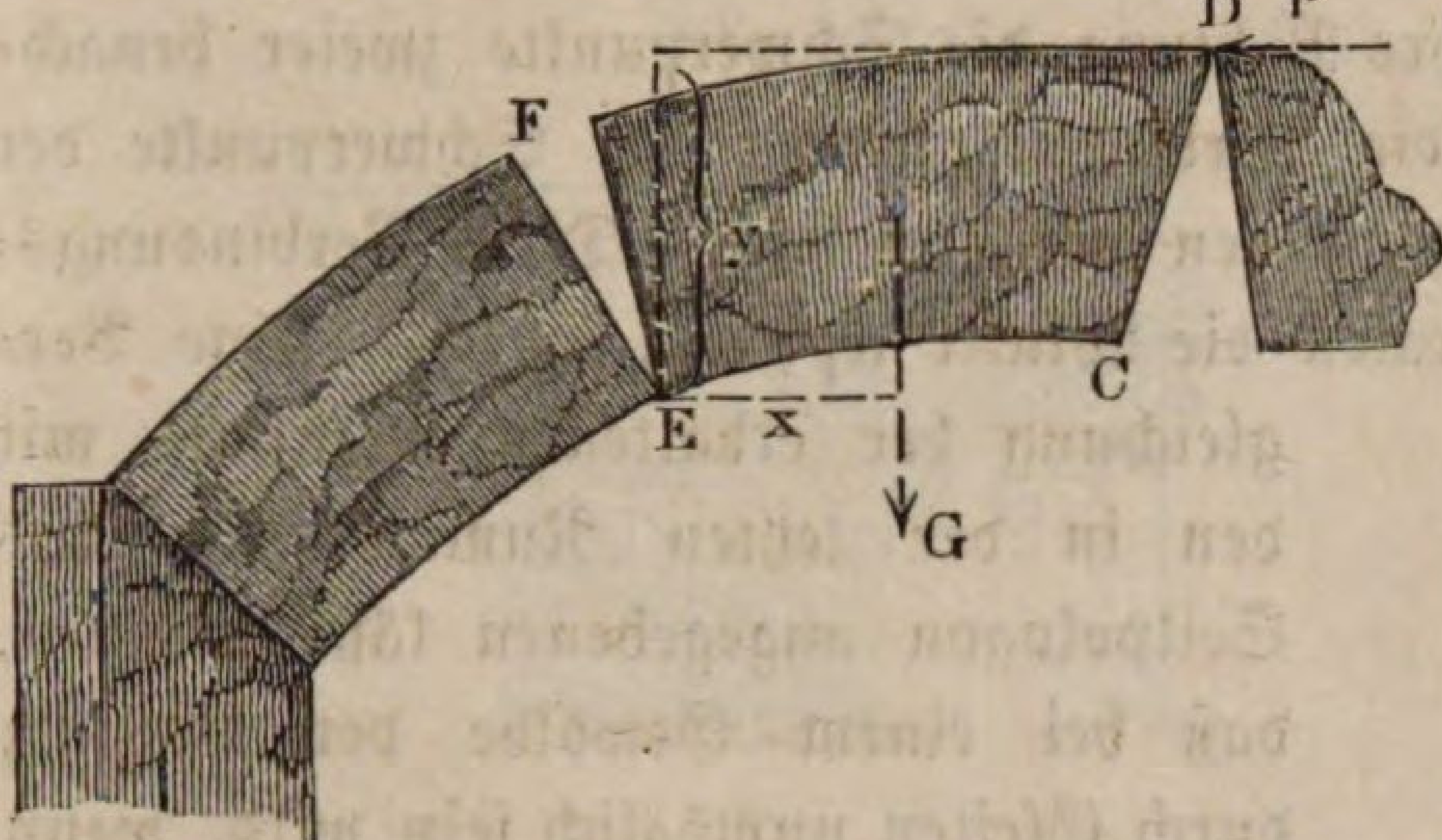
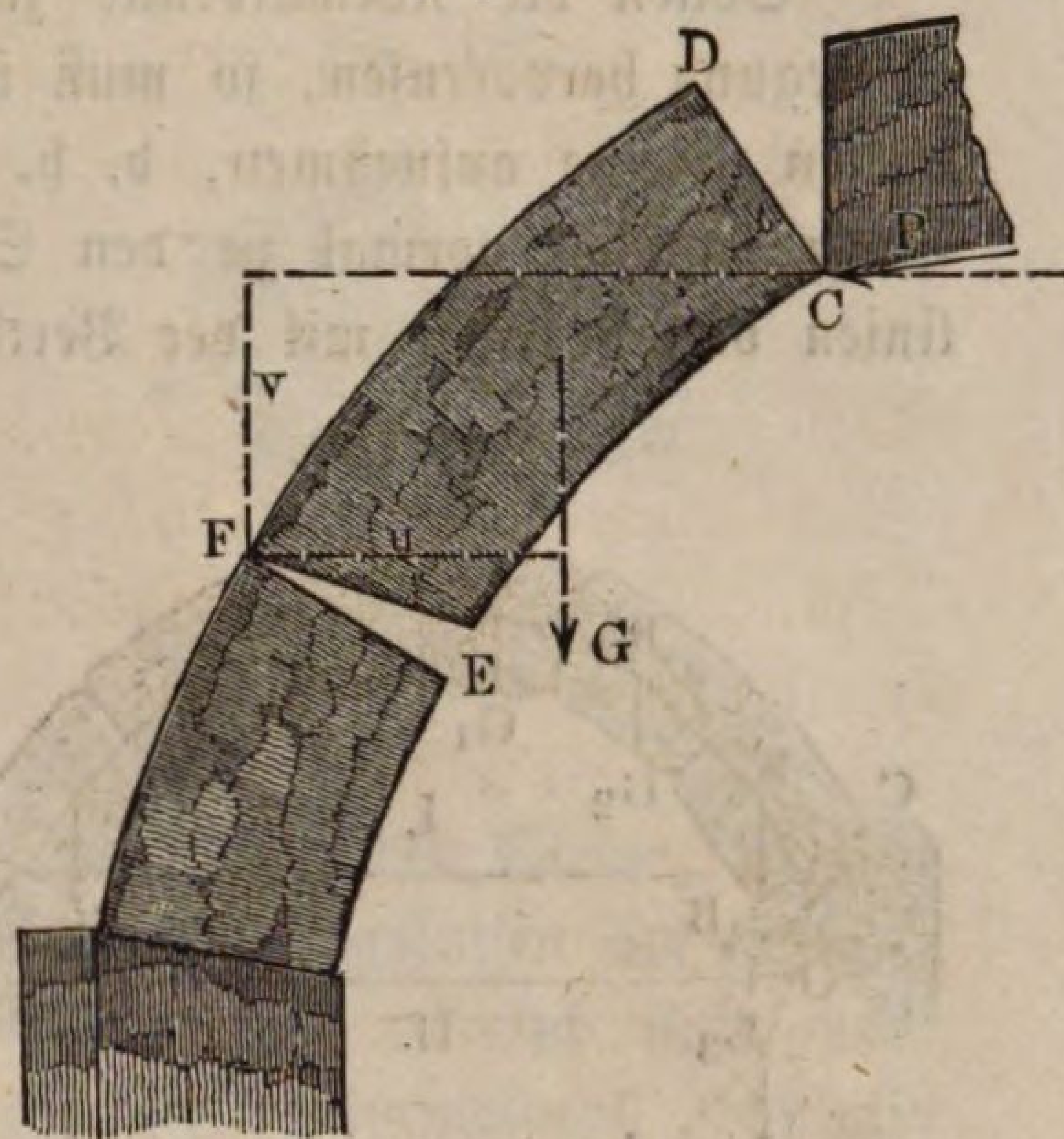


Fig. 188.



b) Wenn sich in dem Punkte F (Fig. 188) die Kippachse bildet, wenn sich also die Fuge EF nach innen und die Mittelfuge CD nach außen öffnet und C als Angriffspunkt des Druckes P angesehen wird.

$$Gu - Pv > 0.$$

So lange der Punkt C tiefer als F liegt, ist v in der letzten Gleichung negativ zu nehmen, da beide Paare in diesem Falle nach derselben Richtung zu drehen beabsichtigen.

Im ersten Falle muß der Druck P das Gewicht G überwinden, im zweiten Falle umgekehrt das Gewicht G den Druck P.

42. Bezeichnen wir die Gewichte der Gewölbsteine vom Schlußsteine bis zum Kämpfer mit $G_1, G_2, G_3 \ldots G_m$, die Winkel, welche die Fugen mit der Horizontalen bilden, mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_m$, so erhalten wir den obigen Gleichungen gemäß für das beabsichtigte Gleichgewicht in den einzelnen Fugen:

$$P \, cotg \, \alpha_1 = G_1$$

$$P \, cotg \, \alpha_2 = \sum_1^2 G$$

$$P \, cotg \, \alpha_3 = \sum_1^3 G$$

u. s. w. bis

$$P \, cotg \, \alpha_m = \sum_1^m G.$$

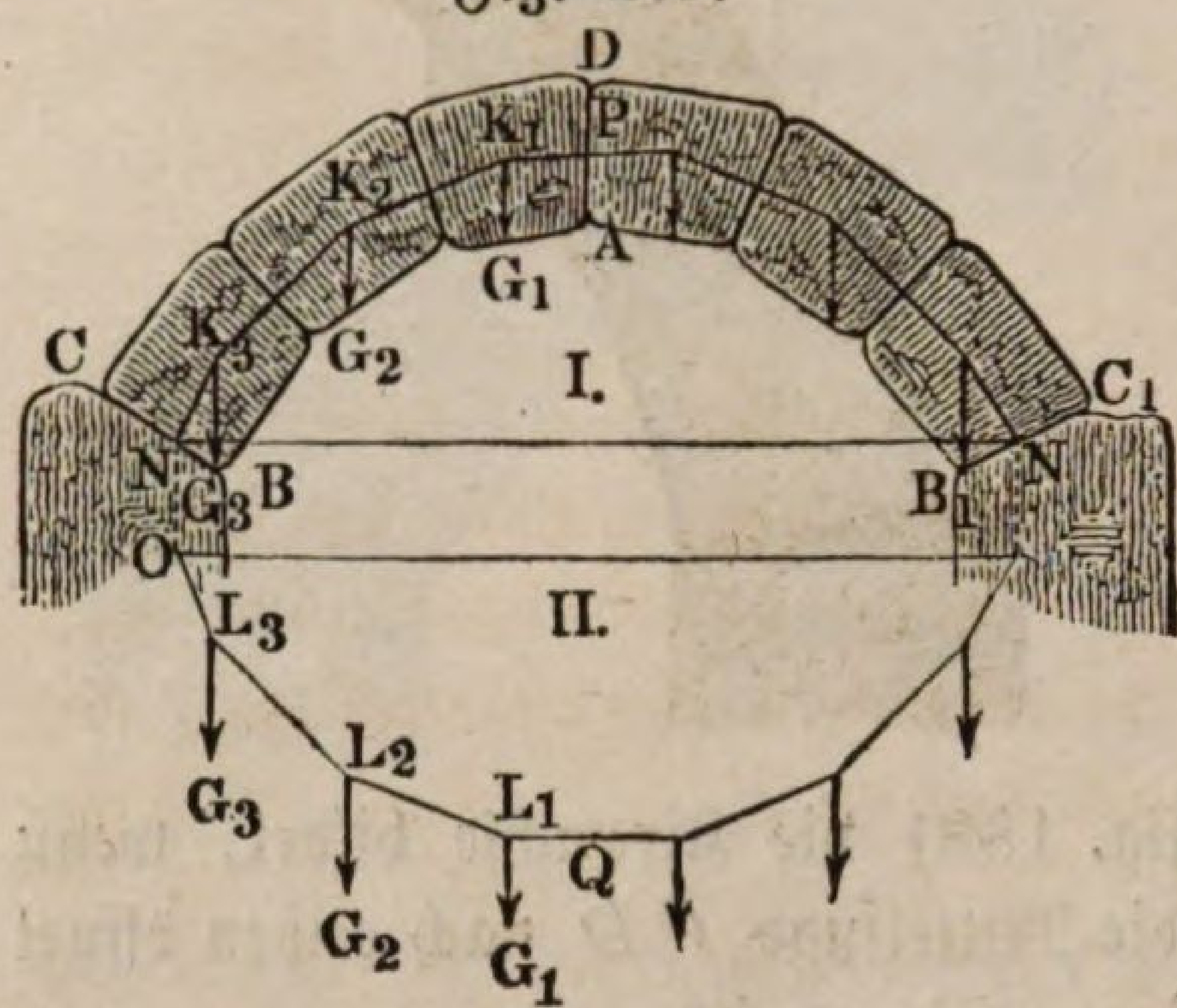
Hieraus folgen die Gewichte der einzelnen Gewölbsteine:

$$G_1 = P \, cotg \, \alpha_1$$
$$G_2 = P \, (cotg \, \alpha_2 - cotg \, \alpha_1)$$
$$G_3 = P \, (cotg \, \alpha_3 - cotg \, \alpha_2)$$
u. s. w. bis
$$G_m = P \, (cotg \, \alpha_m - cotg \, \alpha_{m-1}).$$

Die Gewichte der einzelnen Gewölbsteine verhalten sich also wie die Differenzen der Cotangenten, derjenigen Winkel, welche die Gewölbfugen mit dem Horizonte bilden.

Sollen die Normaldrucke zu den Fugen in den einzelnen Steinen keine Bewegung hervorrufen, so muß ihre Richtung die Schwerpunkte zweier benachbarten Steine aufnehmen, d. h. die Verbindungslinien der Schwerpunkte der Steine müssen normal zu den Steinfugen gerichtet sein. Diese Verbindungslinien bilden daher mit der Verticalen die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ Eine Vergleichung der erhaltenen Resultate mit den in der letzten Nummer für das Seilpolygon angegebenen läßt erkennen, daß bei einem Gewölbe der Einsturz durch Gleiten unmöglich sein wird, wenn die Verbindungslinien der Schwerpunkte der einzelnen Steine normal zu den Fugen gerichtet sind und ein Polygon bilden, das einem umgekehrten Seilpolygon congruent ist, welches (Fig. 189) von den Gewichten $G_1, G_2, G_3 \ldots$ gespannt wird, die den Gewichten der Gewölbsteine gleich sind und bei dem die Schwerpunkte $K_1, K_2, K_3 \ldots$ der Steine die Knoten $L_1, L_2, L_3 \ldots$ vorstellen.

Fig. 189.



Ist das Gewölbe aus sehr viel Steinen construirt, die sämmtlich dasselbe Gewicht haben, so geht das durch die Schwerpunkte der Steine bestimmte Seilpolygon in eine Kettenlinie über. Ein nach dieser Curve construirtes Gewölbe ist dem Einsturze durch Gleiten in keiner Weise ausgesetzt und wird allein wegen seiner schwierigen Ausführung so selten ausgeführt.

Soll die innere Wölbungslinie ein Kreisbogen sein, der durch die radiallaufenden Fugen in gleiche Theile getheilt wird, so sind die Höhen der einzelnen Steine den Gewichten derselben proportional. Den obigen Gleichungen gemäß findet man daher die Höhen der Steine, wenn, wie gewöhnlich, die Dimensionen des Schlußsteines gegeben sind, durch folgende Construction.

Es sei (Fig. 190) M der Mittelpunkt des Kreisbogens der inneren Wölbungslinie, von dem aus die radiallaufenden Fugen gezogen sind. In Richtung der Scheitelfuge wählen wir den Punkt N so, daß MN dem Drucke P, d. h. dem gegebenen Werthe $G_1 \, tang \, \alpha_1$, proportional wird, und errichten in N zu MN eine Normale. Es wird hierbei NL_1 gleich der gegebenen Höhe h des Schlußsteines, und die durch die übrigen Fugen-

richtungen auf der Normalen entstehenden Abschnitte $L_1 L_2$, $L_2 L_3$, u. s. w. sind gleich den Höhen der übrigen Gewölbsteine zu wählen, da für diese Abschnitte dasselbe Verhältniß besteht, welches für die Gewichte der Steine als nothwendig erkannt worden ist.

Bei dieser Construction sind die entstehenden Hypotenusen $M L_1$, $M L_2$, $M L_3$ ... der Reihe nach gleich $\frac{MN}{\sin \alpha_1}$, $\frac{MN}{\sin \alpha_2}$, $\frac{MN}{\sin \alpha_3}$ ..., d. h. dem Drucke, normal zur Fuge, proportional.

Fig. 190.

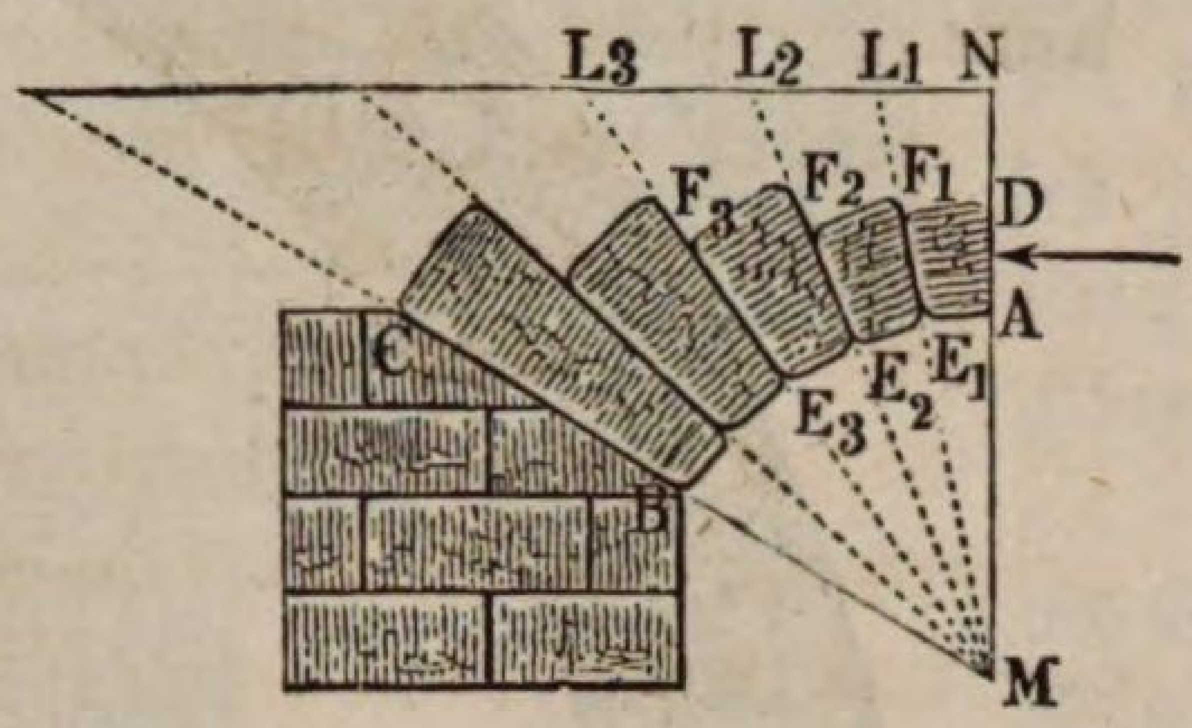
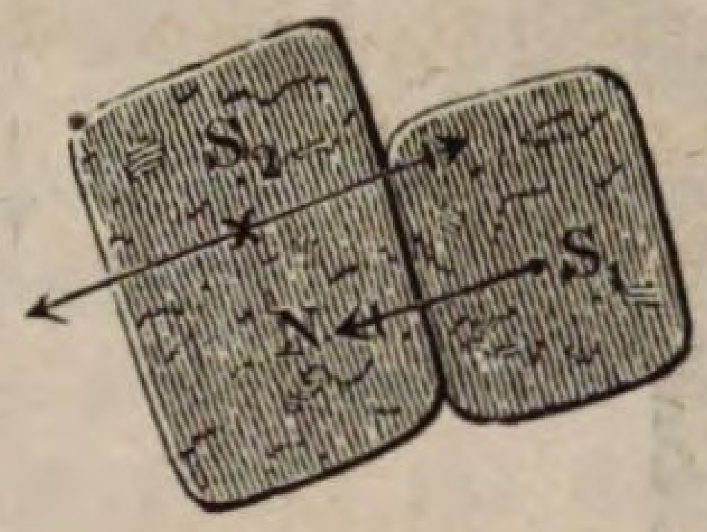


Fig. 191.



Bestimmt man auf die angegebene Weise die Höhen der Steine, so geht eine der Gleichgewichtsbedingungen verloren, die Verbindungslinien der Schwerpunkte (Fig. 191) S_1, S_2 ... der einzelnen Steine sind nämlich nicht mehr normal zu den Fugen, der in einem Steine entwickelte Normaldruck geht also nicht mehr durch den Schwerpunkt des folgenden Steines. Man verschiebe zu dem Ende den Normaldruck $N = \frac{P}{\sin \alpha_1}$ parallel seiner Richtung bis in den Schwerpunkt S_2 des zweiten Steines. Das dabei entstehende Kräftepaar kann durch sein Drehungsbestreben den Einsturz des Gewölbes veranlassen, indem sowohl die innere als auch die äußere Kante des zweiten Steines Drehachse werden kann. Dies Drehungsbestreben muß für jede beliebig gewählte Fuge vermieden werden.

Der Normaldruck $\frac{P}{\sin \alpha}$ ist die Resultante aus den beiden Kräften P und G, wir können deshalb statt des aus dem Normaldrucke entstehenden Kräftepaares die durch die Kräfte P und G hervorgerufenen Kräftepaare benutzen, und müssen daher bei den Untersuchungen eines Gewölbes auf Einsturz die oben angegebenen Stabilitätsbedingungen vor allen Dingen in Betracht ziehen.

Für eine beliebige Fuge ist nach der vorigen Nummer

a) in Bezug auf die innere Kante (Fig. 192 a. f. S.):

$$Py - Gx > 0,$$

b) in Bezug auf die äußere Kante (Fig. 193 a. f. S.):

$$Gu - Pv > 0.$$

Diese Ungleichheiten müssen für jede einzelne Fuge stattfinden, d. h. es muß

$$P > G \cdot \frac{x}{y}$$

und zugleich

$$P < G \cdot \frac{u}{v}$$

Fig. 192.

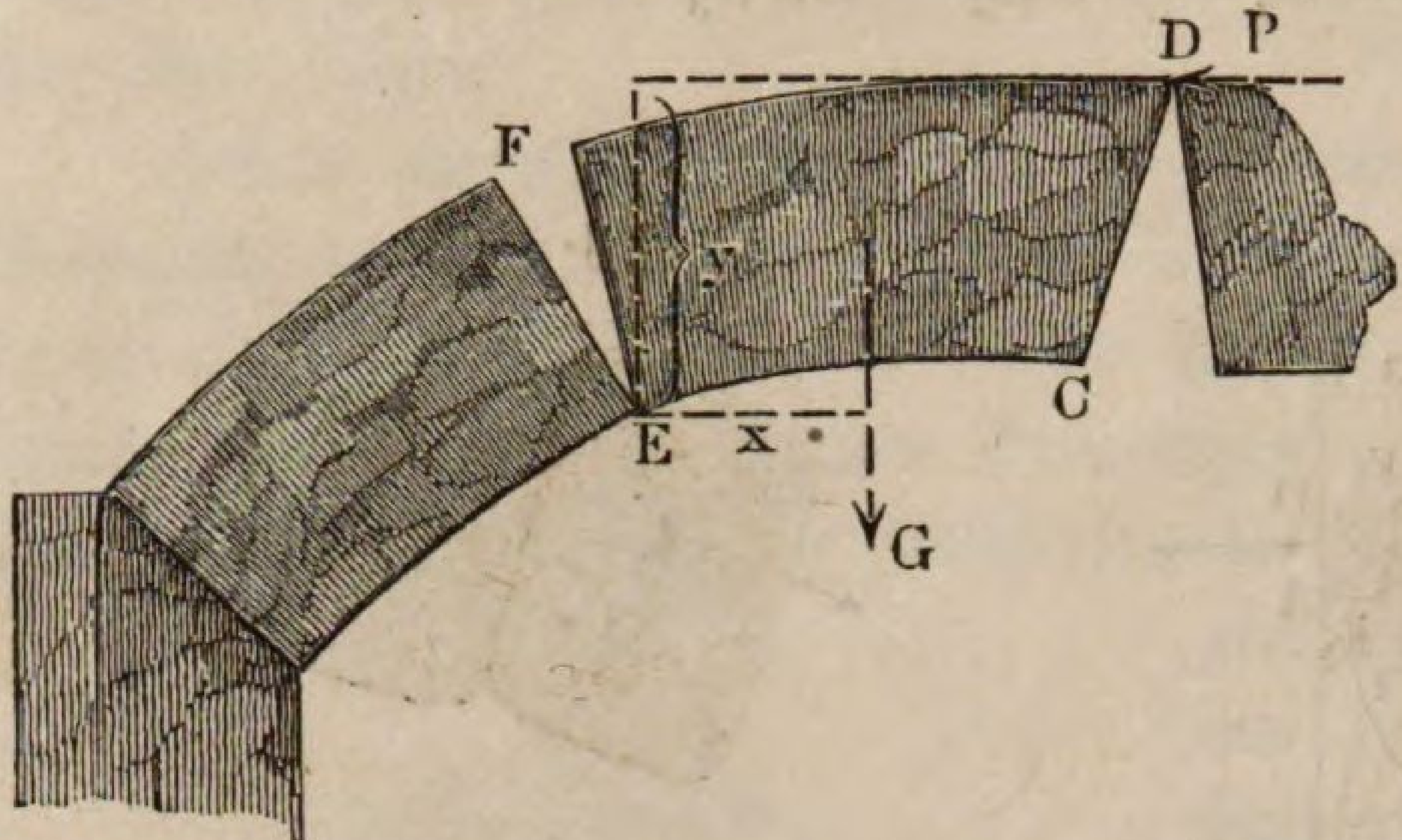
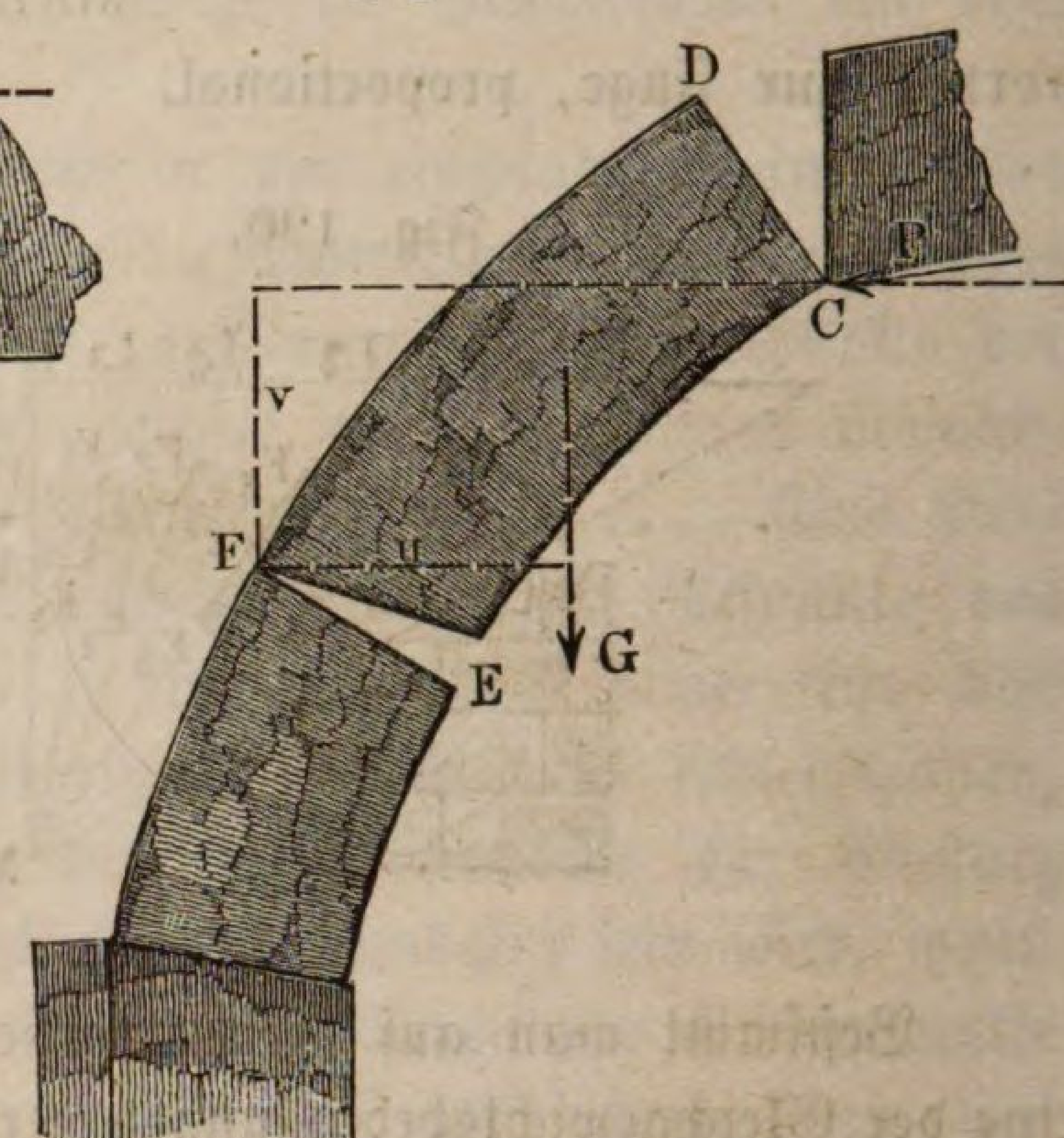


Fig. 193.



sein. Suchen wir hiernach diejenige Fuge auf, für welche $G\frac{x}{y}$ ein Maximum, und ebenso diejenige Fuge, für die $G\frac{u}{v}$ ein Minimum ist, so bilden diese Werthe die Grenzen für den Druck P, d. h. es muß P zugleich größer als das gefundene Maximum und kleiner als das gefundene Minimum sein. Fassen wir beide Bedingungen in eine zusammen, so erhalten wir bei vollkommener Stabilität eines Gewölbes: das Maximum von $G\frac{x}{y}$ muß kleiner als das Minimum von $G\frac{u}{v}$ sein.

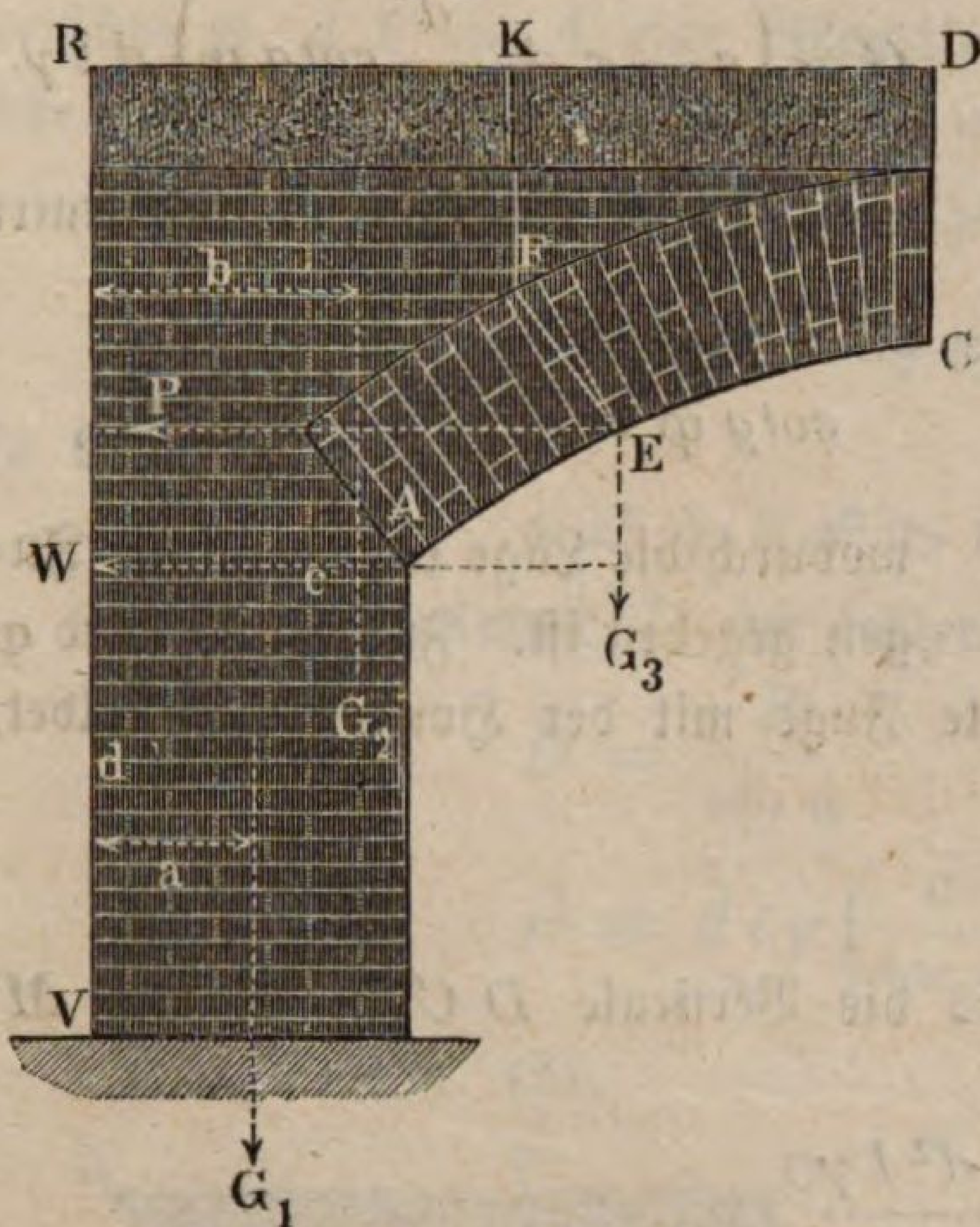
43. Die Gewölbe haben in den meisten Fällen außer ihrem eigenen Gewichte noch eine Belastung zu tragen. Dieselbe ist theils constant, theils veränderlich.

Die Uebermauerungen der Gewölbe mit horizontaler oder geneigter Oberfläche und die Ausfüllungen mit Sand und Erde bilden die constante Belastung. Diese ist zur Sicherstellung der Stabilität und zur Unterstützung der Tragfläche des Gewölbes unbedingt nothwendig, weshalb bei den Stabilitätsuntersuchungen eines Gewölbes auf das Gewicht dieser constanten Belastungen Rücksicht zu nehmen und in den entwickelten Formeln unter G_1, G_2, G_3 ... das Gewicht eines Steines mit der darüber befindlichen Belastung zu verstehen ist. Die veränderlichen Lasten sind bei Brückengewölben z. B. bewegende Menschenmassen, Eisenbahnzüge, Frachtfuhrwerke u. dergl.

Soll die Stabilität eines Gewölbes durch solche zufällige Lasten nicht zu sehr geändert oder gar aufgehoben werden, so müssen die Gewölbe recht schwer hergestellt und mit so großen constanten Belastungen versehen werden, daß von einer zufälligen Last eine bemerkbare Aenderung nicht zu fürchten ist.

Nachdem bei einem construirten Gewölbe der vorigen Nummer gemäß der größte Werth von P gefunden worden ist, läßt sich die Stärke des Widerlagers bestimmen. Es sei (Fig. 194) EF die Fuge, die den größten Werth von P bedingt, in der also das Zusammenbrechen des Gewölbes stattfinden würde, wenn P einen kleineren Werth erhielte. Sobald die Fuge EF sich nach außen öffnet, ist der stehenbleibende Theil des Gewölbes mit dem Widerlager als fest zusammenhängend zu denken und die durch den Punkt V des Widerlagers gehende Kante wird Kippachse.

Fig. 194.



Die Kraft P und das Gewicht G_3 des Gewölbestückes $CDKFE$ haben ihren Angriffspunkt beim Oeffnen der Fuge EF nach außen in dem Punkte E, die Arme dieser Kräfte seien d und c. Das Gewicht G_2 des Gewölbestückes $EFKRWA$ habe den Arm b, und das Gewicht G_1 des Widerlagers sei mit dem Arme a in Rechnung zu bringen. Die Stärke x des Widerlagers muß der Bedingung genügen, daß die vorhandene Stabilität Ss für die durch V gehende Kippachse einen positiven Werth erhalte. Wir haben:

$$Ss = G_1 a + G_2 b - (Pd - G_3 c)$$
$$= G_1 a + G_2 b + G_3 c - Pd.$$

Da $Ss > 0$ sein muß, so folgt aus dieser Gleichung:

$$Pd < G_1 a + G_2 b + G_3 c.$$

Erfahrungsmäßig genügt es, die rechte Seite der letzten Ungleichheit gleich $2Pd$ zu setzen und die dann gebildete Gleichung zur Entwickelung der darin vorkommenden unbekannten Stärke x des Widerlagers zu benutzen,

$$2Pd = G_1 a + G_2 b + G_3 c.$$

44. Die allgemeinen Untersuchungen mögen auf ein scheitrechtes Gewölbe von der Scheiteldicke d und der lichten Weite $2a$ in Anwendung gebracht werden.

Für die beliebig gewählte Fuge (Fig. 195 a. f. S.) EF in der Entfernung $AE = x$ haben wir:

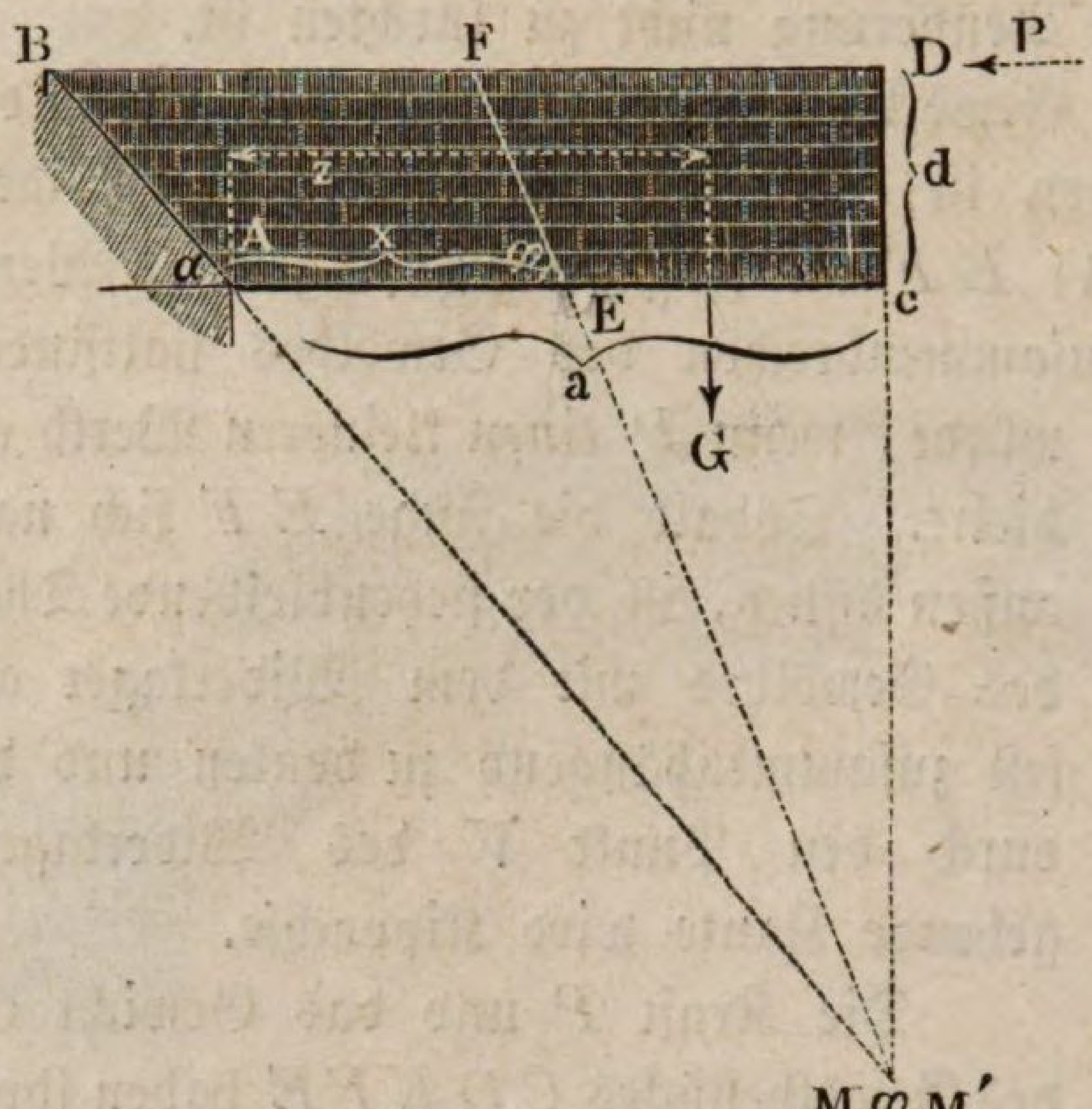
1) $P \cot g\, \varphi = G$,

2) $Pd > G\,(z - x)$,

3) $-Pd < G\,(z - x + d \cot g\, \varphi)$.

Die dritte Stabilitätsbedingung kann unberücksichtigt bleiben, da sie immer erfüllt ist, indem $z - x + d \, cotg \, \varphi$ für jeden beliebigen Werth von z und x positiv bleibt. Wir haben hiernach für das scheitrechte Gewölbe:

Fig. 195.



1) $P \, cotg \, \varphi = G$,

2) $P d > G \, (z - x)$.

Es sei l die Länge des Gewölbes und ein Kubikdecimeter wiege γ Kilogramm, so ist:

$$G = \left(a - x + \frac{d}{2} \, cotg \, \varphi\right) d \, l \, \gamma.$$

Dieser Werth in 1 substituirt liefert:

$$cotg \, \varphi = \frac{(a - x) \, d \, l \, \gamma}{P - \frac{1}{2} d^2 \, l \, \gamma},$$

wodurch die Lage der einzelnen Fugen gegeben ist. Für $x = 0$ wird φ gleich α, gleich dem Winkel, den die letzte Fuge mit der Horizontalen bildet,

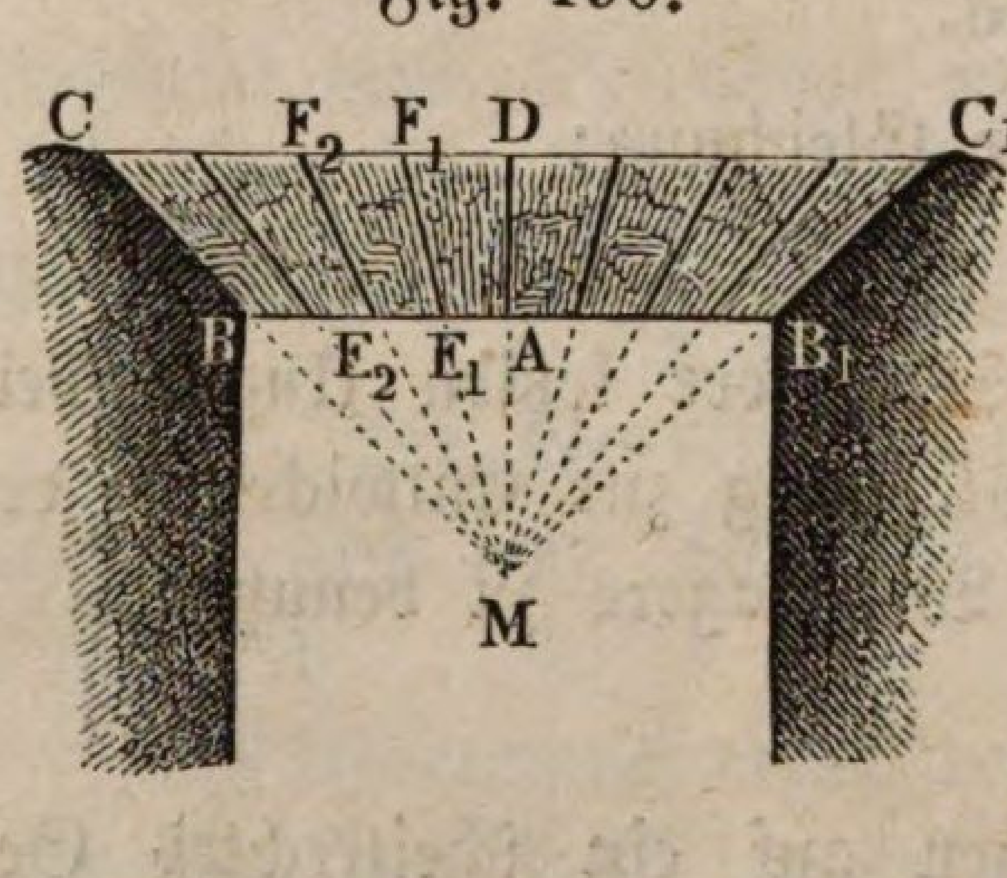
$$cotg \, \alpha = \frac{a \, d \, l \, \gamma}{P - \frac{1}{2} d^2 \, l \, \gamma}.$$

Man verlängere $B A$ und $F E$, bis die Verticale $D C$ in M und M' geschnitten wird, so ist

$$M C = a \, tang \, \alpha = \frac{P - \frac{1}{2} d^2 \, l \, \gamma}{d \, l \, \gamma}$$

$$M' C = (a - x) \, tang \, \varphi = \frac{P - \frac{1}{2} d^2 \, l \, \gamma}{d \, l \, \gamma}.$$

Fig. 196.



Hierdurch erhalten wir $M C = M' C$, d. h. der Punkt M' fällt mit M zusammen, oder alle Fugen müssen verlängert (Fig. 196) durch denselben Punkt M gehen.

Weiter ist (Fig. 195):

$$G \, (z - x) = \tfrac{1}{6} d l \gamma \left[3 \, (a - x)^2 - d^2 cotg \, \varphi^2\right].$$

Dieser Werth in 2 substituirt liefert:

$$P > \tfrac{1}{6} \, l \, \gamma \left[3 \, (a - x)^2 - d^2 \, cotg \, \varphi^2\right].$$

Den aus dem Ausdruck für $cotg \, \varphi$ entwickelten Werth von P setzen wir statt des letzten Werthes, so entsteht:

$$cotg \, \varphi^3 - 3 \, cotg \, \varphi \left[\left(\frac{a - x}{d}\right)^2 - 1\right] + 6 \, \frac{a - x}{d} > 0.$$

Diese Ungleichheit muß für jede beliebige Fuge bestehen, also auch für die erste mit dem Neigungswinkel α, wodurch wir ein Mittel erhalten, die

Lage der ersten Fuge und nach der ersten Bedingung überhaupt die Lage sämmtlicher Fugen zu bestimmen:

$$cotg\, \alpha^3 - 3\left[\left(\frac{a}{d}\right)^2 - 1\right] cotg\, \alpha + 6\,\frac{a}{d} > 0.$$

Man setze den Ausdruck zuerst gleich 0, bestimme α und nehme denselben bei der Ausführung etwas größer. Eine praktische Construction der letzten Fuge $A\,B$ ergiebt sich auf folgende Weise: Es sei (Fig. 197) $AE = EC$ gleich $\frac{a}{2}$, in E errichte man zu $A\,C$ eine Normale, verbinde A mit F und errichte zu $A\,F$ in A eine Normale, welche die obere Begrenzung $D\,F$ des scheitrechten Gewölbes im Punkte B schneidet, die letzte Fuge $A\,B$ also bestimmt.

Die Construction genügt der obigen Ungleichheit, denn setzt man darin

$$cotg\, \alpha = tang\, \alpha_1 = \frac{d}{\frac{1}{2}\,a},$$

so entsteht

$$4\,d^2 + 3\,a^2 > 0.$$

Der Normaldruck D zur letzten Fuge $A\,B$ ist:

$$D = \frac{P}{sin\, \alpha}$$

$$D = d\,l\,\gamma\left(\frac{a}{cos\, \alpha} + \frac{1}{2}\,\frac{d}{sin\, \alpha}\right).$$

Fig. 197.

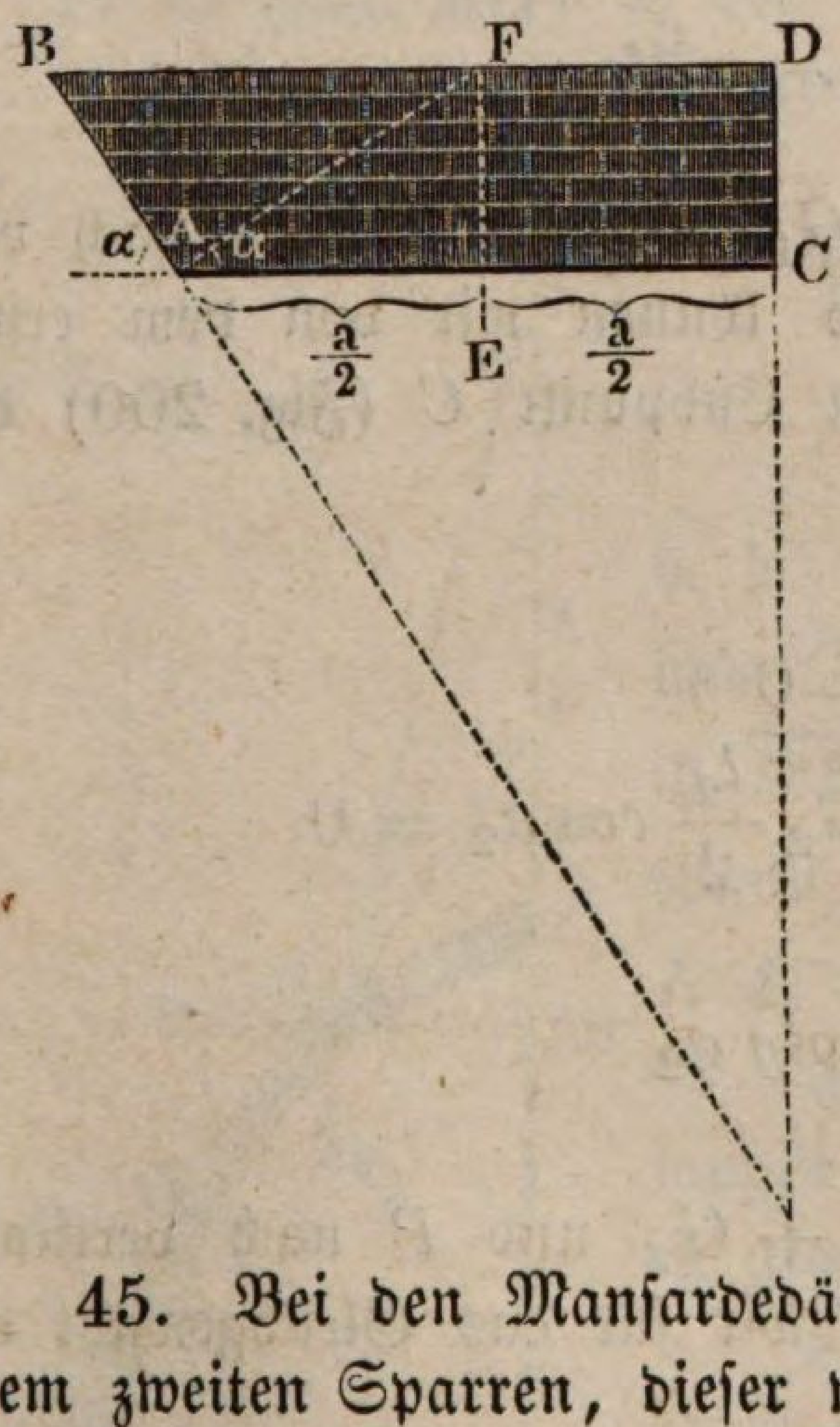
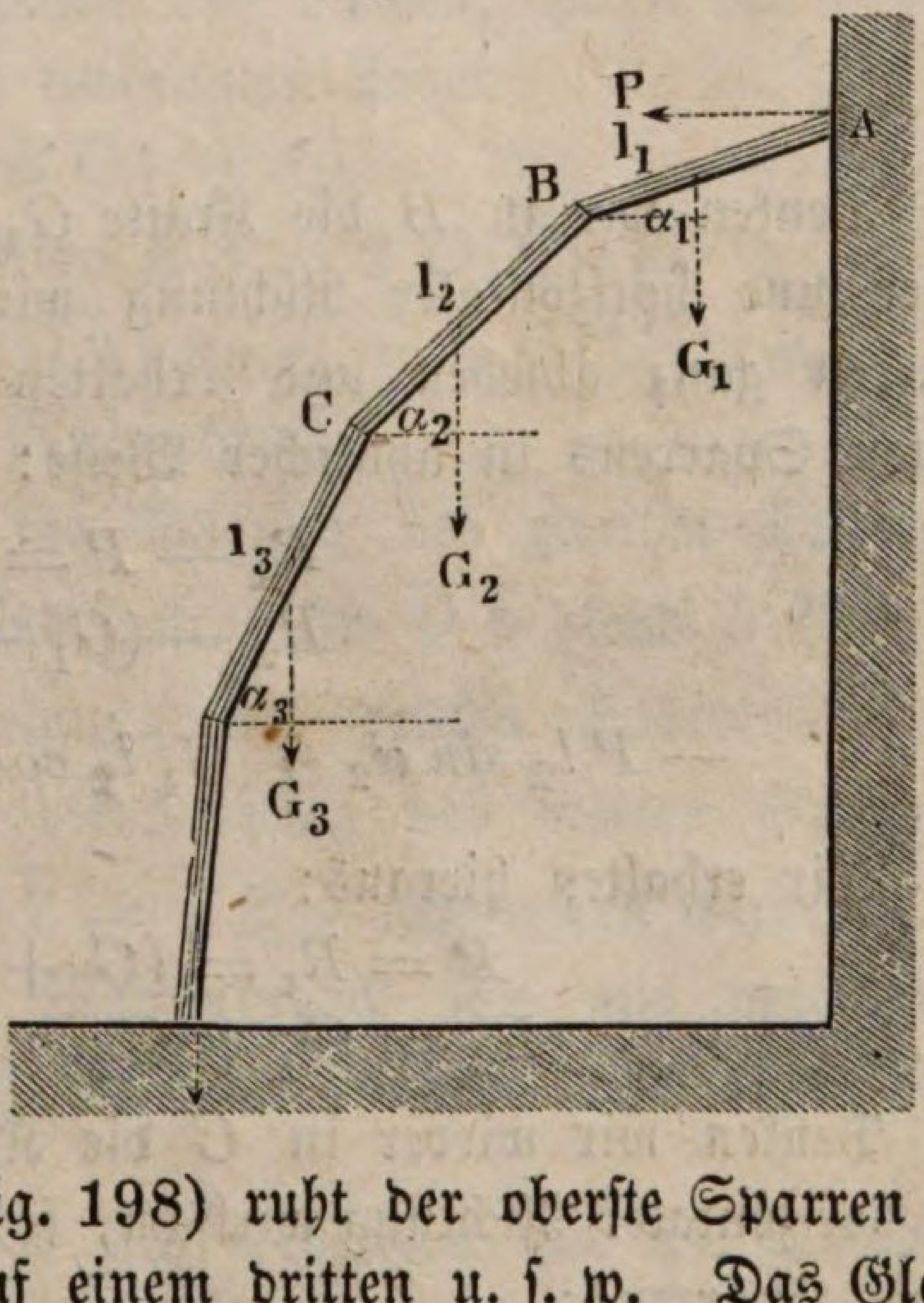


Fig. 198.



45. Bei den Mansardedächern (Fig. 198) ruht der oberste Sparren auf einem zweiten Sparren, dieser wieder auf einem dritten u. s. w. Das Gleichgewicht dieses Systemes von Sparren ist daher von der Lage der einzelnen Sparren zu einander abhängig. Die Figur stelle ein halbes Mansardedach vor, dessen zweite Hälfte wir durch eine horizontal wirkende Kraft P ersetzt denken. Ist eine zweite Hälfte nicht vorhanden, so ist P die Reaction der

verticalen Wand. Die Sparren vom höchsten an gerechnet bilden mit der Horizontalen die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ und haben die Gewichte $G_1, G_2, G_3 \ldots$ Es sei B (Fig. 199) der Endpunkt des ersten Sparrens, so ruft derselbe in B nach horizontaler und verticaler Richtung die Reactionen R_1 und R_2 hervor. Die Gleichgewichtsbedingungen für den ersten Sparren von der Länge l_1 sind:

$$R_1 - P = 0$$
$$R_2 - G_1 = 0$$
$$- P \, l_1 \, sin \, \alpha_1 + G_1 \frac{l_1}{2} \, cos \, \alpha_1 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$P = R_1 = \tfrac{1}{2} G_1 \, cotg \, \alpha_1$$
$$R_2 = G_1.$$

Fig. 199.

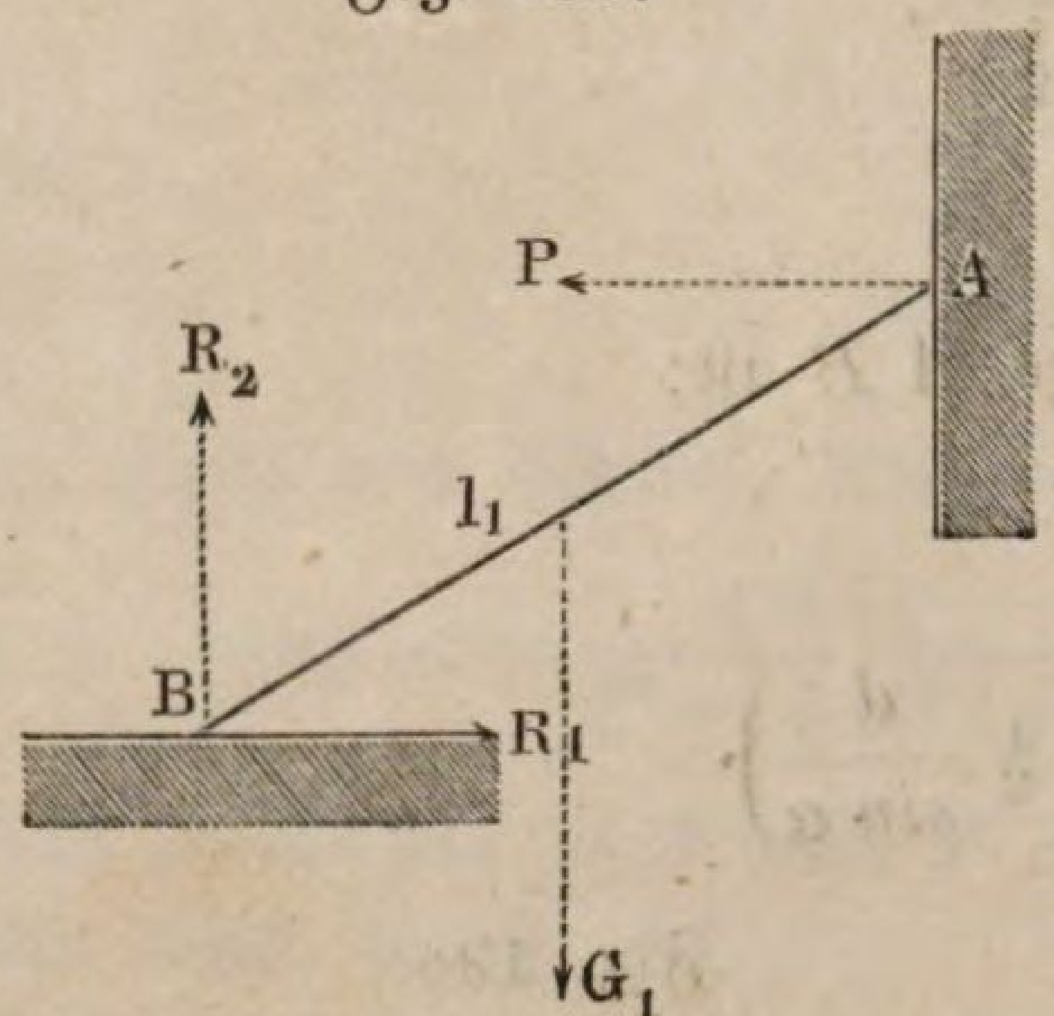
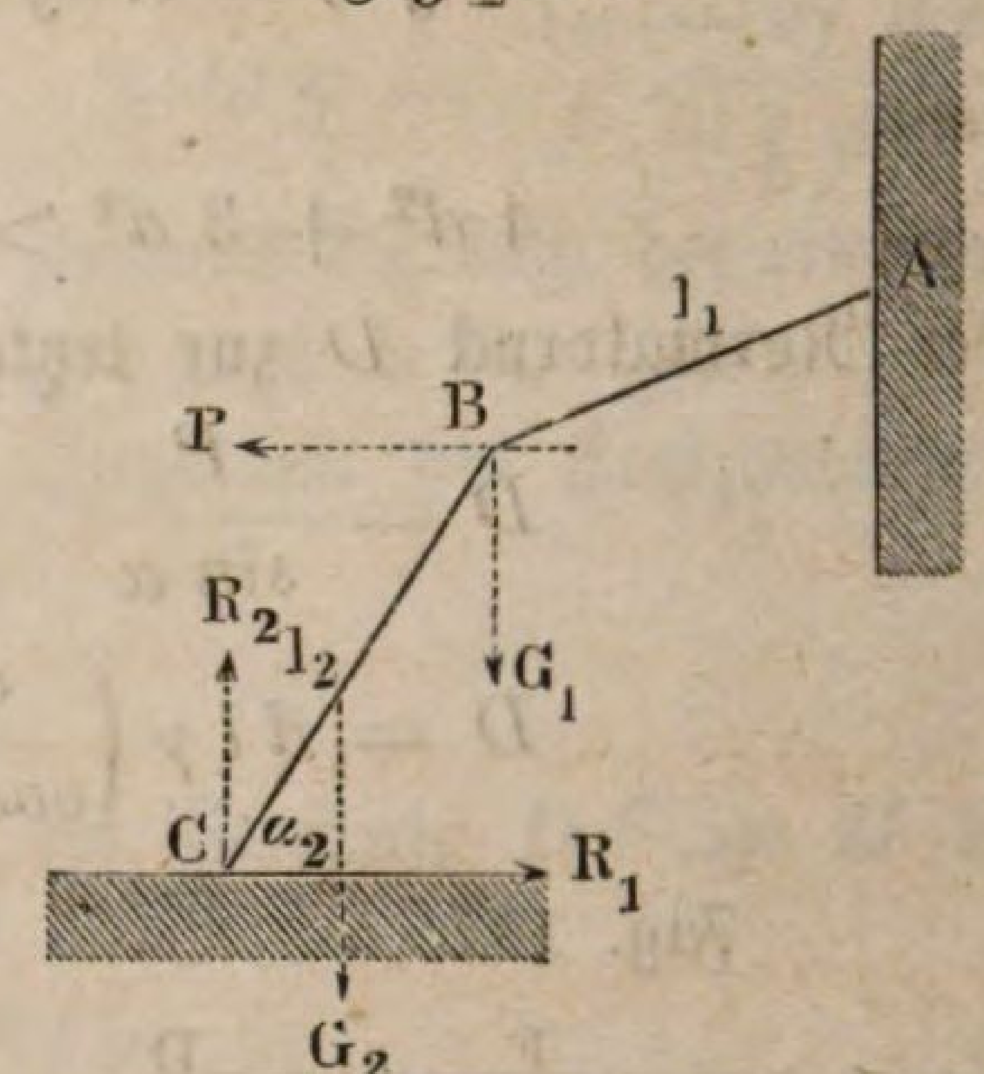


Fig. 200.



Denken wir in B die Kräfte G_1 und $\frac{1}{2} G_1 \, cotg \, \alpha_1$ (gleich P) nach verticaler und horizontaler Richtung wirksam, so können wir von dem ersten Sparren ganz absehen und erhalten für den Endpunkt C (Fig. 200) des zweiten Sparrens in ähnlicher Weise:

$$R_1 - P = 0$$
$$R_2 - (G_1 + G_2) = 0$$
$$- P \, l_2 \, sin \, \alpha_2 + G_1 \, l_2 \, cos \, \alpha_2 + G_2 \frac{l_2}{2} \, cos \, \alpha_2 = 0.$$

Wir erhalten hieraus:

$$P = R_1 = (G + \tfrac{1}{2} G_2) \, cotg \, \alpha_2$$
$$R_2 = G_1 + G_2.$$

Denken wir wieder in C die Kräfte $G_1 + G_2$ und P nach verticaler und horizontaler Richtung wirksam, so erhalten wir für das Gleichgewicht des dritten Sparrens:

$$P = (G_1 + G_2 + \tfrac{1}{2} G_3) \, cotg \, \alpha_3$$
$$R_2 = G_1 + G_2 + G_3.$$

Fahren wir in dieser Weise von Sparren zu Sparren fort, so ersieht sich, daß für das verlangte Gleichgewicht der Horizontalschub an den

Endpunkten der verschiedenen Sparren gleich groß sein muß, während die Differenz der Verticaldrucke für irgend zwei Punkte gleich der Summe der dazwischen liegenden Sparrengewichte ist. Es läßt sich hieraus schließen, daß die Sparren eines Mansardedaches in der Gleichgewichtslage ein umgekehrtes Seilpolygon bilden, dessen Knoten dem Zusammenstoß zweier Sparren entsprechen.

Zur Construction dieser Sparrenverbindung benutzen wir die Gleichungen für den constanten Horizontalschub:

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}\, G_1 \, cotg\, \alpha_1 \\ &= (G_1 + \tfrac{1}{2}\, G_2)\, cotg\, \alpha_2 \\ &= (G_1 + G_2 + \tfrac{1}{2}\, G_3)\, cotg\, \alpha_3 \\ &= (G_1 + G_2 + G_3 + \tfrac{1}{2}\, G_4)\, cotg\, \alpha_4 \end{aligned}$$

u. s. w.

Es ist gewöhnlich die Neigung des obersten Sparrens gegeben und die einzelnen Sparren haben gleiche Länge, also auch gleiches Gewicht G. Für diese Voraussetzungen erhalten wir:

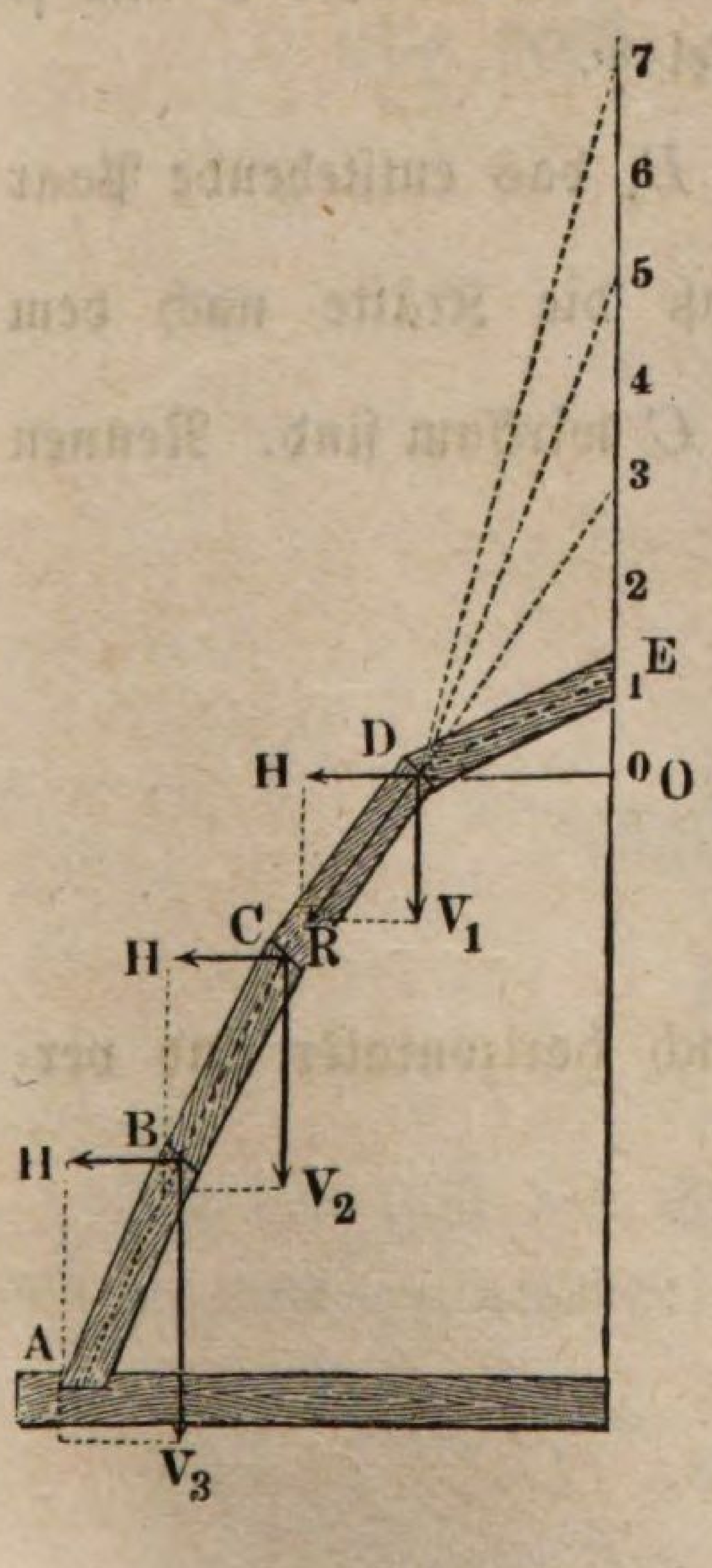
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\, G\, cotg\, \alpha_1 &= (G + \tfrac{1}{2}\, G)\, cotg\, \alpha_2 \\ cotg\, \alpha_1 &= 3\, cotg\, \alpha_2 \\ \tfrac{1}{2}\, G\, cotg\, \alpha_1 &= (G + G + \tfrac{1}{2}\, G)\, cotg\, \alpha_3 \\ cotg\, \alpha_1 &= 5\, cotg\, \alpha_3 \end{aligned}$$

u. s. w.,

d. h. die Cotangenten der Neigungswinkel der Sparren gegen den Horizont verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

Es sei (Fig. 201) E der höchste Punkt des Daches, ED der oberste Sparren in der verlangten Lage:

Fig. 201.



$$D\,O = E\,O\, cotg\, \alpha_1.$$

Es sei weiter $\overline{E\,3} = 2\, E\,O$ so ist

$$\begin{aligned} D\,O &= \overline{O\,3}\, cotg\, \alpha_2 = 3\, E\,O\, cotg\, \alpha_2 \\ &= E\,O\, cotg\, \alpha_1, \end{aligned}$$

d. h. $\overline{D\,3}$ ist die Neigung des zweiten Sparrens und C dessen Endpunkt. Ist $\overline{O\,5}$ gleich $5\,E\,O$, so ist $\overline{D\,5}$ die Neigung des dritten Sparrens $C\,B$, ebenso ist $\overline{D\,7}$ die Neigung des vierten Sparrens $B\,A$, wenn $\overline{O\,7} = 7\,E\,O$ genommen wird u. s. w.

46. Das Mansardedach soll aus zwei gleich langen Sparren construirt werden. Zu dem Ende ist gegeben:

a) die Tiefe des Gebäudes und die Dachhöhe gleich der halben Tiefe

$$\alpha_1 = 30^\circ$$
$$\alpha_2 = 60^\circ.$$

b) Die Tiefe des Gebäudes gleich $2\,a$ und die Höhe gleich h (Fig. 202 a. f. S.).

Die Coordinaten x und y des ersten Sparrenendes, wenn $2a$ und h als Coordinatenachsen genommen werden, sind:

$$x = \frac{1}{2a}\left(2a^2 + h^2 - \sqrt{a^4 + h^2(a^2 + h^2)}\right)$$

$$y = \frac{1}{2h}\left(a^2 + 2h^2 - \sqrt{a^4 + h^2(a^2 + h^2)}\right).$$

Fig. 202.

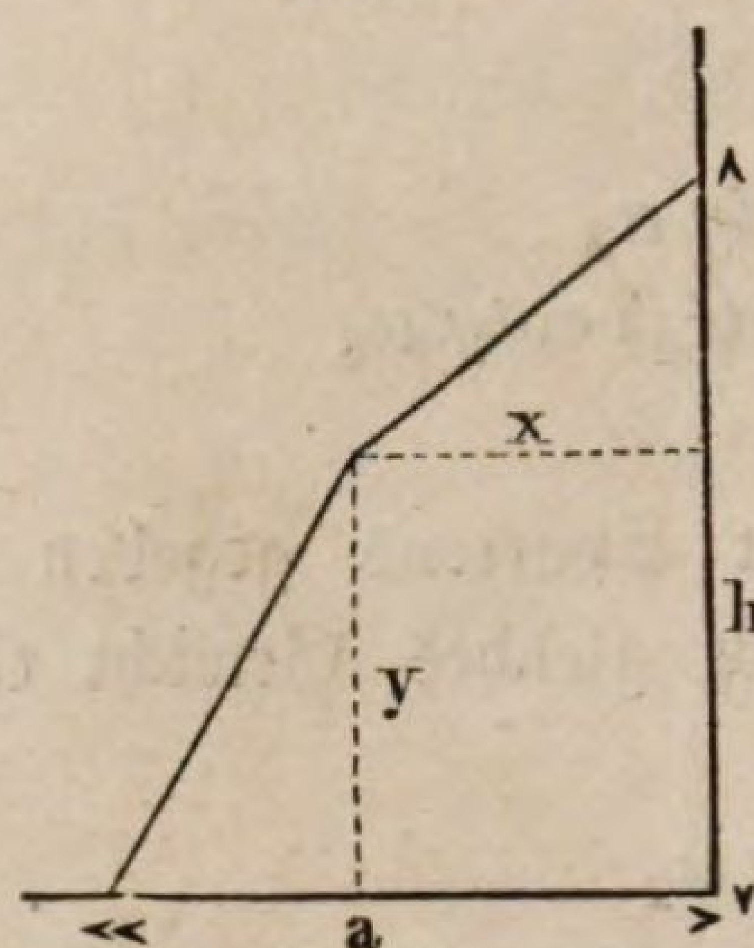
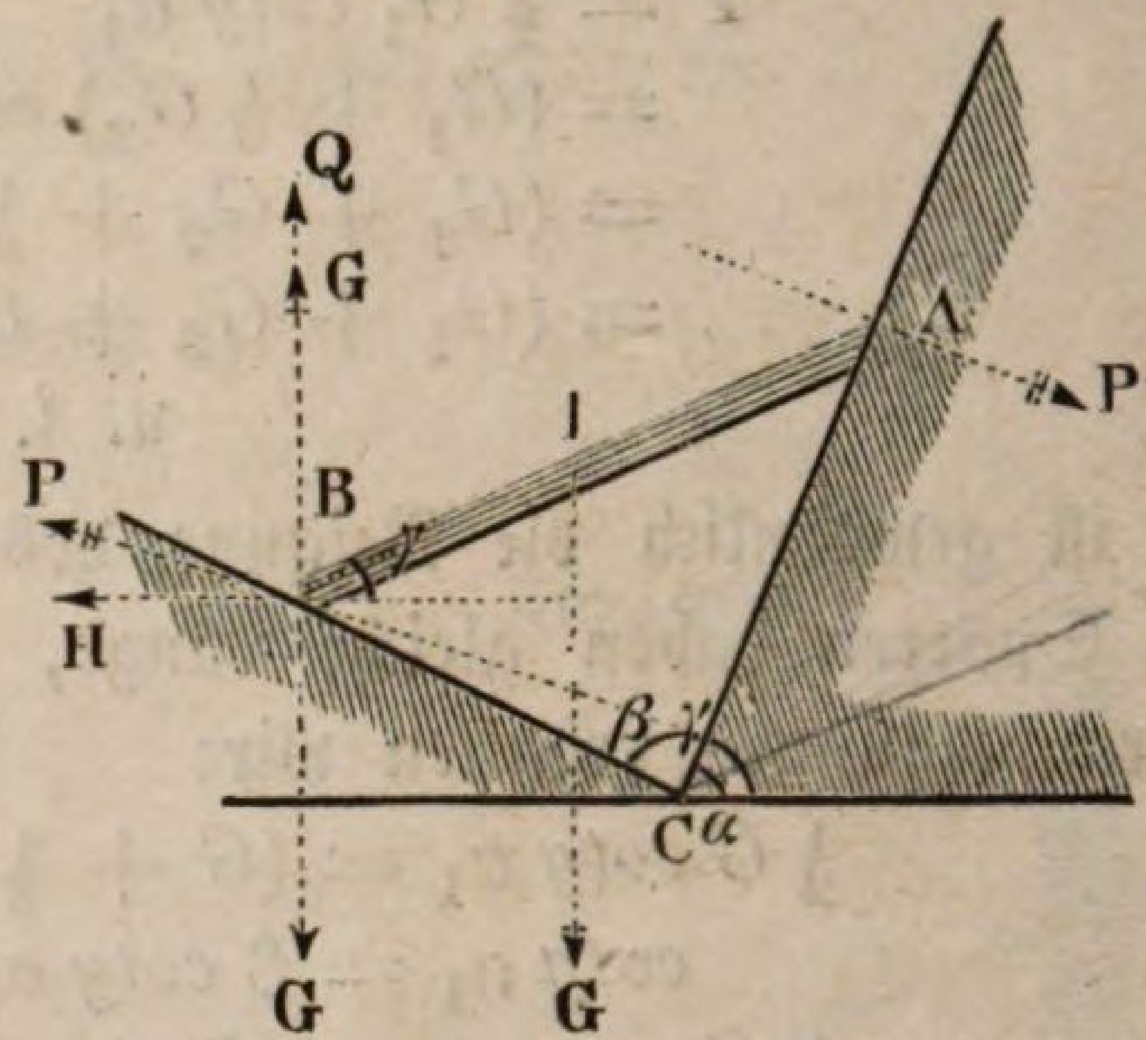


Fig. 203.



47. Ein Balken (Fig. 203) von der Länge l und dem Gewichte G ist mit seinen beiden Enden zwischen zwei geneigten Ebenen befestigt, dabei aber nicht in der Gleichgewichtslage, die in Nummer 14 der Uebungen des ersten Capitels bestimmt wurde. Es sind die Kräfte zu bestimmen, die den Balken in dieser Lage erhalten, oder, was dasselbe ist, die Wirkungen, die gegen die Befestigungspunkte ausgeübt werden.

Die geneigten Ebenen bilden mit der Horizontalen die Winkel α und β und der Balken bilde mit derselben Ebene den Winkel γ.

Wir verschieben G parallel seiner Richtung nach B, das entstehende Paar $G\frac{l}{2}\cos\gamma$ bringen wir auf eine solche Breite, daß die Kräfte nach dem Verschieben durch A und B gehen und normal zu AC wirksam sind. Nennen wir die Kraft P, so ist

$$G\frac{l}{2}\cos\gamma = Pl\cos(\alpha - \gamma),$$

d. h.:

$$1)\quad P = \tfrac{1}{2}\frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}G.$$

Die Kraft P in dem Punkte B zerlegen wir nach horizontaler und verticaler Richtung in die Componenten H und Q:

$$H = P\sin\alpha$$
$$Q = P\cos\alpha.$$

$$2)\quad H = \tfrac{1}{2}\frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}\cdot G.$$

Der lothrechte Druck V im Punkte B ist gleich $G - Q$.

$$3)\quad V = \left(1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)}\right) G.$$

Diese allgemeinen Formeln finden ihre Anwendung, wenn Balken untereinander in geneigter Lage verbunden werden.

48. Anwendung der letzten Formeln auf die nebengezeichneten Constructionen.

(Fig. 204) a. 1) $P = \frac{1}{2}\, G \cot g\, \gamma$,
2) $H = \frac{1}{2}\, G \cot g\, \gamma = P$,
3) $V = G$.

Fig. 204.

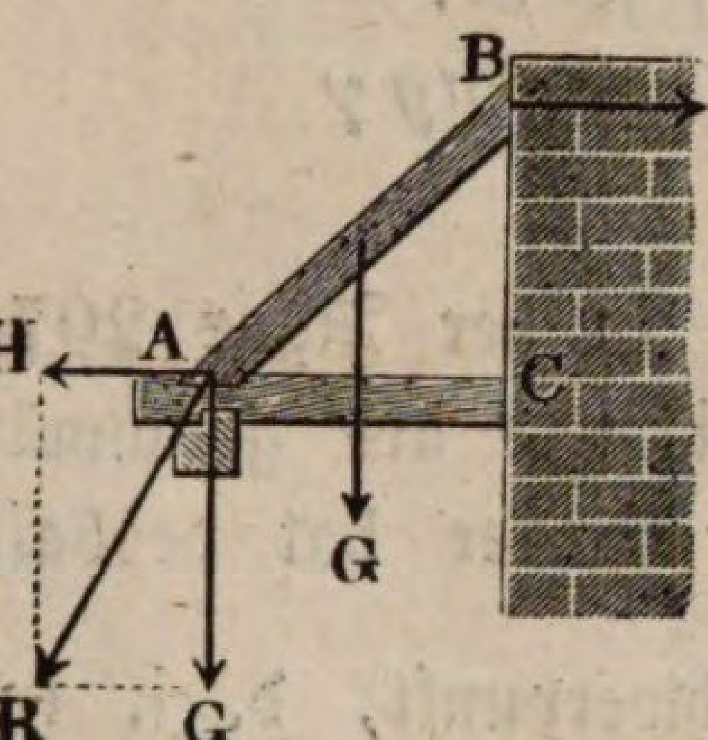
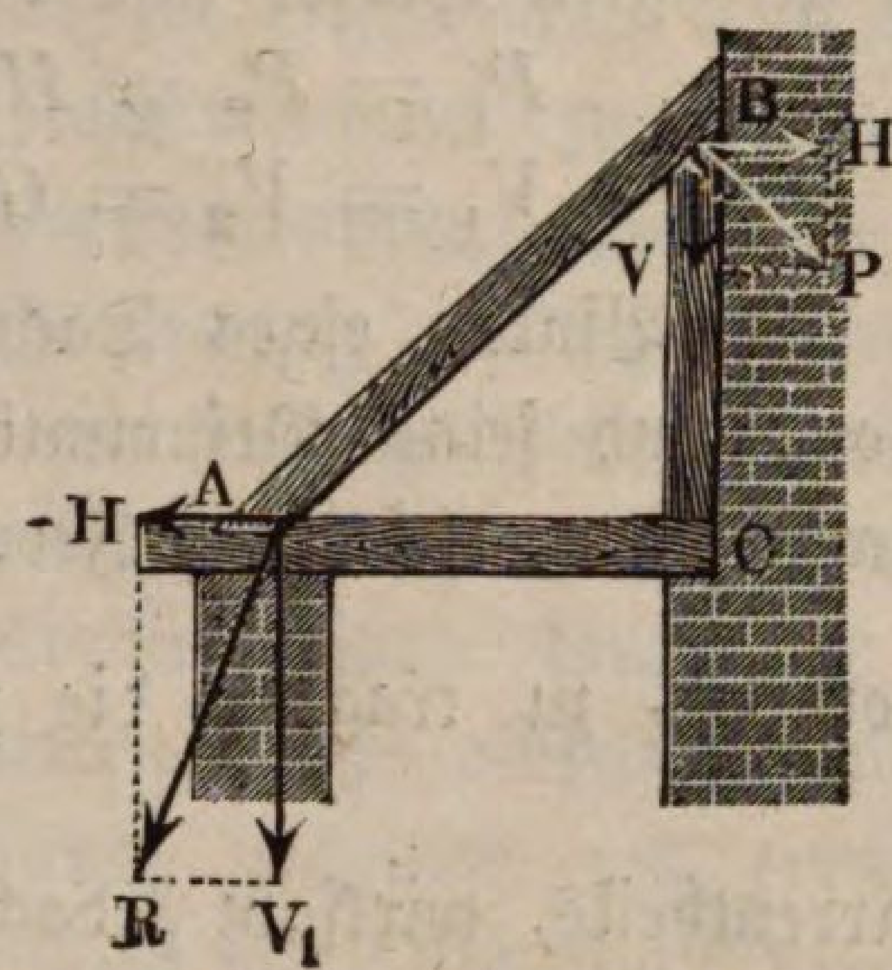


Fig. 205.

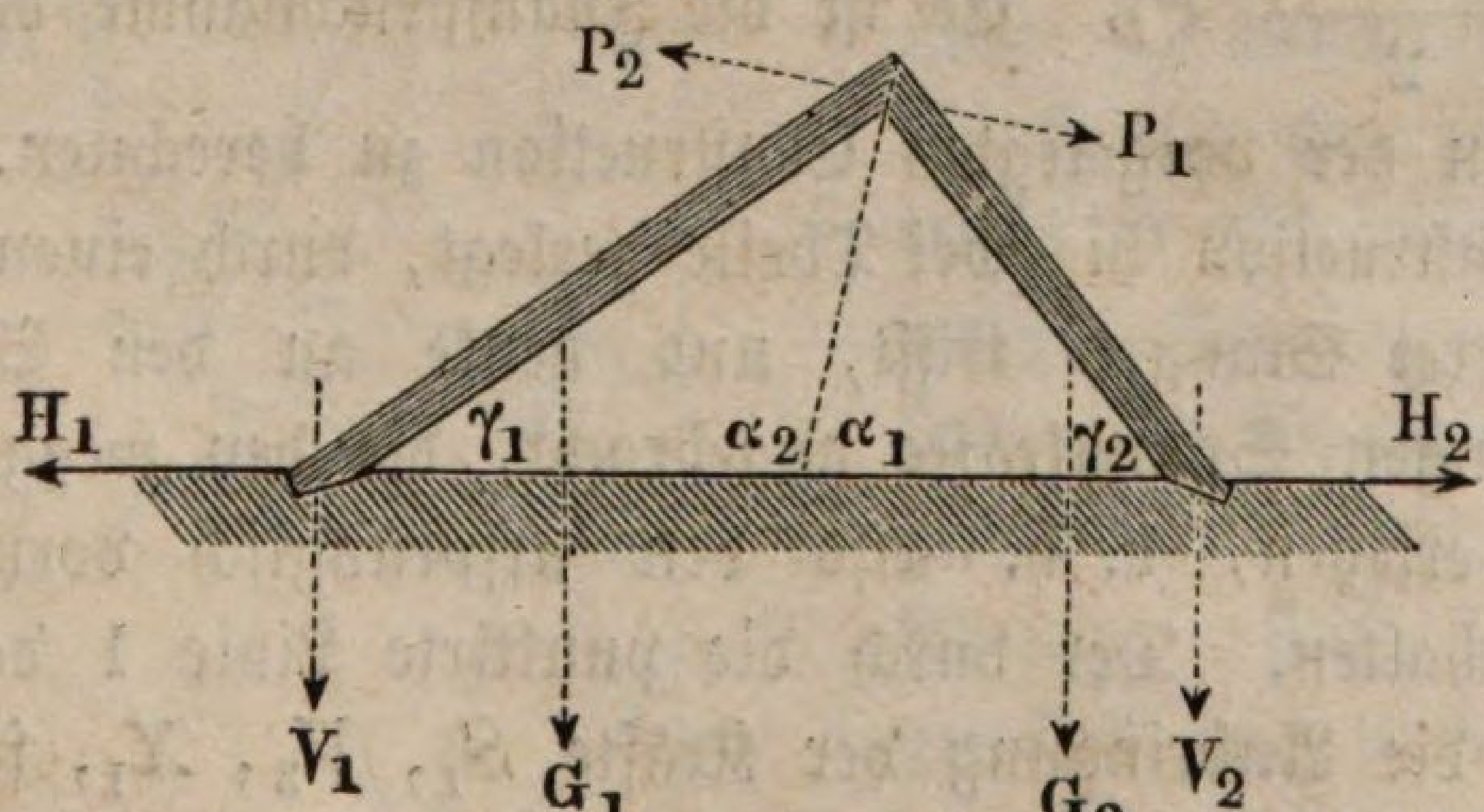


(Fig. 205) b. 1) $P = \frac{1}{2}\, G \cos\gamma$,
2) $H = \frac{1}{4}\, G \sin 2\gamma$,
3) $V_1 = \frac{1}{2}(1 + \sin\gamma^2)\, G$.

(Fig. 206) c. 1) $P_1 = \frac{1}{2}\, G_1\, \frac{\cos\gamma_1}{\cos(\alpha_1 - \gamma_1)}$

$$P_2 = \tfrac{1}{2}\, G_2 \cdot \frac{\cos\gamma_2}{\cos(\alpha_2 - \gamma_2)}.$$

Fig. 206.



Für den Fall des Gleichgewichtes muß $P_1 = P_2$ sein. Gewöhnlich ist dann γ_1 und γ_2 gegeben, während α_1 bestimmt werden muß:

$$\tan g\, \alpha_1 = \frac{G_1 + G_2}{G_1 \tan g\, \gamma_2 - G_2 \tan g\, \gamma_1}.$$

$$2)\ H_1 = \tfrac{1}{2} \frac{G_1 + G_2}{tang\,\gamma_1 + tang\,\gamma_2} = H_2,$$

$$3)\ V_1 = G_1 - \tfrac{1}{2} \frac{G_1\,tang\,\gamma_2 - G_2\,tang\,\gamma_1}{tang\,\gamma_1 + tang\,\gamma_2}$$

$$V_2 = G_2 + \tfrac{1}{2} \frac{G_1\,tang\,\gamma_2 + G_2\,tang\,\gamma_1}{tang\,\gamma_1 + tang\,\gamma_2}$$

$$V_1 + V_2 = G_1 + G_2$$

$$V_2 - V_1 = \frac{G_2\,tang\,\gamma_2 - G_1\,tang\,\gamma_1}{tang\,\gamma_1 + tang\,\gamma_2}.$$


Das Zeichen des letzten Ausdruckes läßt erkennen, welcher der beiden Drucke V_1 oder V_2 der größere ist. Ist in dem letzten Falle $\gamma_1 = \gamma_2$, haben die geneigten Hölzer also gleiche Länge, so ist:

$$P_1 = P_2 = H_1 = H_2 = \tfrac{1}{2}\,G\,cotg\,\gamma$$

und $$V_1 = V_2 = G.$$

49. Der Binder eines Daches habe die in der Figur 207 dargestellte Construction, und seine Gesammtbelastung, die wir als gleichmäßig darüber vertheilt annehmen, sei Q. Jedes der acht Felder hat deshalb eine Belastung von $\frac{Q}{8}$ zu tragen, die in dem Schwerpunkt, d. i. in der Mitte jedes Sparrentheils, wirksam gedacht werden muß und sich zu $\frac{Q}{16}$ auf jeden der beiden benachbarten Knotenpunkte vertheilt. Hieraus ergiebt sich die Belastung P eines jeden Knotenpunktes, mit Ausnahme der beiden Auflagerpunkte, zu $\frac{Q}{8}$, und die vertical aufwärts gerichteten Reactionen der Auflager betragen $\frac{7}{16}\,Q$ oder $\frac{7}{2}\,P$. (Sind bei jedem der beiden Sparren n Knotenpunkte vorhanden, so ist $P = \frac{Q}{2\,n}$ und die Reactionen der Auflager sind gleich $\frac{2\,n - 1}{4\,n}\,Q = \frac{2\,n - 1}{2}\,P$). Es ist die Inanspruchnahme der einzelnen Verbindungsstangen in der vorgelegten Construction zu berechnen. Zu dem Ende denke man die Construction in zwei Theile zerlegt, durch einen Schnitt, welcher womöglich nur drei Stangen trifft, und denke an den Schnittpunkten in Richtung der Stangen Spannkräfte angebracht, die den weggeschnittenen Theil der Construction ersetzen, d. h. also den ursprünglich vorhandenen Gleichgewichtszustand erhalten. Der durch die punktirte Linie 1 dargestellte Schnitt verlangt hiernach die Anbringung der Kräfte S_1, V_3, X_1, für deren Berechnung wir drei Gleichgewichtsbedingungen, zwei auf fortschreitende und eine auf drehende Bewegung haben. Hieraus müssen sich die drei unbekannten Kräfte berechnen lassen, wobei eine Elimination derselben nothwendig werden würde. Um diese letztere zu umgehen, vielmehr jede Gleichung nur mit einer der Unbekannten zu erhalten, benutze man die von Prof. Ritter in Hannover zu-

Fig. 207.



erst veröffentlichte Momentenmethode, d. h. man wende die dritte der drei Gleichgewichtsbedingungen, welche sich auf drehende Bewegung bezieht, allein an, und wähle dabei für jede der Spannkräfte den Momentenpunkt in der Weise, daß die Momente der beiden andern Kräfte gleich Null werden. Die beiden nicht zu berücksichtigenden Kräfte müssen sich also in dem gewählten Momentenpunkt schneiden. So ist bei dem Schnitt 1 für die Berechnung von S_1, A_3 als Momentenpunkt zu nehmen; A wird Momentenpunkt, wenn es sich um die Berechnung von V_3 handelt, und C_3 wird dazu gewählt, wenn man X_1 bestimmen will. Bei complicirteren Constructionen kann der Fall eintreten, daß einzelne Stangen nur durch Schnitte zu erreichen sind, welche mehr als drei Stangen treffen. Auch in diesen Fällen läßt sich die angegebene Methode benutzen, a) wenn es gelingt, den Schnitt der gradlinig oder krummlinig geführt werden kann, so zu legen, daß sämmtliche geschnittene Stangen sich bis auf die zu berechnende in einem Punkte schneiden, der dann natürlich zum Momentenpunkte gewählt werden muß; b) wenn die nicht durch diesen Punkt gehenden und vom Schnitt getroffenen Stangen schon durch eine frühere Berechnung gefunden worden sind, ihre Spannungen also als bekannt in Rechnung gebracht werden können. Die Berechnungsmethode gewährt auch noch den Vortheil, daß man die Kräfte nicht erst nach Richtung der Achsen eines beliebig anzunehmenden Coordinatensystems zu zerlegen nothwendig hat. Die sich bei dieser Berechnung ergebenden

Resultate können mit einem positiven oder negativen Zeichen behaftet sein, und hat dies die Bedeutung, daß positiven Werthen wirkliche **Zugkräfte** oder **Spannungen**, negativen Werthen dagegen **Druckkräfte** oder Pressungen entsprechen. In der Figur sind die Spannweite mit AB, die Knotenpunkte der Sparren AC und BC mit C_1, C_2, C_3 bezeichnet. Die Sparren bilden mit der Horizontalen AB den Winkel α, die Zugstangen AA_3 und BA_3 bilden mit derselben Linie den Winkel β. Die auf der linken Seite der Figur eingeschriebenen Buchstaben S, X, Y, V bezeichnen die in den betreffenden Stangen vorhandenen Anstrengungen, wobei die auf Druck in Anspruch genommenen Stangen in Doppellinien dargestellt sind. Die zur Berechnung dieser Kräfte geführten Schnitte sind durch punktirte Linien mit daneben angebrachten Zahlen bezeichnet, welche die Reihenfolge der zu führenden Schnitte angeben. Die rechte Seite der Figur ist zur graphischen Darstellung der Kräfte S, X, Y und V benutzt, worüber weiter unten das Nothwendige folgen wird.

Zur Berechnung von S_1, X_1 und V_3 führen wir den Schnitt 1, nehmen, wie schon oben angegeben, der Reihe nach A_3, C_3 und A als Momentenpunkt an und erhalten:

$$S_1 . AC \frac{\cos\alpha . \sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} + \tfrac{7}{2} P . AC \cos\alpha - P . AC \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\right) \cos\alpha = 0$$

$$-X_1 . \tfrac{3}{4} AC \sin(\alpha-\beta) + \tfrac{7}{2} P . \tfrac{3}{4} AC \cos\alpha - P . AC \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\right) \cos\alpha = 0$$

$$V_3 . \tfrac{3}{4} AC \sin AC_3A_3 + P . AC \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}\right) \cos\alpha = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$S_1 = -2P \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = -\frac{Q}{4} \frac{\cos\beta}{(\sin\alpha-\beta)}$$

$$X_1 = \tfrac{5}{2} P \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = Q\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}\right) \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$V_3 = -2P \frac{\cos\alpha}{\sin AC_3A_3} = -\frac{Q}{4} \frac{\cos\alpha}{\sin AC_3A_3}.$$

In gleicher Weise erhält man bei den Schnitten 2, 3, 4:

$$S_2 = -Q\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}\right) \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$X_2 = Q\left(\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{16}\right) \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$V_2 = -\tfrac{3}{4}\cdot\frac{Q}{4} \frac{\cos\alpha}{\sin AC_2A_2}$$

$$S_3 = -Q\left(\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{1}{16}\right) \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$X_3 = Q\left(\tfrac{1}{4}+3\cdot\tfrac{1}{16}\right) \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$V_1 = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{Q}{4} \frac{\cos\alpha}{\sin AC_1A_1}$$

$$S_4 = -Q\left(\tfrac{1}{4}+3\cdot\tfrac{1}{16}\right) \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Durch Schnitt 5 und 6 für A, als Momentenpunkt, ergiebt sich:

$$Y_1 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{Q}{4}; \quad Y_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{Q}{4}.$$

Der krummlinig geführte Schnitt 7 giebt schließlich, A ebenfalls als Momentenpunkt benutzend und den bereits gefundenen Werth S_1, der in CB wirksam zu denken ist, dabei in Rechnung gebracht:

$$(Y + P)\, A\, C \cos\alpha - 2\, P \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\, A\, C \sin 2\,\alpha = 0$$

$$Y = 4\,P \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} - P = 2\left(\frac{Q}{4}\,\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha-\beta} - \frac{Q}{16}\right)$$

$$Y = 2\left(\tfrac{3}{4}\,\frac{Q}{4}\,\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} + \tfrac{1}{4}\,\frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\right).$$

Zur graphischen Darstellung der im Vorstehenden durch Rechnung bestimmten Kräfte, ziehe man CD_0 parallel mit AB, BD_0 normal zu AB; CD, $C_3 D_3$, $C_2 D_2$ werden mit BA_3 parallel gezogen, und C_1 mit $D_2 D_3$, D verbunden, welche Verbindungslinien wieder mit $B_1 C_1$, $B_2 C_2$, $A_3 C_3$ parallel laufen; endlich ziehe man $C_1 E$ mit BD parallel. Für diese Constructionen ergiebt sich:

$$BC = BD \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}; \quad CD = BD \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}; \quad C_1 D = BD \frac{\cos\alpha}{\sin D\, C_1\, B}$$

$$BD_0 = BD \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}; \quad D\,D_0 = BD \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken das Maß von BD gleich dem Maß von $\frac{Q}{4}$, so sind, für die in der Figur dargestellte Dachconstruction, die in den einzelnen Stangen auftretenden Kräfte durch folgende Linien repräsentirt:
$S_1 = BC$; $S_2 = BC + 1 . BC_1$; $S_3 = BC + 2 . BC_1$; $S_4 = BC + 3 . BC_1$; allgemein bei n Knotenpunkten $S_n = BC + (n-1) . BC_1$
$X_1 = CD + 1 . DE$; $X_2 = CD + 2 . DE$; $X_3 = CD + 3 . DE$ und allgemein $X_{n-1} = CD + (n-1) . DE$.
$V_1 = C_1 D_2$; $V_2 = C_1 D_3$; $V_3 = C_1 D$ und allgemein $V_{n-1} = C_1 D_n$;
$Y_1 = C_1 E_1$; $Y_2 = C_1 E_2$ und allgemein $Y_{n-2} = C_1 E_{n-2}$.

Die Anstrengung der mittleren Zugstange:

$$Y = 2\,(C_1 E + D D_0).$$

Denkt man die vorstehende Construction in der Weise verändert, daß die Zugstangen AA_3 und BA_3 eine horizontale Lage annehmen, daß also der Punkt A_3 in die Linie AB rückt, so ist in den obigen Rechnungsresultaten $\beta = 0$ zu setzen. Die graphische Darstellung behält dabei ihre Gültigkeit, es fällt D in D_0, und dadurch wird DD_0 selbst zu Null. Demnach verändert sich in den obigen Resultaten nur Y, die Anstrengung der mittleren Zugstange, welche gleich $2\,C_1 E$ wird.

50. Dieselben Rechnungen sind für die, in der Figur 208 (a. S. 211) dargestellten Constructionen durchzuführen, bei Benutzung der in der Figur angegebenen Bezeichnungen und geführten Schnitte 1 bis 8.

$$S_1 = -Q\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}) + Q\sin\alpha\,(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}),$$

$$X_1 = \frac{Q}{4}\,\frac{2\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\sin(2\alpha-\beta)},$$

$$T_1 = Q\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}) + \frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\sin(2\alpha-\beta)},$$

$$V_1 = -\frac{Q}{8}\cos\alpha;\quad U_1 = \frac{Q}{16}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$S_2 = -Q\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}) + \frac{Q}{4}\sin\alpha,$$

$$T_2 = \frac{Q}{8}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} + \frac{Q}{4}\,\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\sin(2\alpha-\beta)},$$

$$S_3 = -Q\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}) + \frac{Q}{8}\sin\alpha,$$

$$X_2 = Q\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8});\quad U_2 = \frac{Q}{16}\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$S_4 = -Q\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}),$$

$$X_3 = Q\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}),$$

$$V_2 = -\frac{Q}{4}\cos\alpha;\quad V_3 = -\frac{Q}{8}\cos\alpha.$$

Es sei BD normal zu AB; CD, C_2D_2 und C_1D_1 werden mit BB_2 parallel gezogen, ebenso CD_0 parallel mit AB, und DD_0 parallel mit CB_2; endlich seien DE und D_2E_2 normal zu BC, dann ist das Maß von BD gleich dem Maß von $\frac{Q}{4}$ gesetzt:

$$S_1 = BC + BC_2 + BC_1 - BE - BE_2 = 7\,BC_1 - 3\,BE_2,$$
$$S_2 = BC + BC_2 + BC_1 - BE = 7\,BC_1 - 2\,BE_2,$$
$$S_3 = BC + BC_2 + BC_1 - BE_2 = 7\,BC_1 - 1\,BE_2,$$
$$S_4 = BC + BC_2 + BC_1 = 7\,BC_1,$$
$$X_1 = CD_0;\ X_2 = CD + C_2D_2 = 6C_1D_1;\ X_3 = CD + C_2D_2 + C_1D_1 = 7C_1D_1,$$
$$T_1 = C_2D_2 + C_1D_1 + DD_0 = 3C_1D_1 + DD_0;\ T_2 = C_2D_2 + DD_0 = 2C_1D_1 + DD_0,$$
$$U_1 = U_2 = C_1D_1;\ V_1 = V_3 = D_2E_2;\ V_2 = DE.$$

Rücken die Punkte A_2 und B_2 in die Horizontale AB, so fällt D_0 mit D zusammen, deshalb ist DD_0 gleich Null und

$$T_1 = C_2D_2 + C_1D_1 = 3\,C_1D_1;\ T_2 = C_2D_2 = 2\,C_1D_1.$$

51. In der Figur 209 ist eine dritte Construction eines derartigen Dachbinders gegeben. Es sei BD normal zu AB; CD, C_3D_3, C_2D_2, C_1D_1 werden mit BB_3 parallel gezogen; ferner sei CD_0 mit AB, und DD_0 mit CB_3 parallel. Zieht man noch C_1E parallel mit BD, verbindet E, E_3, E_2 mit B, welche Linien den Stangenrichtungen B_3C, B_2C_3, B_1C_2




P = Q/8
P
P
P
7/2 P
C
C₃
C₂
C₁
A
A₁ β
A₂
B
B₁
B₂
D₀
D₀
D₁
D₂
E₁
E₂
S₁
S₂
S₃
S₄
T₁
T₂
U₁
U₂
V₁
V₂
V₃
X₁
X₂
X₃
1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 209.


P = Q/8
P
P
P
7/2 P
C
C₁
C₂
C₃
A
A₁
A₂
A₃
B
B₁
B₂
B₃
D
D₀
D 1
D 2
D 3
E
E₂
E₃
S₁
S₂
S₃
S₄
V₁
V₂
V₃
X₁
X₂
X₃
X₄
Y₁
Y₂
Y₃
1
2
3
4
5
6
7

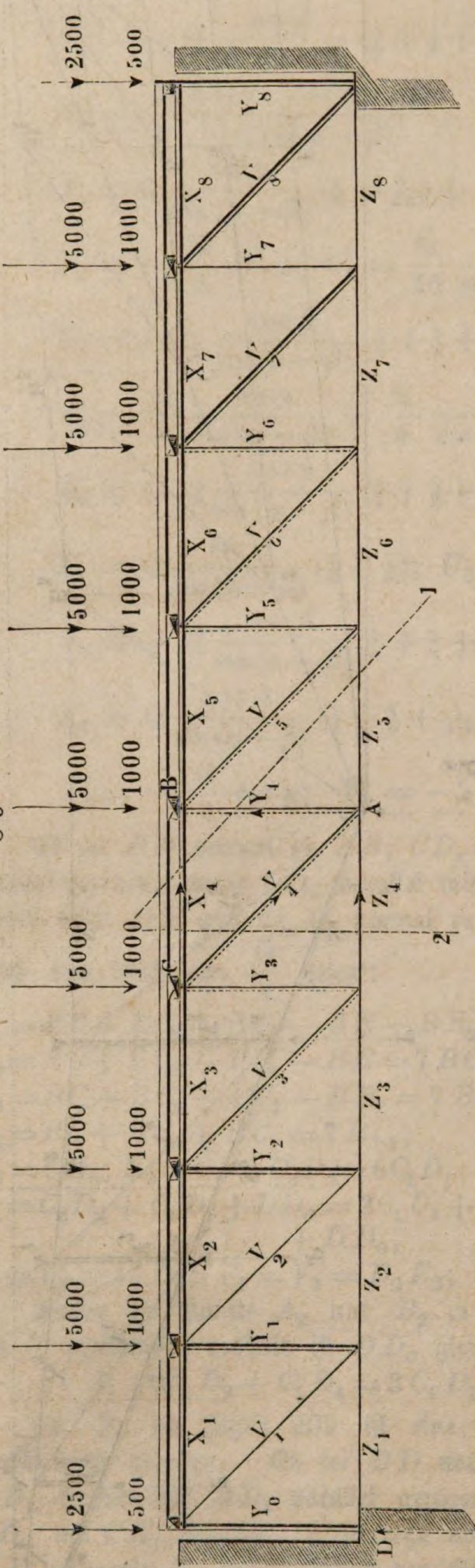


Fig. 210.

parallel laufen, und setzt man das Maß von BD gleich dem Maß von $\frac{Q}{4}$, so ist:

$$S_1 = BC + BC_1;\; S_2 = BC + 2BC_1;$$
$$S_3 = S_4 = BC + 3BC_1;$$
$$V_1 = BE_2;\; V_2 = BE_3;\; V_3 = BE + DD_0;$$
$$X_1 = CD_0;\; X_2 = CD + DE;$$
$$X_3 = CD + 2DE;$$
$$X_4 = CD + 3DE;$$
$$Y_1 = 2C_1E_2;\; Y_2 = 3C_1E_2;$$
$$Y_3 = 4C_1E_2.$$

Rücken die Punkte A_3 und B_3 in die Horizontale AB, so fällt D_0 mit D zusammen, DD_0 wird also Null und V_3 wird gleich BE.

52. Zwei Fachwerkträger aus quadratischen Feldern mit einfachem diagonalem System bestehend, von denen der eine in Fig. 210 dargestellt ist, tragen die Bahn einer Brücke. Die Belastung besteht hier aus einer constanten, dem Gewicht der Construction entsprechenden, und aus einer veränderlichen Last, von einem Bahnzug, Menschengedränge 2c. herrührend. Die constante Last betrage 1000 Kilogramm und die veränderliche 5000 Kilogramm auf jeden Meter Länge. Diese ist auf die beiden Fachwerksträger gleichmäßig vertheilt anzunehmen, sodaß also auf jeden derselben $\frac{1000}{2}$ und $\frac{5000}{2}$ Kilogramm pro Meter Länge in Rechnung zu bringen sind. Beträgt die Breite eines Feldes in jedem der beiden Träger 2^m, so hat also jedes Feld 1000 Kilogramm constante und 5000 Kilogramm veränderliche Belastung auszuhalten, woraus für jeden der Knotenpunkte

eine Belastung von $\frac{1000}{2}$ und $\frac{5000}{2}$ Kilogramm resultirt. Dies ist die wirkliche Maximalbelastung der beiden Endpunkte des Trägers, während die übrigen Knotenpunkte im Maximo eine Belastung von 1000 und 5000 Kilogramm zu tragen haben.

Der Druck D auf die Auflagerpunkte bestimmt sich, wenn acht Felder vorhanden sind, bei voller Belastung durch die Gleichung:

$$D.16-(1000+5000).(2+4+6+8+10+12+14+\tfrac{1}{2}.16)=0$$
$$D=24000^k.$$

Die Berechnung der Spannungen und Pressungen in den einzelnen Stangen geschieht auf die in den letzten Aufgaben angegebene Weise. Für den in der Figur gezeichneten Schnitt 1, sind die Kräfte X_4, Y_4, Z_5 anzubringen. Bei der Berechnung von X_4 dient A als Momentenpunkt:

$$X_4.2+D.8-1000(2+4+6+4)-5000(2+4+6+4)=0.$$

Für den Druck D führen wir nicht den berechneten Werth 24000^k, sondern die beiden Werthe ein, welche die Einwirkung der constanten und veränderlichen Belastung erkennen lassen.

$$X_4 . 2 + 1000 . 4 . 8 - 1000 . 16 + 5000 (\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8}) \cdot 8$$
$$+ 5000 (\tfrac{5}{8} . 8-2) + 5000 (\tfrac{6}{8} . 8-4) + 5000 (\tfrac{7}{8} . 8-6)$$
$$+ 5000 (\tfrac{4}{8} . 8-4) = 0.$$

Die mit der veränderlichen Last von 5000 Kilogramm behafteten Summanden sind sämmtlich positiv, wirken demnach auf die Vergrößerung von X_4 in absoluter Hinsicht, weshalb bei voller Belastung, X_4 seinen Maximalwerth erhält, der wegen des negativen Zeichens von X_4 eine Pressung repräsentirt:

$$Max\, X_4 = - 48000^k.$$

Bei der Berechnung von Z_5 benutzen wir B als Momentenpunkt:

$$Z_5 . 2 - D . 8 + 1000 (2 + 4 + 6 + 4) + 5000 (2 + 4 + 6 + 4) = 0$$
$$Z_5 . 2 = 1000.4.8-1000.16+5000 (\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}) \cdot 8+5000(\tfrac{5}{8}.8-2)$$
$$+ 5000 (\tfrac{6}{8} . 8-4) + 5000 (\tfrac{7}{8} \cdot 8-6) + 5000 (\tfrac{4}{8} . 8-4).$$

Auch hier wirken sämmtliche mit 5000 behaftete Summanden auf die Vergrößerung von Z_5, das mit einem positiven Zeichen behaftet ist, also eine Spannung bedeutet, so daß wir für die vollständige Belastung den Maximalwerth von Z_5 erhalten:

$$Max\, Z_5 = 48000^k.$$

Zur Berechnung von Y_4 soll man den Durchschnittspunkt der beiden Kräfte X_4 und Z_5 als Momentenpunkt wählen. Derselbe liegt, da die Kräfte parallel laufen, in der Unendlichkeit, sodaß wir einen unendlich großen (∞) Hebelsarm einzuführen haben.

$$Y_4 . \infty + D \infty - (1000 + 5000) \infty - (1000 + 5000) \infty$$
$$- (1000 + 5000) \infty - (500 + 2500) \infty = 0.$$

Heben wir den gemeinschaftlichen Factor ∞ fort, so erhalten wir die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null, eine richtige Gleichgewichtsbedingung, wodurch das Wegheben von ∞ gerechtfertigt ist:

$$Y_4 = -1000.4 + 1000\,(1+1+1+\tfrac{1}{2}) - 5000(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8})$$
$$+ 5000(1-\tfrac{5}{8}) + 5000(1-\tfrac{6}{8}) + 5000(1-\tfrac{7}{8}) + 5000(\tfrac{1}{2}-\tfrac{4}{8})$$
$$Y_4 = -500 - 5000\,.\,\tfrac{5}{4} + 5000\,.\,\tfrac{3}{4}.$$

Bei Benutzung beider Summanden, die mit der veränderlichen Last von 5000^k behaftet sind, ergiebt sich $Y_4 = -3000$. Benutzt man dagegen nur den negativen Summand, d. h. nimmt man eine veränderliche Last nur auf der rechten Seite von AB an, so erhält Y_4 seinen größten negativen Werth, die Pressung in der verticalen Stange ist dann also am größten.

$$Max\ Y_4 = -6750^k.$$

Wird dagegen nur der positive Summand von 5000 in Rechnung gebracht, so ist dadurch vorausgesetzt, daß die veränderliche Last sich nur auf der linken Seite von AB befindet, und wir erfahren dann, daß Y_4 einen positiven Werth annimmt, die verticale Stange also eine Maximal-Spannung auszuhalten hat.

$$Max\ Y_4 = +3250^k.$$

Lassen wir hiernach die Last von rechts nach links über die Brücke bewegen, so wird die verticale Stange AB zuerst einen Druck auszuhalten haben, und nachdem die Last diese Stelle passirt, wird diese Pressung plötzlich in einen Zug, in eine Spannung umgewandelt.

Der in der Figur angegebene Schnitt 2, verlangt die Einführung der Kräfte X_4, V_4, Z_4. Zur Berechnung von V_4 muß der Momentenpunkt wieder in der Unendlichkeit angenommen werden und wir erhalten dann:

$$V_4\,.\,\infty\ sin\,45 - D\,.\,\infty + (1000+5000)\,.\,\infty + (1000+5000)\,.\,\infty$$
$$+ (1000+5000)\,.\,\infty + (500+2500)\,.\,\infty = 0$$
$$V_4\,.\,sin\,45 = 500 + 5000\,.\,\tfrac{5}{4} - 5000\,.\,\tfrac{3}{4}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist der entgegengesetzte Werth des oben für Y_4 gefundenen Ausdrucks, sodaß sich V_4 aus Y_4 ergiebt, wenn man den letzteren Werth durch $-sin\,45$ dividirt. Die beiden Maximalwerthe von V_4 sind daher:

Spannung $Max\ V_4 = +9550^k$ circa
Pressung $Max\ V_4 = -4600^k$ circa.

Die schräge Stange AC erfährt hiernach bei der Bewegung der Last von rechts nach links zuerst eine Spannung, die sich, sobald die Last den Punkt B passirt, in eine Pressung verwandelt.

Durch ähnliche Rechnungen ergeben sich die übrigen in der Figur angegebenen Kräfte.

$$X_1 = X_7 = -21000;\quad X_2 = X_6 = -36000;\quad X_3 = X_5 = -45000;$$
$$X_4 = -48000;\quad X_8 = 0;$$
$$Z_1 = 0;\quad Z_2 = Z_8 = +21000;\quad Z_3 = Z_7 = +36000;\quad Z_4 = Z_6 = +45000;$$
$$Z_5 = +48000;$$
$$Y_0 = -24000;\quad Y_1 = -21000;\quad Y_2 = -15625;\quad Y_3 = \begin{Bmatrix} -10875 \\ +375 \end{Bmatrix};$$
$$Y_4 = \begin{Bmatrix} -6750 \\ +3250 \end{Bmatrix};\quad Y_5 = \begin{Bmatrix} +6750 \\ -3250 \end{Bmatrix};\quad Y_6 = \begin{Bmatrix} +10875 \\ -375 \end{Bmatrix};\quad Y_7 = +15625;$$
$$Y_8 = -3000;\quad V_1 = +29700;\quad V_2 = +22100;\quad V_3 = \begin{Bmatrix} +15400 \\ -530 \end{Bmatrix};$$
$$V_4 = \begin{Bmatrix} +9550 \\ -4600 \end{Bmatrix};\quad V_5 = \begin{Bmatrix} -9550 \\ +4600 \end{Bmatrix};\quad V_6 = \begin{Bmatrix} -15400 \\ +530 \end{Bmatrix};\quad V_7 = -22100;$$
$$V_8 = -29700.\ *)$$

---

*) Zum weiteren Studium dieses Gegenstandes ist zu empfehlen: Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen von August Ritter, Dr. phil., Professor an der polytechnischen Schule zu Aachen.

Drittes Capitel.

Von der Reibung und Steifigkeit.

45 Bei den bisherigen Untersuchungen sind die in Betracht gezogenen Körper als absolut fest und mit einer vollkommen glatten Oberfläche angenommen worden. Beide Voraussetzungen treffen bei den in der Natur vorkommenden Körpern nicht zu, sodaß die entwickelten Gleichgewichtsbedingungen nach dieser Richtung hin, einer gewissen Correctur bedürfen. Neben diesen Körpern haben wir noch solche zugelassen, bei denen nur je zwei benachbarte Punkte durch feste, starre Linien verbunden gedacht wurden, die aber außerdem eine vollkommene Biegsamkeit zeigten. Diese den Fäden, Seilen, Ketten 2c. zugesprochene Eigenschaft findet in der Natur ebenso wenig vollkommene Geltung, und es ist deshalb auch dieser Umstand bei den natürlichen Körpern näher ins Auge zu fassen. Die Voraussetzung der vollkommenen Festigkeit der Körper, bei den biegsamen also die der unveränderlichen Länge, halten wir vorläufig noch aufrecht und ziehen in diesem Capitel allein die Rauhigkeit der Oberflächen, sowie die unvollkommene Biegsamkeit, die Steifigkeit, in Betracht.

Ein festes System materieller Punkte, von beliebig vielen Kräften angegriffen, sei mit einem andern festen Systeme in Berührung. Das erste System stützt sich also in beliebig vielen Punkten auf eine feste Curve oder Oberfläche. Diese feste Unterlage kann, wie wir früher bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen angenommen haben, nur solche Kräfte aufheben, welche normal dazu gerichtet sind. In der Wirklichkeit jedoch können die festen Curven oder Oberflächen außerdem noch Tangentialkräfte theilweise vernichten, sodaß wir auch in der berührenden Ebene Reactionen dieser festen Unterlagen annehmen müssen. Diese Widerstände sind, wie die Erfahrung gezeigt hat, um so geringer, je weniger Unebenheiten sich in den berührenden Oberflächen vorfinden, sodaß wir sie ganz vernachlässigen dürften, wenn die Oberflächen von allen Rauhigkeiten frei wären. Die Gesammtheit der Ursachen, welche diese Reactionen hervorrufen, nennen wir die Reibung, die Reactionen selbst daher Reibungswiderstände oder Reibungskräfte. Die Gesetze, nach welchen diese Kräfte wirksam sind, können nur durch Versuche gefunden werden, da die verwendeten Materialien und deren Bearbeitung darauf Einfluß haben.

Die Reibung ruft das Gleichgewicht früher hervor, als es nach den oben vorgetragenen Gesetzen eintreten konnte, und erhält dasselbe, wenn nach der Theorie schon längst Bewegung erfolgen mußte. Ist z. B. zur Herstellung des Gleichgewichts theoretisch eine Kraft P erforderlich, und ist die zur Ueberwindung der Reibung nothwendige Kraft F_1, so wird das Gleichgewicht schon durch eine Kraft $P - F_1$ hergestellt, während die Bewegung erst dann erfolgt, wenn die Kraft größer als $P + F_1$, also vielleicht gleich $P + F_2$ wird.

Die Reibungskräfte werden nur dann hervorgerufen, wenn die auf das feste System von materiellen Punkten wirksamen Kräfte in der berührenden Ebene Componenten enthalten. Die Resultante dieser Componenten ist dann, so lange das feste System nicht in Bewegung kommt, gleich und entgegengesetzt gerichtet der hervorgerufenen Reibungskraft, ebenso ist auch das Moment dieser Resultante für eine beliebige Achse gleich dem Momente des Reibungswiderstandes für dieselbe Achse.

Hiernach kann der Reibungswiderstand der Größe und Richtung nach veränderlich sein, er muß nur in der berührenden Ebene liegen und wird bei bestimmten Materialien und bestimmter Ausführung einen gewissen größten Werth nicht überschreiten können. Diesen größten Werth sehen wir als Maß der Reibung an und benutzen denselben bei den folgenden Untersuchungen.

Die auf das feste System von materiellen Punkten angebrachten Kräfte haben das Bestreben, den Körper auf seiner Unterlage gleitend oder rollend fortzubewegen. Das Gleiten ist fortschreitend oder schiebend, wenn dieselben Punkte des bewegten Systemes mit aufeinander folgenden Punkten der festen Unterlage in Berührung kommen, dagegen ist das Gleiten drehend, wenn aufeinander folgende Punkte des bewegten Systemes mit denselben Punkten der festen Unterlage in Berührung kommen. Beim Rollen kommen aufeinanderfolgende Punkte des festen Systemes mit aufeinander folgenden Punkten der festen Unterlage in Berührung. Während das drehende Gleiten eine Drehung um eine feste Achse ist, läßt sich das Rollen als Drehung um eine veränderliche Achse ansehen, indem ein fortwährendes Kippen stattfindet um neue, aufeinanderfolgende Drehachsen. Die Möglichkeit des Rollens beruht auf der Bedingung, daß die Oberfläche des bewegten Systemes sich auf der festen Unterlage abwickele, daß also die Berührung fortwährend in einer geraden Linie oder in einem Punkte stattfinde.

Nach der Art und Weise, wie die Bewegung erfolgen kann, wird auch der hervorgerufene Reibungswiderstand verschieden sein, so daß wir in der Folge gleitende und rollende Reibung zu unterscheiden haben.

Gleitende Reibung.

Durch Versuche haben sich folgende Gesetze in Betreff des Reibungswiderstandes ergeben, die bei Berechnung desselben zu Grunde gelegt werden müssen. 46

1) Die Reibung wächst mit der Rauhigkeit der sich berührenden Flächen.

2) Der Reibungswiderstand ist denjenigen Componenten der wirksamen Kräfte proportional, welche durch die feste Unterlage aufgehoben werden, d. h. dem normal zu derselben ausgeübten Drucke.

3) Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Größe der reibenden Flächen, wenn weder Spitzen noch Kanten vorhandeu sind.

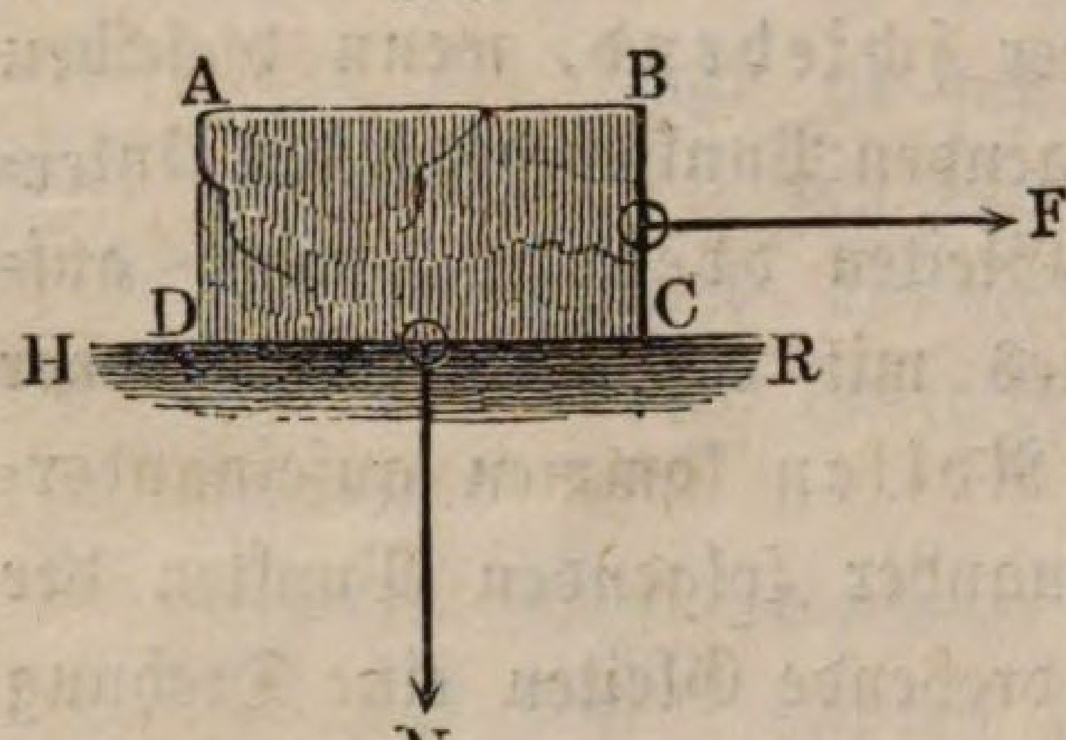
4) Wenn der Körper aus dem ruhenden Zustande in Bewegung gesetzt wird, so ist der Reibungswiderstand größer, als wenn eine vorhandene Bewegung erhalten werden soll. Im letztern Falle läßt sich der Reibungswiderstand jedoch leichter bestimmen, und da durch eine leichte Erschütterung der Uebergang aus Ruhe in Bewegung vermittelt werden kann, so muß in den Fällen, wo man von der Reibung als Widerstand Nutzen ziehen will, dieselbe so gerechnet werden, als ob der Körper schon in Bewegung gewesen.

5) Der Reibungswiderstand ist während der Bewegung von der Größe der Geschwindigkeit unabhängig.

Die Gesetze gelten, so lange die Körper sich während des Versuches weder erwärmen, noch irgend eine bemerkbare Formänderung oder Abnutzung erleiden.

Bezeichnen wir bei einer fortschreitenden gleitenden Bewegung (Fig. 211) den normalen Druck des Körpers $ABCD$ gegen die Fläche HR, über welche er hingleitet, mit N, den dadurch hervorgerufenen Reibungswiderstand mit F, so ist nach den obigen Reibungsgesetzen für dieselbe Unterlage, bei einem bewegten Körper von demselben Stoffe, der einen Druck N_1 ausübt, wodurch der Reibungswiderstand F_1 hervorgerufen wird:

Fig. 211.



$$F : F_1 = N : N_1$$

oder

$$\frac{F}{N} = \frac{F_1}{N_1}.$$

Dieser Quotient ist für Körper desselben Materials, bei derselben festen Unterlage, constant, wird daher der **Reibungscoefficient** genannt und in der Folge mit μ bezeichnet.

Wir haben hiernach allgemein:

$$\mu = \frac{F}{N}.$$

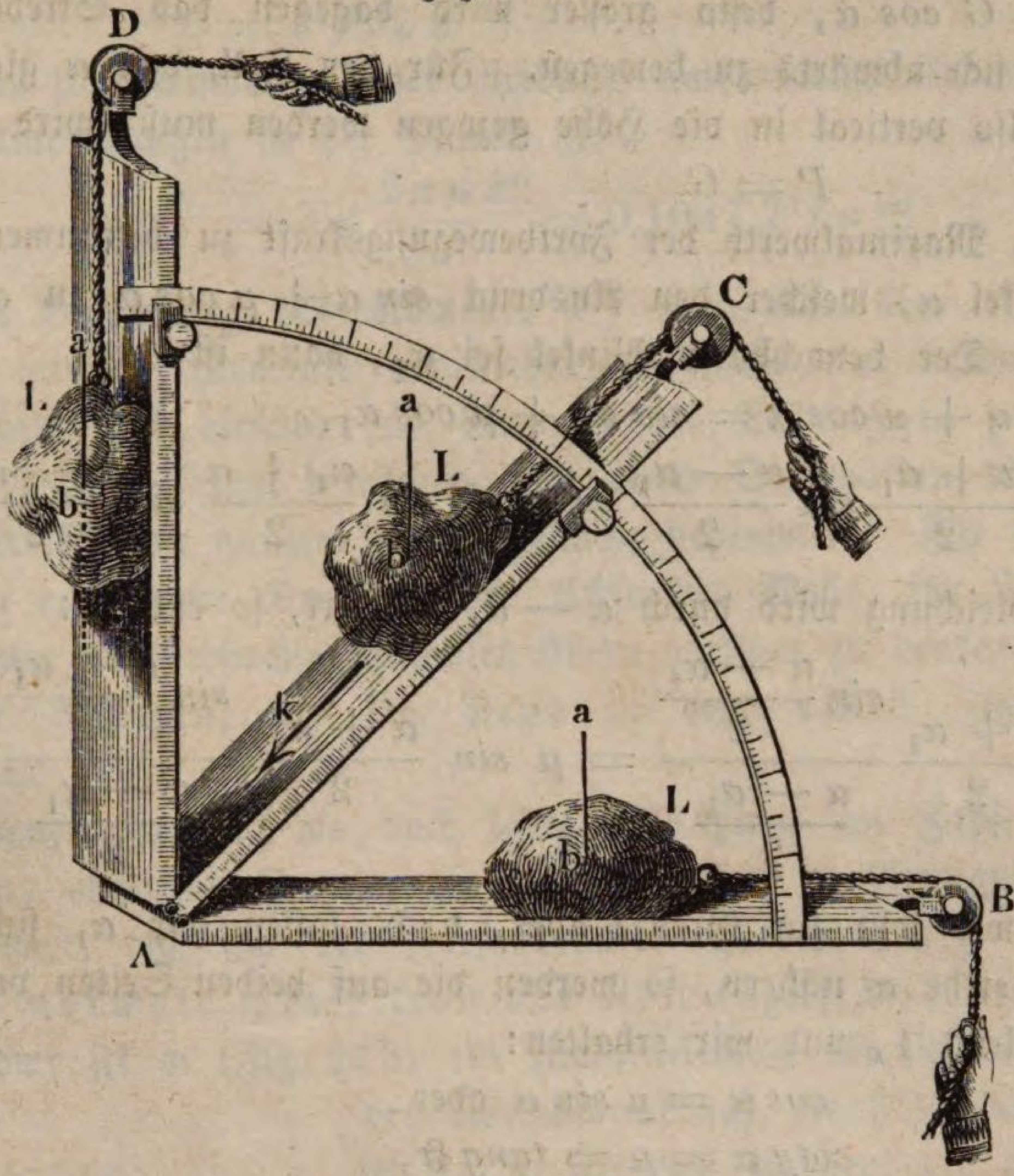
$$F = \mu N \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (110)$$

wenn F den Reibungswiderstand und N den die Reibung hervorgerufenen Normaldruck bezeichnet.

Stützt sich ein Körper L (Fig. 212), der allein der Wirkung der Schwere unterworfen ist, mit einer ebenen Fläche auf eine horizontale Ebene AB und dreht man dieselbe um die durch A gehende horizontale Linie, so fängt der Körper zu gleiten an, sobald die Neigung der Ebene gegen den Horizont einen gewissen Werth erreicht. Es sei G das Gewicht des Körpers, ϑ der

Winkel CAB, den die Ebene mit dem Horizont in dem Augenblicke bildet, wenn das Gleiten beginnt.

Fig. 212.



Die zur geneigten Ebene parallele Componente $G \sin \vartheta$ ist dann gleich dem Reibungswiderstande, während der die Reibung erzeugende Druck gleich $G \cos \vartheta$ ist.

Wir haben daher n. F. 110:

$$\mu = \frac{G \sin \vartheta}{G \cos \vartheta}$$

$$\mu = tang\, \vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (111)$$

Hiernach fangen alle Körper, von demselben Materiale und derselben Politur für eine und dieselbe geneigte Ebene als feste Unterlage, bei demselben Winkel ϑ zu gleiten an, dessen trigonometrische Tangente gleich dem Reibungscoefficienten ist. Der Winkel heißt der Reibungswinkel und soll in der Folge mit ϑ bezeichnet werden. Der durch die Figur 212 erläuterte Apparat läßt sich zur praktischen Bestimmung der Reibungswinkel ϑ benutzen, indem man während der Drehung der Ebene BA um das in A befindliche Charnier den Körper mittelst einer Schnur festhält und, sobald sich das Gleiten bemerkbar macht, die Ebene mittelst der Klemmschraube an dem getheilten Gradbogen befestigt, woran der betreffende Reibungswinkel in Graden abgelesen werden kann. Die an der Schnur wirksame Kraft zur Fortbewegung des Körpers ist auf der horizontalen Ebene

$$P = \mu G.$$

Auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene wird

$$P = G \sin \alpha + \mu G \cos \alpha.$$

Je größer α, desto kleiner wird der aus der Reibung entspringende Summand $\mu G \cos \alpha$, desto größer wird dagegen das Streben $G \sin \alpha$ des Körpers, sich abwärts zu bewegen. Für den Fall, daß α gleich 90° ist, der Körper also vertical in die Höhe gezogen werden muß, wird

$$P = G.$$

Um den Maximalwerth der Fortbewegungskraft zu bestimmen, berechnen wir den Winkel α, welcher den Ausdruck $\sin \alpha + \mu \cos \alpha$ zu einem Maximum macht. Der benachbarte Winkel sei α_1, dann ist

$$\sin \alpha + \mu \cos \alpha = \sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1$$

$$2 \cos \frac{\alpha + \alpha_1}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2} = \mu \cdot 2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2}.$$

Diese Gleichung wird durch $\alpha - \alpha_1$ dividirt, so entsteht:

$$\cos \frac{\alpha + \alpha_1}{2} \frac{\sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha - \alpha_1}{2}} = \mu \sin \frac{\alpha + \alpha_1}{2} \frac{\sin \frac{\alpha - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha - \alpha_1}{2}}.$$

Gehen wir jetzt zur Grenze über, d. h. lassen wir α_1 sich mehr und mehr dem Werthe α nähern, so werden die auf beiden Seiten vorkommenden Quotienten gleich 1, und wir erhalten:

$$\cos \alpha = \mu \sin \alpha \text{ oder}$$

$$\cotg \alpha = \mu = \tang \vartheta,$$

d. h. der Winkel α der geneigten Ebene, für den die Fortbewegungskraft ein Maximum wird, ist das Complement des Reibungswinkels ϑ:

$$Max\, P = G \cos \vartheta + \mu G \sin \vartheta.$$

Bezeichnen wir den in Richtung des Reibungswiderstandes gelegenen Weg des Körpers mit s, so ist die zur Ueberwindung der Reibung nothwendige Arbeitgröße:

$$L = \mu N s^{km},$$

wenn wir N den die Reibung hervorrufenden Druck nennen. Es mag hier noch bemerkt werden, daß der Reibungs-Coefficient μ jederzeit ein echter Bruch ist.

47 Drehendes Gleiten findet hauptsächlich bei den Zapfen der Wellen statt, welche je nach ihrer Lage stehende, geneigte oder liegende Wellen genannt werden. Die Zapfen der stehenden Wellen heißen Stützzapfen, die der liegenden Wellen Tragzapfen. Bei den Stützzapfen kann die reibende Fläche derselben eine Ebene oder die Oberfläche eines Umdrehungskörpers sein, dessen Achse mit der Drehachse der Welle zusammenfällt, die Tragzapfen verlangen dagegen für die Möglichkeit des Drehens, zur reibenden Fläche die Oberfläche eines Umdrehungskörpers mit einer der Wellenachse gemeinschaftlichen Umdrehungsachse. Die Reibung widersetzt sich hier der drehenden Bewegung, es ist daher das Moment der Reibung zu bestimmen, das wir in

der Folge mit Ff bezeichnen wollen. Die Arbeit zur Ueberwindung der drehenden Reibung, für jede Umdrehung, wird erhalten durch Multiplication des Momentes Ff mit 2π:

$$L = Ff \,.\, 2\pi^{\,km}.$$

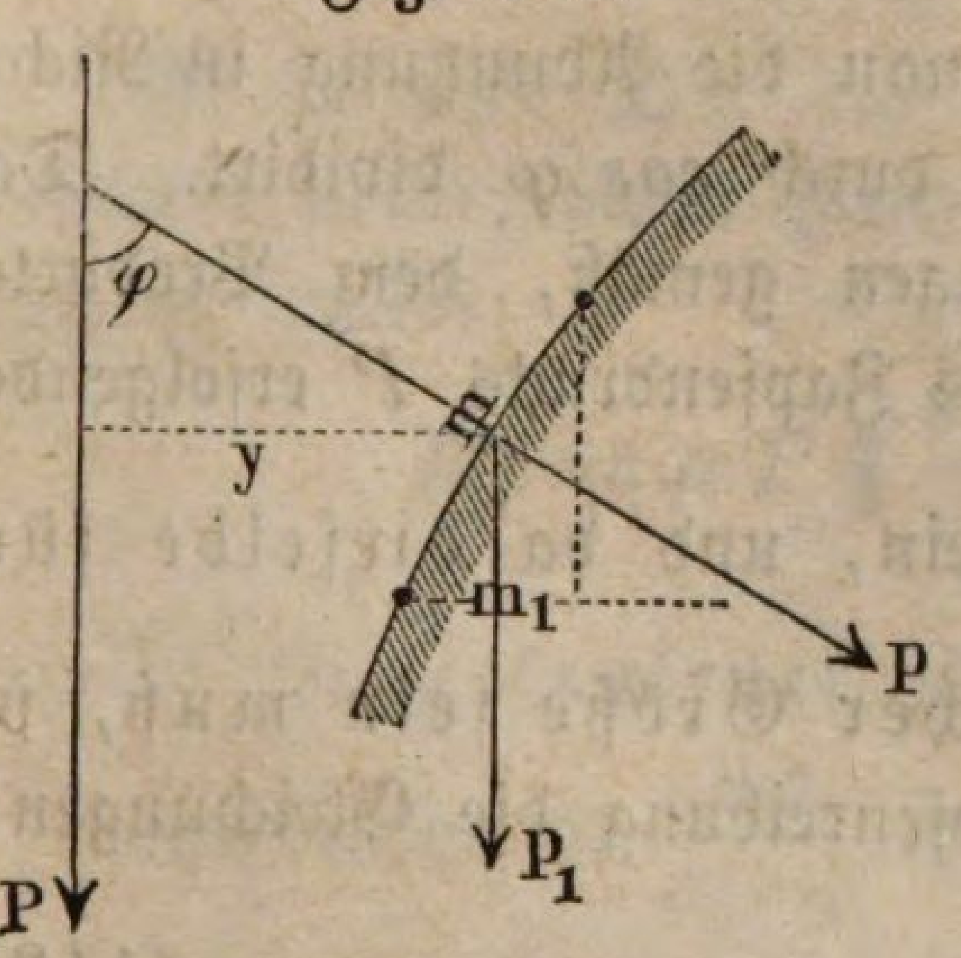
Die zur Ueberwindung dieser Reibung nothwendige Arbeitstärke ergiebt sich für u Umdrehungen in der Minute zu

$$L^{=} = Ff\,\frac{2\pi u}{60}\,\frac{km}{=} = 0{,}1047\; Ff u\,\frac{km}{=} \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (112)$$

Behufs Berechnung des Moments Ff muß man über die Vertheilung des Drucks auf die Elemente der reibenden Fläche eine bestimmte Voraussetzung machen, für dieselbe das Moment der Reibung in jedem einzelnen Theile der Reibungsfläche berechnen und durch Summation dieser Momente das Moment Ff der ganzen Reibungsfläche bestimmen. Für Stützzapfen ist der Reibung erzeugende Druck in der Achse der Welle, für Tragzapfen dagegen in einer zur Drehachse normalen Ebene wirksam zu denken. Wir folgen hierbei den Ansichten, die Dr. Reye in dem «Civil-Ingenieur» veröffentlicht hat.

Bei neuen Zapfen, wo noch keine Abnutzung an Zapfen oder Lager stattgefunden, oder für Zapfen, die nicht dauernd in Bewegung sind, kann man annehmen, daß sich der Zapfendruck P gleichförmig auf eine zu demselben normale Projection der Reibungsfläche vertheilt. Für diese Annahme sei m (Fig. 213) ein Flächenelement der Reibungsfläche, und der Normaldruck auf die Flächeneinheit desselben sei p, so hat das Element den Reibung erzeugenden Druck $m \cdot p$ auszuhalten. Wir zerlegen denselben in Richtung des Zapfendrucks P und normal dazu, so giebt die erste Componente $m\,p\,cos\,\varphi$, unter φ den Winkel verstanden, den m mit einer zu P normalen Ebene bildet, den Druck auf eine zur Zapfendruck-Richtung normale Ebene. Die andere Componente kann unberücksichtigt bleiben, da sich, wenn wir für sämmtliche Elemente der Reibungsfläche dieselbe Zerlegung vornehmen, die Componenten normal zum Zapfendruck P gegenseitig aufheben. Da $m\,cos\,\varphi$ auch die Projection m_1 des Flächenelementes m auf eine zu P normale Ebene vorstellt, so wäre der Flächeneinheitsdruck p_1 auf eine zur Druckrichtung normale Ebene gleich dem Normaldruck p auf die Reibungsfläche selbst, und da der erstere nach der obigen Voraussetzung constant sein soll, so würde hiernach auch die Reibungsfläche in allen Punkten denselben Normaldruck erleiden müssen. Die obige Annahme führt hiernach auf die Gleichung:

Fig. 213.



der Normaldruck auf die Flächeneinheit der Reibungsfläche ist

$$\text{constant} = p = \frac{P}{\Sigma\, m\, cos\,\varphi}.$$

Die Größe der Reibung ist, in einem Punkte der Reibungsfläche, dem Normaldruck p proportional, und die Reibungsarbeit ergiebt sich für eine gewisse Zeit durch Multiplication dieses Drucks p mit der im Punkt stattfindenden relativen Geschwindigkeit. Da aber die letztere dem Abstande y des Punktes von der Drehachse proportional ist, so ist die Reibungsarbeit selbst dem Producte py proportional. Weiter ist es wahrscheinlich, daß in allen Elementen der Reibungsfläche ein gleicher Theil der ganzen Reibungsarbeit zur resultirenden normalen Abnutzung Verwendung findet, woraus sich unmittelbar ergiebt, daß die normale Abnutzung in jedem Punkte der Reibungsfläche der Reibungsarbeit und deshalb dem Producte py proportional ist. Behalten wir für diese Schlußfolgerung die obige Voraussetzung, wonach p in allen Punkten constant sein soll, bei, so müßte die normale Abnutzung der Entfernung y proportional sein, was aber mit der praktischen Erfahrung keineswegs übereinstimmt. Die Abnutzung der Zapfen geschieht vielmehr in der Weise, daß sich derselbe in Richtung des Zapfendrucks in die Lager einfrißt, wobei in allen Punkten die Berührung erhalten bleibt. Hieraus ergiebt sich, daß man bei der Bestimmung des Reibungsmomentes für Zapfen, die schon eine Zeit lang benutzt worden, über die Vertheilung des Zapfendrucks keine Voraussetzung machen darf, daß man vielmehr die in allen Punkten gleich große Abnutzung der Reibungsfläche, in Richtung des Zapfendrucks, der Rechnung zu Grunde legen muß. Hat das Element m der Reibungsfläche bei der Abnutzung in Richtung des Zapfendrucks P den Weg x zurückgelegt, so ergiebt sich als normale Abnutzung der Werth $x \cos \varphi$, wenn φ den Winkel zwischen dem Normaldruck mp und dem Zapfendruck P bezeichnet. Umgekehrt erhält man die Abnutzung in Richtung von P, wenn man die normale Abnutzung durch $\cos \varphi$ dividirt. Da nun diese letztere, den obigen Auseinandersetzungen gemäß, dem Producte py proportional ist, so wird die in Richtung des Zapfendrucks P erfolgende Abnutzung dem Quotienten $\frac{py}{\cos \varphi}$ proportional sein, und da dieselbe für alle Punkte der Reibungsfläche von gleicher Größe sein muß, so erhalten wir zur Berechnung des Momentes der Zapfenreibung die Gleichungen:

$$\frac{py}{\cos \varphi} \text{ ist constant} \quad \ldots \ldots \quad (113)$$

$$P = \Sigma m p \cos \varphi \quad \ldots \ldots \quad (114)$$

$$F f = \mu \Sigma m p y \quad \ldots \ldots \quad (115)$$

In dem Folgenden sollen die Reibungsmomente Ff der in der Praxis am häufigsten vorkommenden Zapfen mit Rücksicht darauf berechnet werden, ob wir es mit einem neuen oder einem eingelaufenen Zapfen zu thun haben.

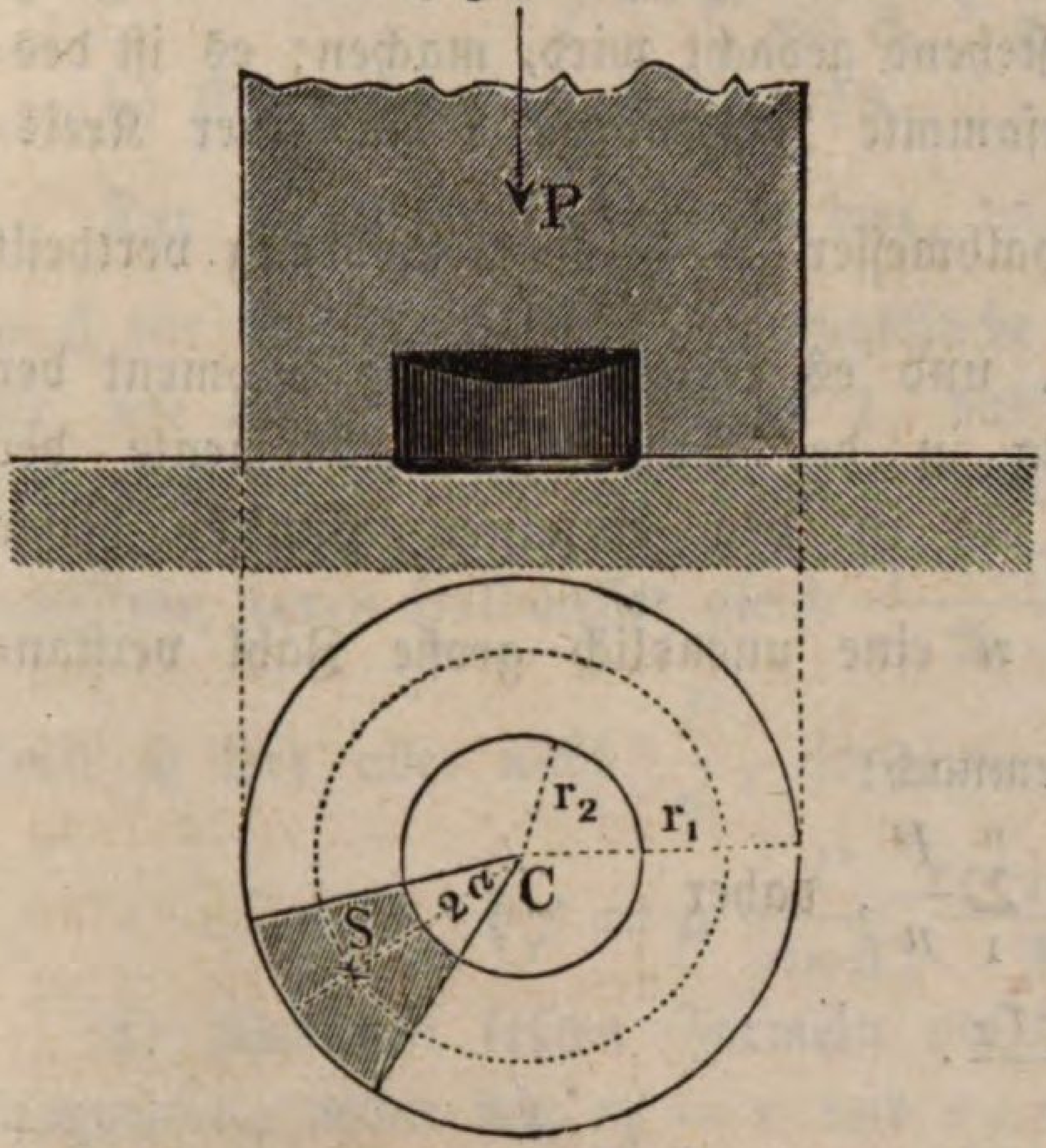
A. Stützzapfen.

1) Die reibende Fläche ist ein Kreisring (Fig. 214) von den Halbmessern r_1 und r_2, dessen Ebene normal zur Drehachse liegen soll, und der Zapfendruck sei gleich P.

a) Neuer Zapfen.

Der Normaldruck p auf die Flächeneinheit ist constant $= \frac{P}{\pi(r_1^2 - r_2^2)}$. Wir denken den Kreisring aus Ringstücken zusammengesetzt, deren zugehörige Centriwinkel 2α sehr klein angenommen werden mögen. Auf jeden Punkt des Ringstücks wirkt der Druck p, im Schwerpunkte S desselben, ist daher der resultirende Druck wirksam zu denken, dessen Arm CS n. §. 42 gleich $\frac{2}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$ zu nehmen ist. Der resultirende Druck selbst ist gleich

Fig. 214.



$$\frac{P}{\pi(r_1^2 - r_2^2)}\,\alpha\,(r_1^2 - r_2^2) = \frac{\alpha}{\pi}\,P.$$

Nach diesen Vorbemerkungen ergiebt sich unmittelbar:

$$Ff = \mu\,\Sigma\frac{\alpha}{\pi}\,P\,\tfrac{2}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Da α ein sehr kleiner Werth ist, so darf man für $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ seinen Grenzwerth 1 setzen und wir erhalten:

$$Ff = \tfrac{2}{3}\,\mu\,\frac{1}{\pi}\,P\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\,\Sigma\alpha.$$

Es ist aber $\Sigma\alpha$ die Summe der halben Centriwinkel für sämmtliche Flächenelemente, daher gleich π zu setzen, sodaß sich schließlich als Reibungsmoment ergiebt:

$$Ff = \mu P\,\tfrac{2}{3}\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

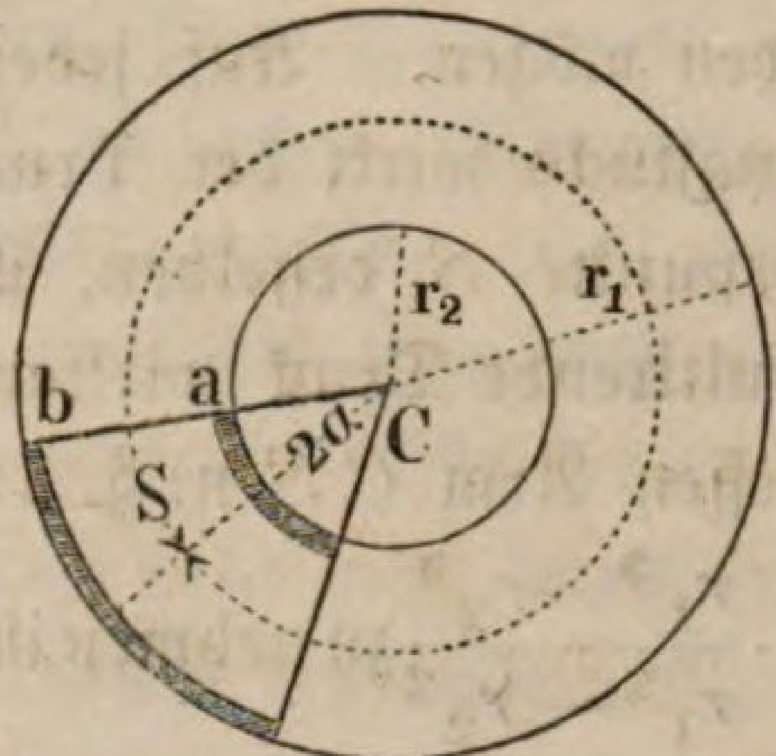
b) Eingelaufener Zapfen.

Der Quotient $\frac{p\,y}{\cos\varphi}$ muß für alle Punkte der Reibungsfläche constant sein. Für den vorgelegten Zapfen sind die Normaldrucke auf die Elemente der Reibungsfläche sämmtlich dem Zapfendruck P parallel, daher $\measuredangle\,\varphi = 0$, und es erhält daher für diesen Zapfen $p\,y$ einen constanten Werth. Hiernach verhalten sich die der Flächeneinheit entsprechenden Drucke an zwei verschiedenen Punkten umgekehrt wie die Entfernungen derselben von der Drehachse, und es werden zwei Flächenelemente, deren Größen sich direct wie die Entfernungen von dem Mittelpunkte C verhalten, deshalb einen gleichen Reibung erzeugenden Druck erfahren.

In dem Ringstück (Fig. 215 a. f. S.) von dem unendlich kleinen Centriwinkel 2α sind a und b zwei derartige Flächenelemente, die also von gleichen parallelen Kräften angegriffen und durch ihre Resultante, in der Mitte des

Ringstücks wirksam, ersetzt werden können. Der Arm CS dieser Resultante ist also $\frac{r_1 - r_2}{2} + r_2 = \frac{r_1 + r_2}{2}$. Ein gleicher Schluß läßt sich auf die übrigen Paare von Flächenelementen dieses Ringstücks, sowie aller übrigen, aus denen der ganze Kreisring bestehend gedacht wird, machen; es ist deshalb der gesammte Zapfendruck P in einer Kreislinie vom Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ gleichförmig vertheilt anzunehmen, und es ergiebt sich das Moment der Zapfenreibung in der Summe der Momente der Reibungen, die in den einzelnen Punkten dieser Kreislinie durch den Druck $\frac{P}{n}$, unter n eine unendlich große Zahl verstanden, hervorgerufen werden. Es ist demnach:

Fig. 215.



$$Ff = \mu \frac{r_1 + r_2}{2} \sum_1^n \frac{P}{n}, \text{ daher}$$

$$Ff = \mu P \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

2) Die reibende Fläche ist ein Kreis vom Halbmesser r, der Zapfendruck wieder P. Man erhält die entsprechenden Formeln aus den unter 1 entwickelten, wenn wir $r_2 = 0$ und $r_1 = r$ setzen.

a) Neuer Zapfen.

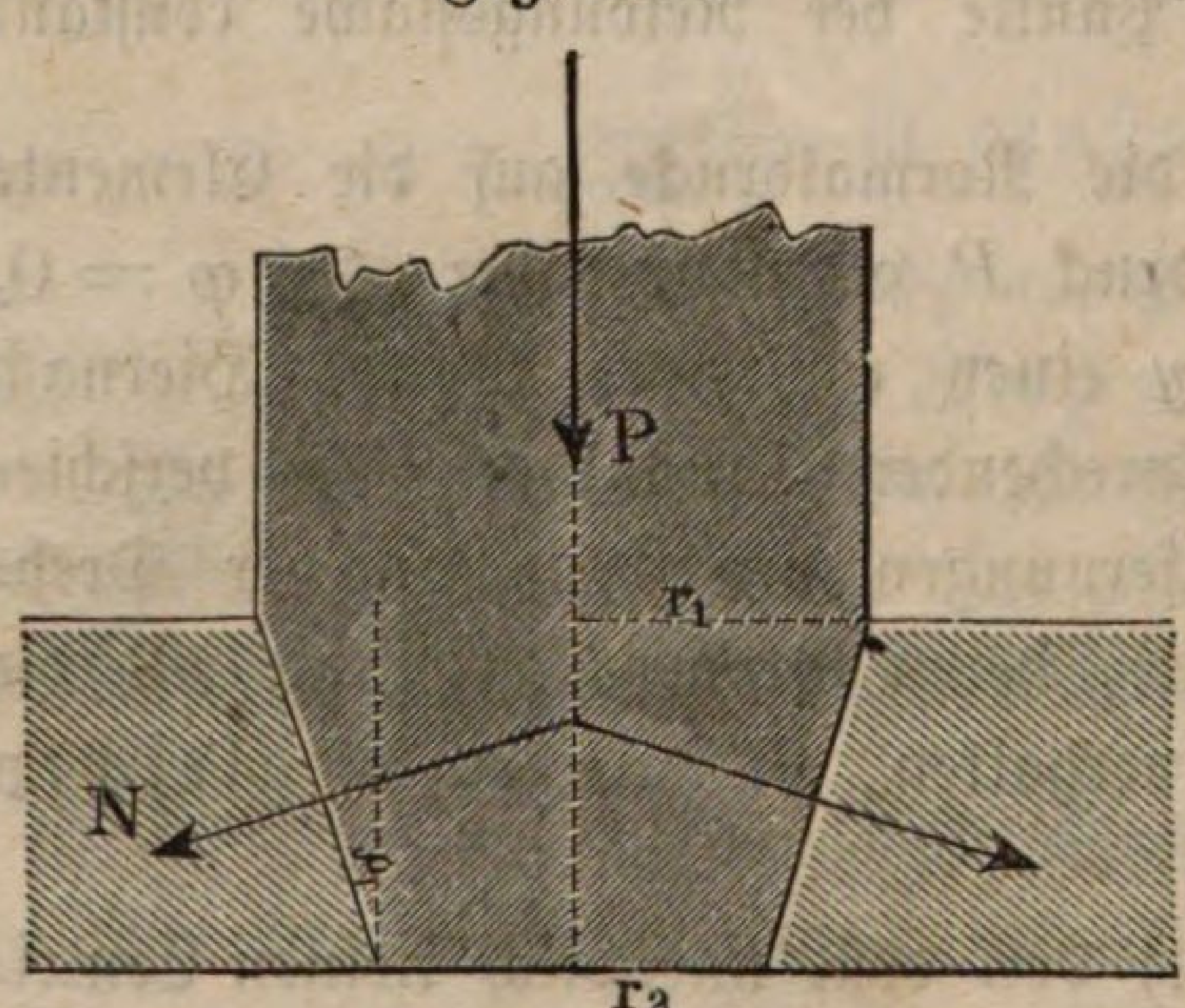
$$Ff = \mu P \tfrac{2}{3} r.$$

b) Eingelaufener Zapfen.

$$Ff = \mu P \frac{r}{2}.$$

3) Die reibende Fläche ist der Mantel eines abgestumpften Kegels (Fig. 216). Der untere Halbmesser des Zapfens sei r_2, der obere r_1, der Winkel, den die Seite und die Höhe des Kegels einschließen, sei δ und der Zapfendruck P.

Fig. 216.



a) Neuer Zapfen.

Die Projection des Kegelmantels auf eine zu P normale Ebene ist wieder wie unter 1 ein Kreisring von den Halbmessern r_1 und r_2, den wir aus Ringstücken vom Centriwinkel 2α bestehend denken. Der Druck in Richtung von P auf ein derartiges Ringstück ist daher ebenfalls $\frac{\alpha}{\pi} P$, der Reibung erzeugende Druck N, der normal zur Kegelseite gerichtete, ist dagegen

$\frac{\alpha}{\pi} P \frac{1}{cos\,\varphi} = \frac{\alpha}{\pi} P \frac{1}{sin\,\delta}$. Der Letztere ist wiederum im Schwerpunkt des Ringstücks wirksam zu denken, sodaß sich die Schlußfolge in derselben Weise wie unter 1 ergiebt, wir erhalten demnach:

$$Ff = \mu \frac{P}{sin\,\delta} \cdot \tfrac{2}{3} \frac{r_1{}^3 - r_2{}^3}{r_1{}^2 - r_2{}^2}.$$

b) Eingelaufener Zapfen.

Der Quotient $\frac{p\,y}{cos\,\varphi}$ wird hier, da $cos\,\varphi = sin\,\delta$, zu $\frac{p\,y}{sin\,\delta}$, und da $sin\,\delta$ für alle Punkte der Reibungsfläche denselben Werth behält, so hat auch hier, wie bei dem Zapfen unter 1, das Product $p\,y$ für alle Punkte einen constanten Werth, und der Druck P vertheilt sich wieder gleichförmig auf eine Kreislinie, deren Halbmesser gleich $\frac{r_1 + r_2}{2}$ ist. Der die Reibung erzeugende Druck ist hier aber nicht $\frac{P}{n}$, sondern $\frac{P}{n} \frac{1}{sin\,\delta}$, daher

$$Ff = \mu \frac{P}{sin\,\delta} \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

4) Aus den letzten Formeln ergeben sich die entsprechenden für den Spitzzapfen, wenn wir $r_1 = r$ und $r_2 = 0$ setzen.

a) Neuer Zapfen.

$$Ff = \mu \frac{P}{sin\,\delta} \cdot \tfrac{2}{3} r.$$

b) Eingelaufener Zapfen.

$$Ff = \mu \frac{P}{sin\,\delta} \frac{r}{2}.$$

5) Der Zapfen habe die Form eines abgestumpften normalen Kegels, und es finde auch an der Grundebene Reibung statt. Wir benutzen die unter 3 angegebenen Maße r_1, r_2, δ, und denken den Druck P aus den Theilen P_1 und P_2 bestehend, von denen P_1 die Reibung an dem Mantel und P_2 die an der Grundebene hervorrufen soll.

a) Neuer Zapfen.

Es ist $\frac{P_1}{\pi (r_1{}^2 - r_2{}^2)} = \frac{P_2}{\pi\, r_2{}^2}$ gleich dem Druck auf die Flächeneinheit der Projection der Reibungsfläche, auf eine zu P normale Ebene. Aus der obigen Gleichung und aus $P = P_1 + P_2$ ergiebt sich:

$$P_1 = P \frac{r_1{}^2 - r_2{}^2}{r_1{}^2},\quad P_2 = P \frac{r_2{}^2}{r_1{}^2}.$$

Aus 3 und 2 erhält man unmittelbar:

$$Ff = \mu \frac{P_1}{sin\,\delta} \cdot \tfrac{2}{3} \frac{r_1{}^3 - r_2{}^3}{r_1{}^2 - r_2{}^2} + \mu\, P_2 \cdot \tfrac{2}{3} r_2$$

und mit Benutzung der für P_1 und P_2 gefundenen Werthe ist:

$$Ff = \mu\, P \cdot \tfrac{2}{3} \frac{1}{r_1{}^2} \left(\frac{r_1{}^3 - r_2{}^3}{sin\,\delta} + r_2{}^3 \right).$$

b) Eingelaufener Zapfen.

Es sei $\frac{p_1 y_1}{sin\, \delta} = c = p_2 y_2$, infolge der constanten Abnutzung in Richtung von P, in allen Punkten der Reibungsfläche, wobei p_2 und y_2 sich auf die Reibung an der Grundebene, p_1 und y_1 auf die, an dem Mantel beziehen soll. Ferner haben wir n. §. 113:

$$P_1 = \Sigma m_1 p_1 \cos \varphi_1 \text{ und } P_2 = \Sigma m_2 p_2 \cos \varphi_2,$$

worin $\cos \varphi_1 = \sin \delta$; $\cos \varphi_2 = 1$; $m_1 = 2\pi y_1 \cdot \sigma_1$; $m_2 = 2\pi y_2 \cdot \sigma_2$ zu setzen ist, wenn σ_1 die Seite eines unendlich niedrigen abgestumpften Kegelmantels und σ_2 die Breite eines unendlich schmalen Kreisringes bezeichnet. Bei Benutzung dieser Werthe erhalten wir:

$$P_1 = \Sigma 2\pi y_1 \sigma_1 \frac{c \sin \delta}{y_1} \sin \delta, \text{ und } P_2 = \Sigma 2\pi y_2 \sigma_2 \frac{c}{y_2}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$c = \frac{P_1}{2\pi \sin \delta^2 \Sigma \sigma_1} = \frac{P_2}{2\pi \Sigma \sigma_2}.$$

Es ist aber $\Sigma \sigma_1$ gleich der Seite s des abgestumpften Kegelmantels, $s \sin \delta$ daher gleich $r_1 - r_2$ und $\Sigma \sigma_2$ gleich r_2, daher

$$\frac{P_1}{(r_1 - r_2) \sin \delta} = \frac{P_2}{r_2},$$

und mit Benutzung der Voraussetzung $P = P_1 + P_2$ erhalten wir:

$$P_1 = P \frac{(r_1 - r_2) \sin \delta}{(r_1 - r_2) \sin \delta + r_2}, \quad P_2 = P \frac{r_2}{(r_1 - r_2) \sin \delta + r_2}.$$

Aus 3 und 2 ergiebt sich für diesen Zapfen das Reibungsmoment:

$$Ff = \mu \frac{P_1}{\sin \delta} \frac{r_1 + r_2}{2} + \mu P_2 \frac{r_2}{2}$$

und bei Berücksichtigung der für P_1 und P_2 entwickelten Werthe entsteht:

$$Ff = \mu P \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r_1^2}{(r_1 - r_2) \sin \delta + r_2}.$$

B. Tragzapfen.

1) Der Zapfen hat die Form eines Cylinders vom Halbmesser r und der Länge l. Derselbe sei vollkommen vom Lager umschlossen und der Zapfendruck zugleich P.

a) Neuer Zapfen.

Es ist $p = \frac{P}{2 r l}$. Die Größe m eines Elementes der Reibungsfläche ist $r \pi \lambda$, unter λ den kleinsten denkbaren Theil von l verstanden. Nach §. 114 ist: $Ff = \mu \Sigma m p y$, und da hier y gleich dem Radius r des Zapfens, so erhalten wir:

$$Ff = \mu \Sigma r \,.\, \pi \lambda \frac{P}{2 r l} r$$

$$= \mu \frac{\pi}{2} \frac{r}{l} P \Sigma \lambda.$$

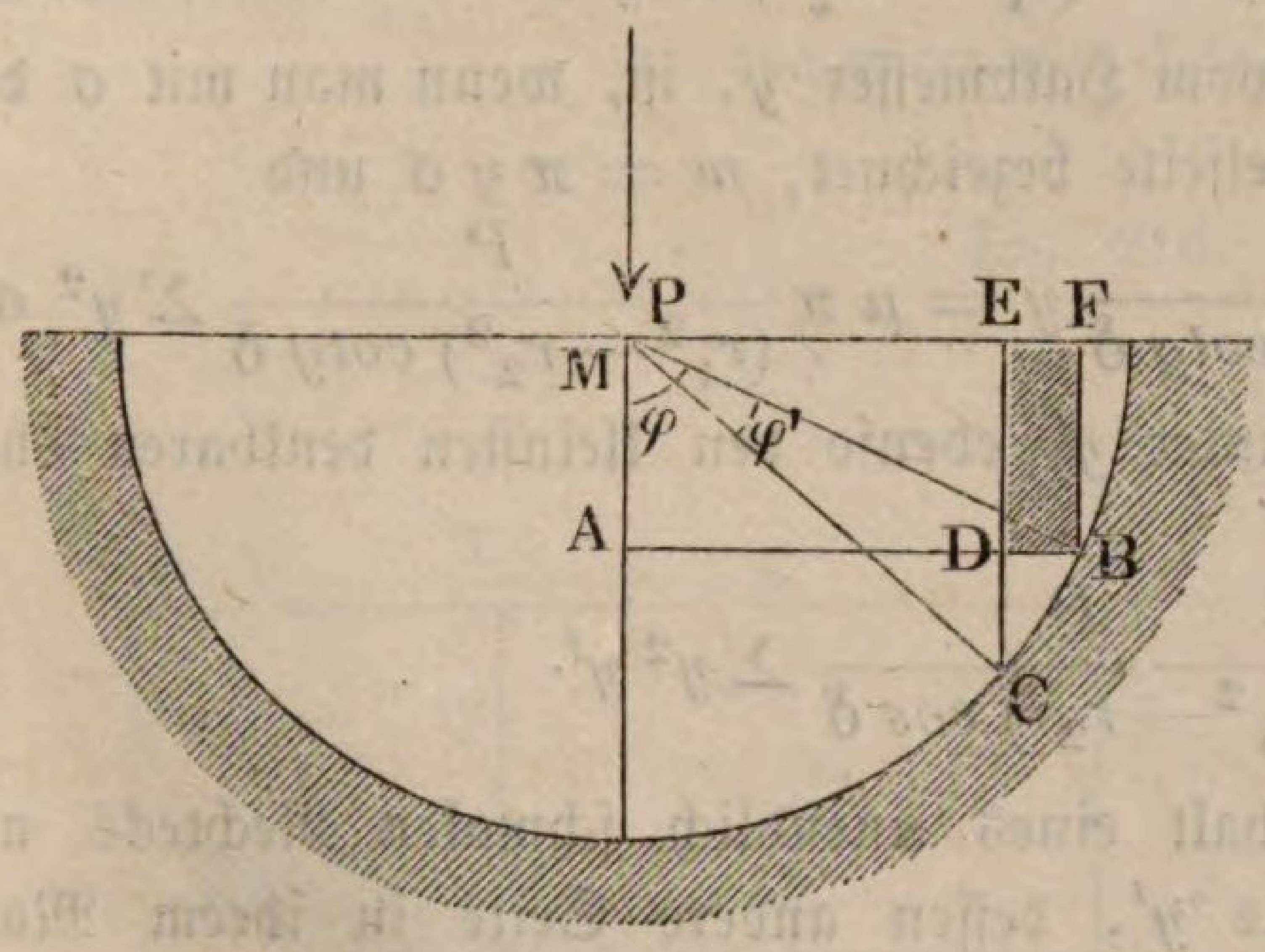
$\Sigma\lambda$ ist aber die Länge l des Zapfens, sodaß sich schließlich ergiebt:

$$Ff = \mu \frac{\pi}{2} P r.$$

b) Eingelaufener Zapfen.

Als Ausgangspunkt dient wieder die Gleichung $\frac{p\, y}{\cos\varphi}$ constant $= c$, worin y gleich r zu setzen ist. Nach Formel 113 haben wir:

Fig. 217.



$$P = \Sigma m\, p \cos\varphi.$$

Bezeichnen wir den Mittelpunktswinkel des unendlich kleinen Kreisausschnitts in Fig. 217 mit φ' und den kleinsten denkbaren Theil von l mit λ, so ist $m = r\,\varphi'\,\lambda$ die Größe des Flächenelementes der Reibungsfläche, und da $p = \frac{c\cos\varphi}{r}$, so erhalten wir:

$$P = \Sigma r\,\varphi'\,\lambda\,\frac{c\cos\varphi}{r}\cos\varphi = \frac{c}{r^2}\Sigma r\,\varphi'\cos\varphi\,.\,r\cos\varphi\,.\,\lambda.$$

In der Figur ist $r\cos\varphi = AM = BF$; $r\,\varphi' = BC$, und $r\,\varphi'\cos\varphi = EF$, daher ist das Product $r\,\varphi'\cos\varphi\,.\,r\cos\varphi$ durch den Inhalt des unendlich schmalen Rechtecks $BDEF$ wiedergegeben.

Die Summe sämmtlicher in dieser Weise construirten Rechtecke ist aber gleich dem Inhalte des Halbkreises, also gleich $\frac{1}{2}r^2\pi$, daher ist

$$P = \frac{c\,\pi}{2}\Sigma\lambda = \frac{\pi\, l\, c}{2} \text{ und}$$

$$c = \frac{2P}{\pi\, l}.$$

Ferner ergiebt sich n. F. 114 das Moment der Zapfenreibung, bei Berücksichtigung des berechneten Werthes von c:

$$Ff = \mu\,\Sigma\frac{2P}{\pi\lambda} r\,\varphi'\cos\varphi\,\lambda$$

$$= \mu\frac{2}{\pi}\frac{P}{l}\,\Sigma r\,\varphi'\cos\varphi\,.\,\lambda.$$

Es ist $r\,\varphi'\cos\varphi$, wie schon oben benutzt, gleich FE, und die Summe dieser kleinen Linien liefert den Durchmesser $2r$, so daß

$$Ff = \mu\frac{4}{\pi}\frac{Pr}{l}\,\Sigma\lambda$$

wird, woraus wir schließlich erhalten:

$$Ff = \mu\frac{4}{\pi} P r.$$

2) Der Zapfen habe die Form eines normalen abgestumpften Kegels. Derselbe sei ganz vom Lager umschlossen, die entsprechenden Halbmesser seien r_1 und r_2, δ sei der Winkel, den die Kegelseite mit der Achse bildet, l die Länge der letzteren und P der Zapfendruck.

a) Neuer Zapfen.

Es ist

$$p = \frac{P}{(r_1 + r_2)\, l} = \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2)\, cotg\, \delta}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt vom Halbmesser y, ist, wenn man mit σ den kleinsten denkbaren Theil der Kegelseite bezeichnet, $m = \pi\, y\, \sigma$ und

$$Ff = \mu\, \Sigma\, \pi\, y\, \sigma \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2)\, cotg\, \delta}\, y = \mu\, \pi \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2)\, cotg\, \delta}\, \Sigma\, y^2\, \sigma.$$

Da weiter $\sigma\, sin\, \delta = y'$, unter y' ebenso den kleinsten denkbaren Theil von y verstanden, so ist:

$$Ff = \mu\, \pi \frac{P}{(r_1^2 - r_2^2)\, cos\, \delta}\, \Sigma\, y^2\, y'.$$

Es kann $y^2\, y'$ als der Inhalt eines unendlich schmalen Rechtecks angesehen werden, dessen eine Seite y', dessen andere Seite in ihrem Maße mit dem Maße von y^2 übereinstimmt. Denkt man auf einer Linie y abgetragen und in den einzelnen Punkten Normalen errichtet, deren Maß mit dem von y^2 übereinstimmt, so werden die Endpunkte dieser Normalen eine krumme Linie bestimmen, und der Inhalt der von der Curve, der ersten geraden Linie und der letzten Normale gebildeten Figur, wird dem Maße nach mit $\Sigma\, y^2\, y'$ übereinstimmen. Benutzen wir einmal für y alle Werthe von 0 bis r_1, so ist die Quadratur der entstehenden Curve nach Nr. 31 der Uebungen des ersten Abschnitts $\frac{1}{3}\, r_1^3$; nehmen wir zweitens für y alle Werthe von 0 bis r_2, so ist die Quadratur gleich $\frac{1}{3}\, r_2^3$, woraus sich ergiebt, da y alle Werthe von r_2 bis r_1 durchlaufen muß,

$$\sum_{r_2}^{r_1} y^2\, y' = \tfrac{1}{3}\,(r_1^3 - r_2^3) \text{ und}$$

$$Ff = \mu \frac{\pi}{3}\, \frac{P}{cos\, \delta}\, \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

b) Eingelaufener Zapfen.

In Figur 218 sei O der in Betracht zu ziehende Punkt in der Reibungsfläche, $O\,B$ ist die Richtung des Normaldrucks p, $O\,A$ die des Zapfendrucks P. $O\,C$ liegt in Richtung des Radius y bei dem in Betracht gezogenen Querschnitt, $O\,B$ und $O\,A$ bilden demnach miteinander den Winkel φ. Die drei Linien OB, OC, OA bestimmen eine dreiseitige körperliche Ecke, mit den drei Seiten φ, δ, ψ, und der, der Seite φ gegenüberliegende Winkel, beträgt 90 Grad. In Figur 219 ist diese körperliche Ecke für sich gezeichnet, und um den Punkt O als Mittelpunkt eine Kugelfläche von beliebigem Halbmesser gedacht. Auf der Fläche bildet sich dadurch das sphärische Dreieck $A\,C\,B$, dessen Winkel bei C gleich 90° sein soll. Man errichte zu $O\,C$ in

C zwei Normalen, in den Ebenen δ und ψ gelegen, und verbinde die Durchschnittspunkte D und E derselben mit den andern Kanten, dann ist DCE ein ebenes rechtwinkeliges Dreieck und

$$DE^2 = DC^2 + EC^2 = DO^2 + EO^2 - 2\,DO\,.\,EO\,.\cos\varphi$$

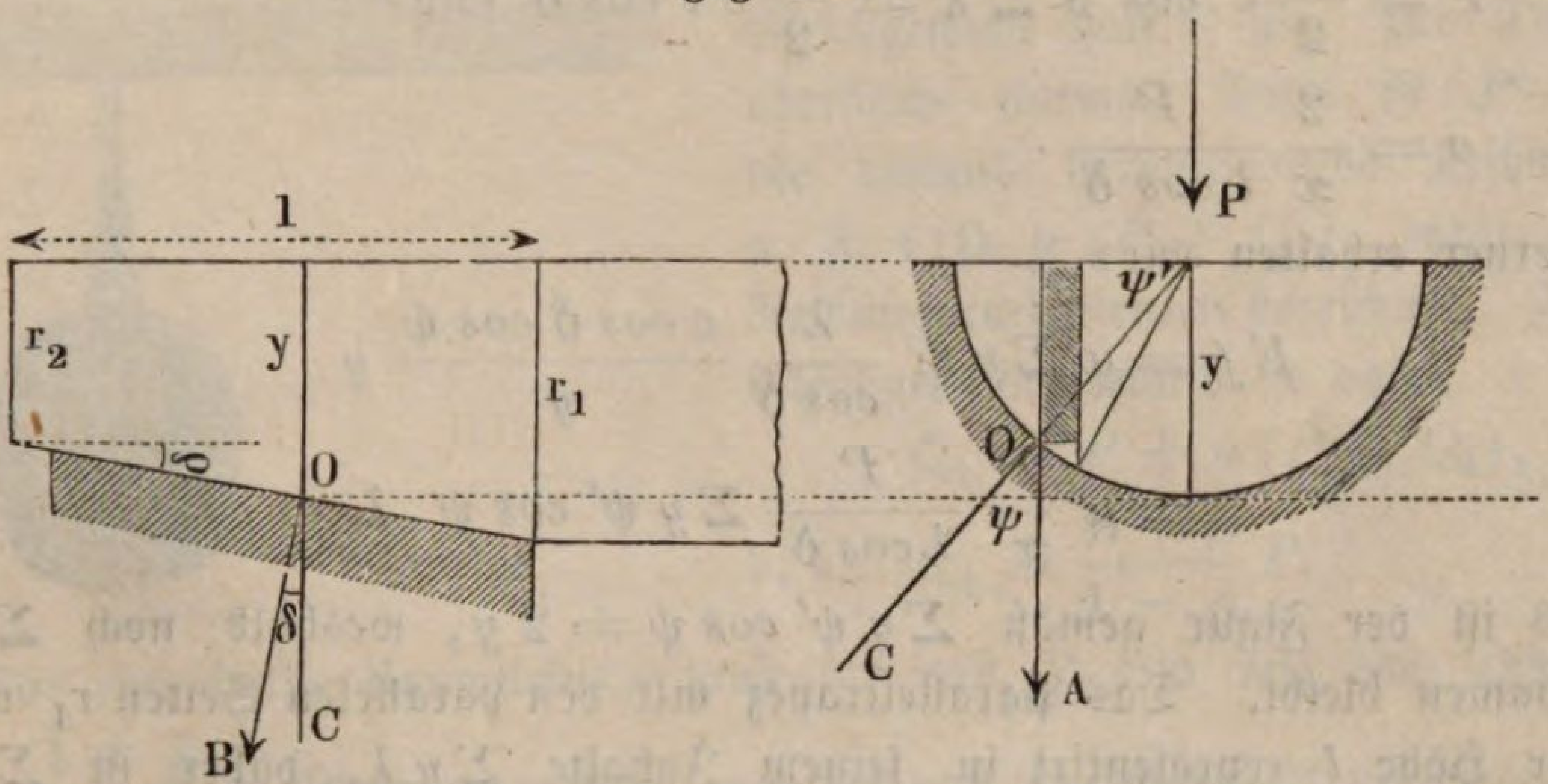
oder:

$$(OC\,tg\,\delta)^2 + (OC\,tg\,\psi)^2 = \left(\frac{OC}{\cos\delta}\right)^2 + \left(\frac{OC}{\cos\psi}\right)^2 - 2\,\frac{OC^2\cos\varphi}{\cos\delta\,\cos\psi},$$

woraus folgt:

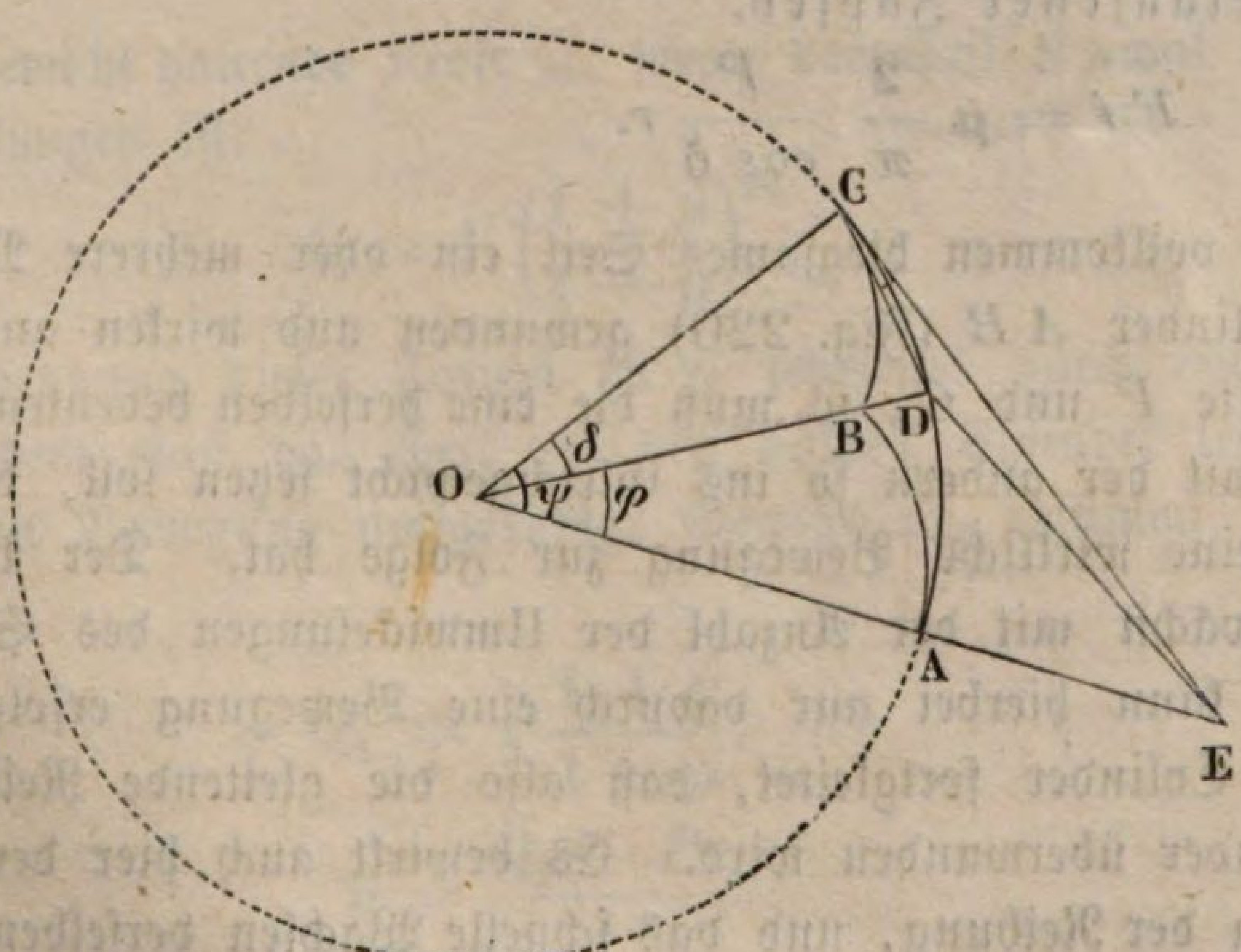
$$\cos\varphi = \cos\delta\,\cos\psi.$$

Fig. 218.



Es soll nun für eingelaufene Zapfen $\frac{p\,y}{\cos\varphi}$ constant gleich c sein, daher $p = \frac{c\cos\varphi}{y} = \frac{c\cos\delta\cos\psi}{y}$; es ist ferner, den Mittelpunktswinkel des unendlich kleinen Kreisausschnittes in Fig. 218 mit ψ' und den kleinsten denkbaren Theil der Länge l des Zapfens mit λ bezeichnend, $m = y\,\psi'\,\frac{\lambda}{\cos\delta}$.

Fig. 219.



Bei Benutzung dieser Werthe haben wir:

$$P = \Sigma y\, \psi' \frac{\lambda}{\cos\delta} \frac{c \cos\delta \cos\psi}{y} \cos\delta \cos\psi$$

$$= c \,.\, \cos\delta\, \Sigma \frac{1}{y^2}\, y \cos\psi \,.\, y\, \psi' \cos\psi \,.\, \lambda.$$

Für das Product $y \cos\psi \,.\, y\, \psi' \cos\psi$ ist in gleicher Weise, wie bei dem cylindrischen Zapfen, das in der Figur schraffirte Rechteck zu setzen, und die Summe derartig gebildeter Rechtecke liefert den Inhalt des Halbkreises vom Halbmesser y, also $\frac{\pi}{2} y^2$, deshalb ist

$$P = \frac{\pi}{2} c \,.\cos\delta\, \Sigma\lambda = \frac{\pi}{2} c\, l \cos\delta \text{ und}$$

$$c = \frac{2}{\pi} \frac{P}{l \cos\delta}.$$

Ferner erhalten wir:

$$F f = \mu\, \Sigma y\, \psi' \frac{\lambda}{\cos\delta} \frac{c \cos\delta \cos\psi}{y} y$$

$$= \mu \frac{2}{\pi} \frac{P}{l \cos\delta} \Sigma y\, \psi' \cos\psi \,.\, \lambda.$$

Es ist der Figur gemäß $\Sigma y\, \psi' \cos\psi = 2\, y$, weshalb noch $\Sigma\, 2\, y\, \lambda$ zu bestimmen bleibt. Das Paralleltrapez mit den parallelen Seiten r_1 und r_2 und der Höhe l repräsentirt in seinem Inhalte $\Sigma y\, \lambda$, daher ist $\Sigma\, 2\, y\, \lambda = (r_1 + r_2)\, l$ und

$$F f = \mu \frac{2}{\pi} \frac{P}{\cos\delta} (r_1 + r_2).$$

3) Der Zapfen sei ein vollkommener Spitzzapfen. Die entsprechenden Formeln werden aus den vorigen erhalten, wenn wir $r_2 = 0$ und $r_1 = r$ setzen.

a) Neuer Zapfen.

$$F f = \mu \frac{\pi}{3} \frac{P}{\cos\delta} r.$$

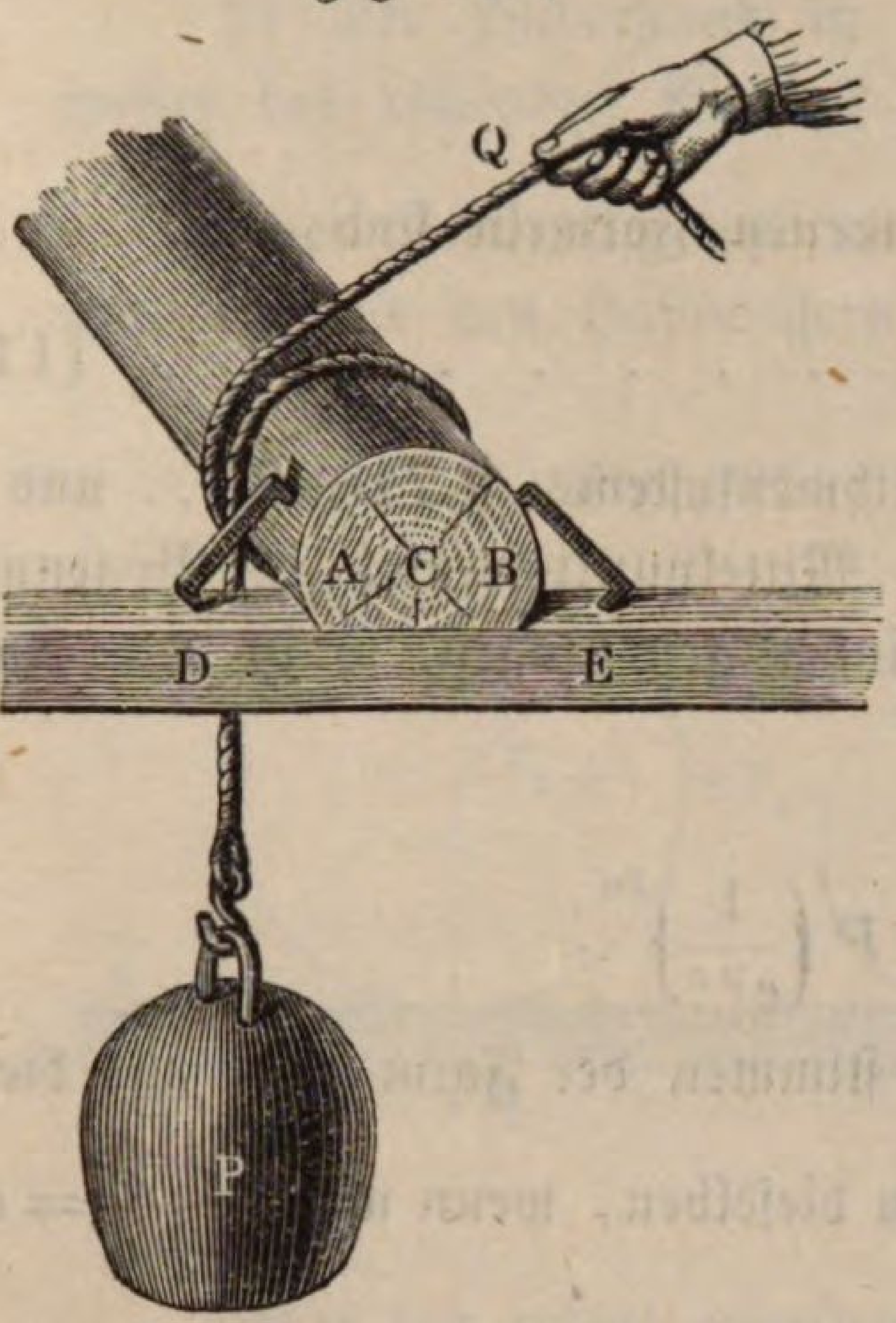
b) Eingelaufener Zapfen.

$$F f = \mu \frac{2}{\pi} \frac{P}{\cos\delta} r.$$

48 Wird ein vollkommen biegsames Seil ein oder mehrere Mal um einen festliegenden Cylinder AB (Fig. 220) gewunden und wirken an seinen beiden Enden die Kräfte P und Q, so muß die eine derselben bedeutend größer sein, wenn sie sich mit der andern so ins Gleichgewicht setzen soll, daß jede kleine Vergrößerung eine wirkliche Bewegung zur Folge hat. Der Unterschied der beiden Kräfte wächst mit der Anzahl der Umwickelungen des Seiles um den Cylinder. Es kann hierbei nur dadurch eine Bewegung erfolgen, daß das Seil über den Cylinder fortgleitet, daß also die gleitende Reibung zwischen Seil und Cylinder überwunden wird. Es bewirkt auch hier der Druck allein die Vermehrung der Reibung, und das schnelle Wachsen derselben beruht allein

auf der Eigenschaft der Faden, daß sie in allen ihren Theilen durch eine angebrachte Kraft gespannt werden, und diese in allen Theilen des Seiles vorhandene Spannung bewirkt den normalen Druck gegen die Oberfläche des Cylinders, der natürlich mit der Anzahl der Umschlingungen des Seiles wächst.

Fig. 220.



Der vom Seil umschlungene Bogen des Cylindermantels sei gleich π und die an einem Ende hängende Last P.

Es sei eine Kraft Q_1 erforderlich, die der Last P und der Reibung das Gleichgewicht hält. Der zur Cylinderoberfläche normale Druck ist $P + Q_1$, die daraus hervorgehende Reibung ist n. F. 110 $\mu\,(P + Q_1)$, wenn μ den Reibungscoefficienten bezeichnet. Für den Gleichgewichtszustand ist daher

$$Q_1 = P + \mu\,(P + Q_1),$$

d. h.: $$Q_1 = \frac{1+\mu}{1-\mu} P.$$

Für eine halbe Umwickelung muß die Last P also mit dem constanten Werthe $\frac{1+\mu}{1-\mu}$ multiplicirt werden, um die das Gleichgewicht hervorbringende Kraft zu erhalten. Sehen wir jetzt $\frac{1+\mu}{1-\mu} P$ als Last an, so ist für eine zweite halbe Umdrehung die erforderliche Kraft:

$$P\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2.$$

Für jede folgende Umschlingung des halben Cylinders ist also von Neuem mit $\frac{1+\mu}{1-\mu}$ zu multipliciren. Wir erhalten hiernach allgemein die der Last P das Gleichgewicht haltende Kraft Q, wenn das Seil $2n$mal um den halben Cylinder geschlungen ist:

$$Q = P\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{2n}.$$

Bei Anwendung dieser Formel ist μ jedesmal durch einen Versuch zu bestimmen, indem man das Seil um den halben Cylinder legt und das zu der entstehenden Bewegung nothwendige Gewicht Q_1 bestimmt.

Aus

$$Q_1 = P\frac{1+\mu}{1-\mu},$$

folgt

$$\mu = \frac{Q_1 - P}{Q_1 + P}.$$

Wäre andererseits der Werth von Q der Bedingung gemäß zu bestimmen gewesen, daß diese Kraft das Herunterfallen der Last P verhindern sollte, so ist in der obigen Formel P mit Q zu vertauschen, und wir erhalten daher für diesen Gleichgewichtszustand:

$$Q = P\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^{2n}.$$

Die mittelst höherer Mathematik gefundenen Formeln sind:

$$\left.\begin{aligned} Q &= P\,e^{\mu\alpha} \\ Q &= P\,e^{-\mu\alpha} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (116)$$

worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems 2,71828 . . . und α den zum umschlungenen Bogen gehörigen Mittelpunktswinkel in Bogenmaß bezeichnet. Ist das Seil $n$mal um den Cylinder geschlungen, so ist $\alpha = 2n\pi$, und diese Formeln gehen über in

$$Q = P\,(e^{\mu\pi})^{2n}$$

$$Q = P\,(e^{-\mu\pi})^{2n} = P\left(\frac{1}{e^{\mu\pi}}\right)^{2n}.$$

Die zuerst gefundenen Werthe für Q stimmen der Form nach mit diesen vollkommen überein und werden sogar genau dieselben, wenn wir $\frac{1+\mu}{1-\mu} = e^{\mu\pi}$ setzen.

Für $\mu = 0{,}3333\ldots$ haben wir, da $\log e = 0{,}43429$ ist

$$e^{\mu\pi} = 2{,}85.$$

Substituiren wir diesen Werth in den obigen Gleichungen statt $e^{\mu\pi}$ oder statt $\frac{1+\mu}{1-\mu}$, so giebt die folgende Zusammenstellung das Wachsen und die Abnahme von Q an, bei mehrfachem Umschlingen des Seiles.

a) Größe der Kraft Q, sodaß bei geringer Vermehrung die Last P gehoben wird:

$Q = 2{,}85\,P$ für $n = 1/2$
$Q = 8{,}12\,P$ » $n = 1$
$Q = 65{,}97\,P$ » $n = 2$
$Q = 535{,}67\,P$ » $n = 3$.

b) Größe der Kraft Q, sodaß bei geringer Verminderung ein Sinken der Last P erfolge:

$Q = 0{,}3590\,P$ für $n = 1/2$
$Q = 0{,}1231\,P$ » $n = 1$
$Q = 0{,}01516\,P$ » $n = 2$
$Q = 0{,}001866\,P$ » $n = 3$
u. s. w.

Rollende Reibung.

49 Wir verstehen hierunter, wie schon oben angegeben, den Widerstand, den ein rollender Körper der weitern Bewegung entgegensetzt.

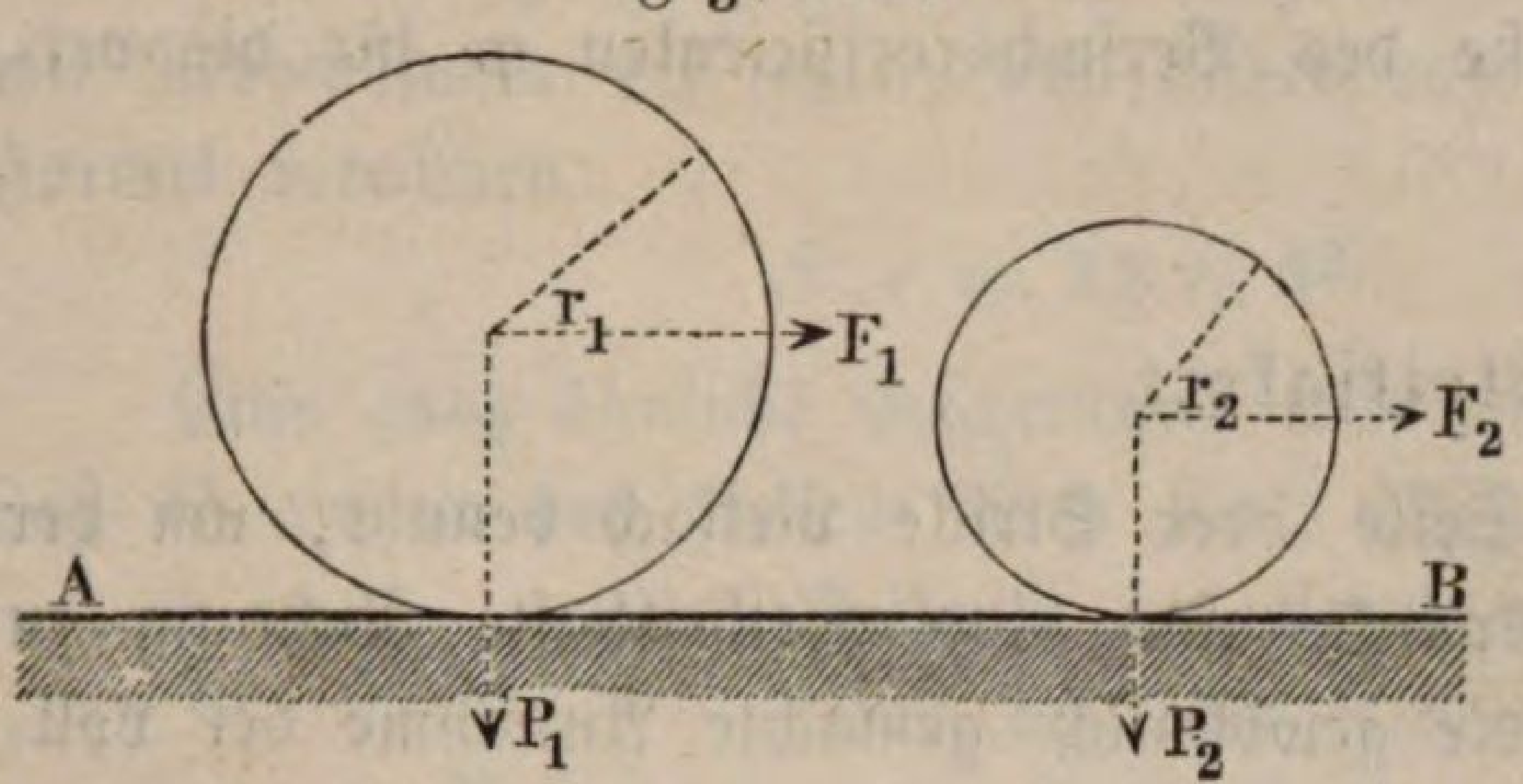
Die durch Versuche gefundenen Gesetze in Betreff dieses Widerstandes sind:

1) Der Reibungswiderstand bei der rollenden Bewegung ist stets geringer als bei der gleitenden.

2) Der Widerstand ist dem normalen Drucke direct und dem Halbmesser des rollenden Körpers umgekehrt proportional.

Zwei gleichartige cylinderische Körper (Fig. 221) von den Gewichten P_1 und P_2 und den Halbmessern r_1 und r_2 rollen auf derselben Unterlage AB.

Fig. 221.



Infolge der gefundenen Gesetze erhalten wir, wenn F_1 und F_2 die Reibungswiderstände bezeichnen, bei Körpern von demselben Halbmesser $F_1 : F_2 = P_1 : P_2$, und bei Körpern von gleichem Gewicht, aber ungleichem Halbmesser $F_1 : F_2 = r_2 : r_1$, daher allgemein: $F_1 : F_2 = P_1 r_2 : P_2 r_1$, oder: $F_1 : \frac{P_1}{r_1} = F_2 : \frac{P_2}{r_2}$.

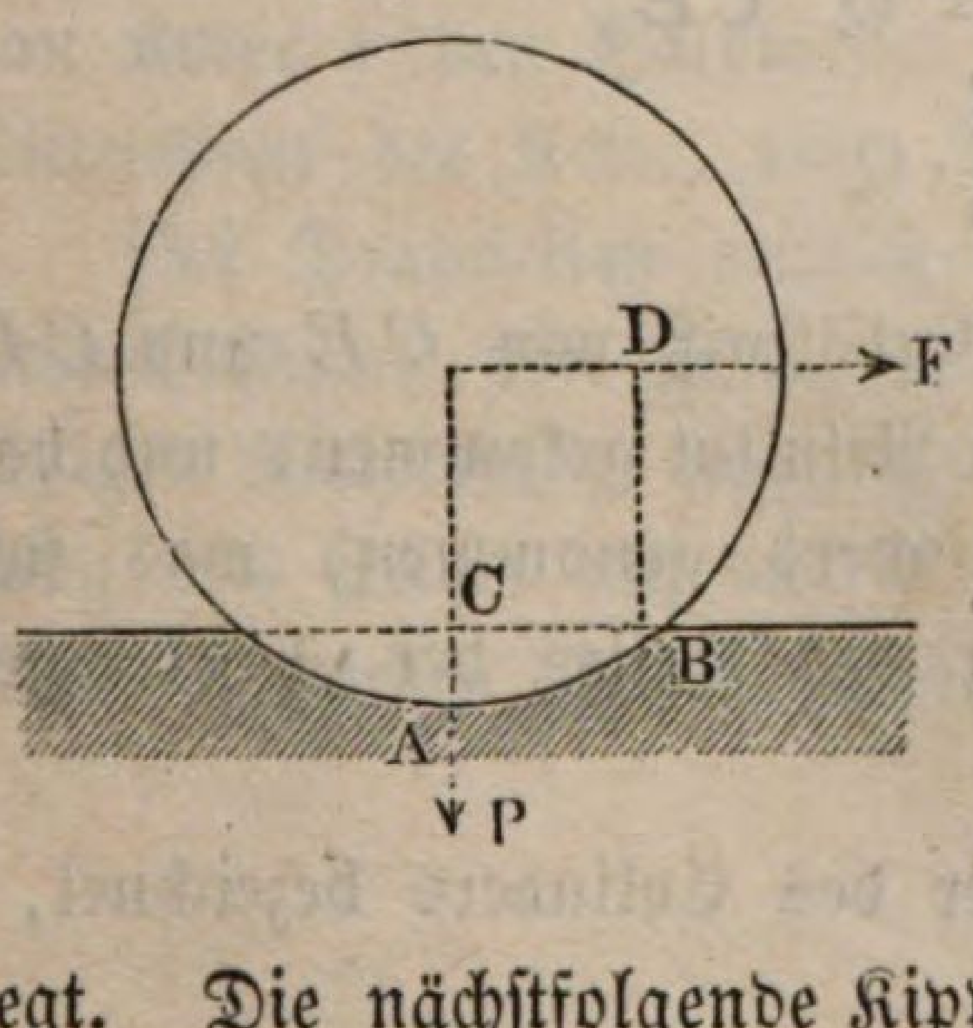
Jeder der zuletzt erhaltenen Quotienten fällt für Körper von demselben Material gleich groß aus, hat also einen constanten Werth. Derselbe ist eine Linie, heißt der Reibungscoefficient und soll in der Folge durch φ bezeichnet werden.

Es ist also allgemein $F : \frac{P}{r} = \varphi$ und das Moment Fr der rollenden Reibung:

$$Fr = \varphi P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (117)$$

wenn F den Reibungswiderstand, P den die Reibung hervorrufenden Normaldruck und r den Halbmesser des rollenden Körpers bezeichnet. Es ist hierbei vorausgesetzt, daß die, die Reibung überwindende Kraft im Schwerpunkte des Körpers ihren Angriffspunkt hat und parallel zur festen Unterlage wirkt. Den bei der rollenden Reibung entstehenden Widerstand kann man auf folgende Weise entstanden denken.

Fig. 222.



In Folge der Biegsamkeit der Materialien bildet sich durch das Gewicht P (Fig. 226) des rollenden Körpers auf der festen Unterlage eine Vertiefung, aus welcher der Körper herausgehoben werden muß. Die Richtung des Gewichtes gehe in diesem Momente durch den Punkt A, der in der eben benutzten Kippachse liegt. Die nächstfolgende Kippachse gehe durch den Punkt B, so ist n. F. 108 die Stabilität des Körpers:

$$S s = P . \overline{BC} - F . \overline{BD}.$$

Statt BD können wir den Halbmesser r des rollenden Körpers setzen, da A und B zwei aufeinander folgende Punkte vorstellen.

Es ist demnach, wenn $BC = a$ gesetzt wird:

$$Ss = Pa - Fr.$$

Der Körper soll sich auf der Grenze des Gleichgewichtes gegen Kippen befinden, es ist daher Ss gleich Null und

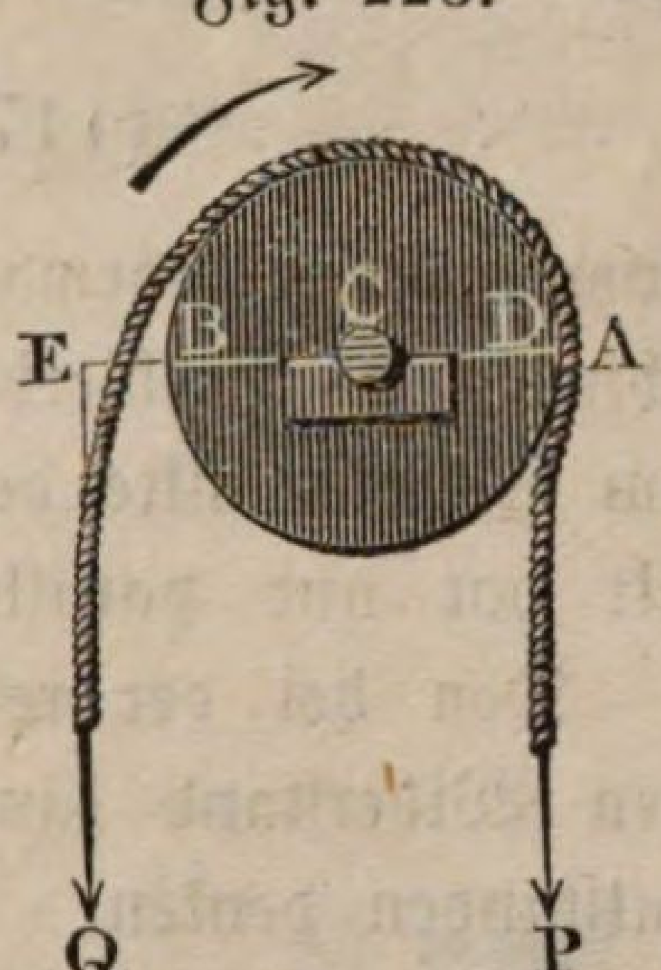
$$Fr = Pa.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit F. 117 überein und man erhält durch diese Entwickelung des Widerstandes bei der rollenden Reibung eine richtige Ansicht von der Größe des Versuchscoefficienten φ für die verschiedenen Materialien.

Steifigkeit.

50 Bei den Maschinen werden Seile oder Stricke vielfach benutzt, um der Last oder Kraft bequeme Angriffspunkte und eine vortheilhafte Richtung zu verschaffen. Für feine Fäden ist die gewöhnlich gemachte Annahme der vollkommenen Biegsamkeit vollkommen gerechtfertigt, dagegen setzen Seile von einiger Stärke der Biegung einen Widerstand entgegen, den man die **Steifigkeit** nennt. Ueber den Cylinder C (Fig. 223), der sich um seine geometrische Achse drehen kann, sei ein Seil gelegt, das an dem einen Ende eine Last Q trägt, welche durch eine an dem andern Ende wirksame Kraft P gehoben werden soll. Das Seil muß bei B aus der verticalen Lage in die gekrümmte und bei A umgekehrt aus der gekümmten in die verticale Lage übergeführt werden. An beiden Enden tritt die Steifigkeit als Widerstand auf.

Fig. 223.



Sehen wir für die Anordnung C als Momentenpunkt an, so wird durch diesen Widerstand der Arm von Q größer, der von P kleiner, und für den Gleichgewichtszustand ist

$$P . \overline{CD} = Q . \overline{CE},$$

d. h.:

$$P = \frac{CE}{CD} . Q.$$

Man hat sich vielfach Mühe gegeben, das Verhältniß von CE und CD durch Versuche zu bestimmen, ist jedoch zu keinem Resultat gekommen, und hat endlich CD gleich dem Halbmesser CA des Cylinders genommen, was sich um so eher rechtfertigen läßt, da die Einbiegung des Seiles bei A viel geringer als die Ausbiegung bei B ist.

Wir haben hiernach, wenn r den Halbmesser des Cylinders bezeichnet,

$$Pr = Q(r + \overline{BE}).$$

Genauere Versuche haben ergeben, daß BE dem Quadrate des Seildurchmessers δ direct proportional ist. Setzen wir daher statt BE, der Ver-

mehrung des Armes, $\psi\,\delta^2$, unter ψ einen Erfahrungscoefficienten verstanden, so erhalten wir das Moment $S\,r$ der Steifigkeit:

$$S\,r = P\,r - Q\,r$$
$$S\,r = \psi\,Q\,\delta^2.$$

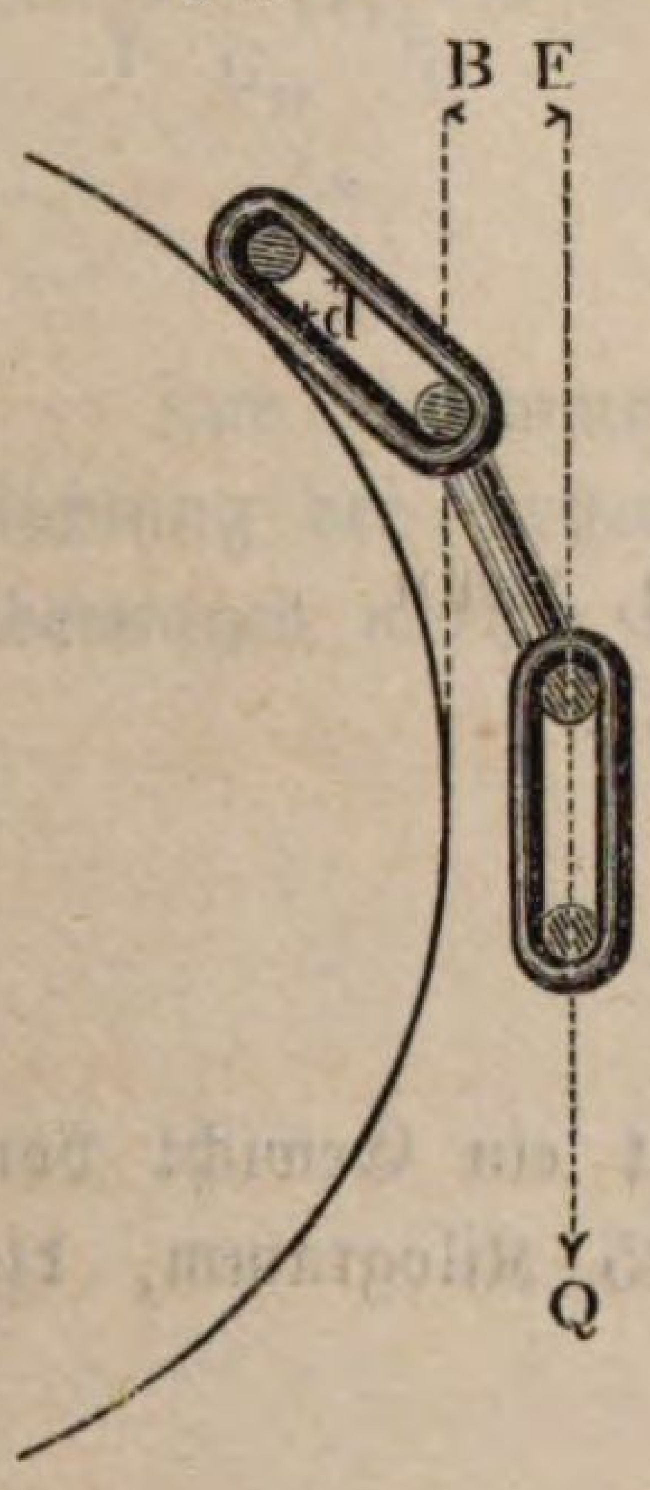
Der Werth von ψ ist von den Einheiten abhängig, welche der Messung von δ und r zu Grunde gelegt sind.

Messen wir δ und r durch Meter, so variirt ψ je nach der Beschaffenheit und der Belastung der Seile zwischen den Werthen 6 und 13, und zwar ist für gebrauchte Seile der kleinere Werth in Rechnung zu bringen. Wir werden in der Folge jederzeit den ungünstigsten Fall in Betracht ziehen, für ψ mit Redtenbacher 13 setzen, und daher das Moment der Steifigkeit nach der Formel berechnen:

$$S\,.\,r = 13\,Q\,\delta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

Eine ganz ähnliche Erscheinung tritt ein, wenn man sich zum Heben der Last Q anstatt des Seiles einer Kette (Fig. 224) bedient. Es ist hier die Reibung der einzelnen Kettenschaken, welche als Widerstand bei dem Umbiegen auftritt. Ist d der Durchmesser des Eisens zu den Kettengliedern, μ der Reibungscoefficient in einer Schake, so ist das Reibungsmoment $F\,f$, wenn wir die Formel für einen dauernd in Bewegung befindlichen Zapfen benutzen, $\mu\,\frac{4}{\pi}\,Q\,\frac{d}{2}$. Hierfür wollen wir annähernd $\mu\,Q\,d$ setzen und haben also darunter die Vergrößerung des Lastmomentes durch den Reibungswiderstand in den einzelnen Kettengliedern zu verstehen, was wir ebenso wie das Moment der Steifigkeit bei Seilen mit $S\,r$ bezeichnen wollen. Für Ketten ist demnach:

Fig. 224.



$$S\,r = \mu\,Q\,d \quad \ldots\ldots \quad (119)$$

In dieser Formel, sowie in 118, durch die der Biegungswiderstand von Seilen angegeben wird, hat man unter r den Halbmesser der Trommel, vermehrt um das Stück bis zur Mittelebene der Kette, resp. des Seiles, zu verstehen.

Bei Drahtseilen endlich ist nach den Versuchen von Weisbach der Steifigkeitswiderstand viel geringer, als bei Hanfseilen, ja derselbe kann bei zweckmäßiger Anordnung und Größe der Windetrommeln und bei gehöriger Einölung des Seiles auf ein Minimum heruntergezogen werden, sodaß wir denselben in solchen Fällen ganz vernachlässigen dürfen.

Uebungen.

1. Ein Körper vom Gewichte Q liegt auf einer Horizontalebene und soll durch eine Kraft P, die im Schwerpunkte des Körpers angreift, in den Gleichgewichtszustand der Bewegung versetzt werden.

Welche Größe erhält P, wenn ihre Richtung mit der Horizontalen den Winkel α bildet und die Kraft

a. ziehend,

b. schiebend wirkt?

$$\text{a)}\ P = \frac{\mu Q}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha};$$

es erhält unter diesen Annahmen P seinen kleinsten Werth, wenn

$$\alpha = \vartheta, \text{ d. h. } \tan\alpha = \mu$$

wird,

$$\text{b)}\ P = \frac{\mu Q}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}.$$

2. Ein Körper liegt auf einer festen Unterlage, hat ein Gewicht von 62,75 Kilogramm und wird durch eine Kraft von 15,25 Kilogramm, die nach horizontaler Richtung wirkt, so eben fortbewegt.

Wie groß ist der Reibungscoefficient?

0,243.

3. Ein mit Eisen beschlagener Schlitten von 150 Kilogramm Gewicht wird auf einer horizontalen Schneebahn gerade fortgezogen.

Wie groß ist die dazu nothwendige Kraft, wenn $\mu = 0{,}06$ ist?

9 Kilogramm.

4. Für eine auf Straßenpflaster fortgezogene Schleife ist $\mu = 0{,}45$.

Wie groß ist die zum Fortziehen nothwendige Kraft, wenn die Schleife mit der Last 250 Kilogramm wiegt?

Wie groß ist die Kraft zum Anziehen der Schleife, den Reibungscoefficienten der Ruhe gleich 0,7 genommen?

112,5 Kilogramm.

175 »

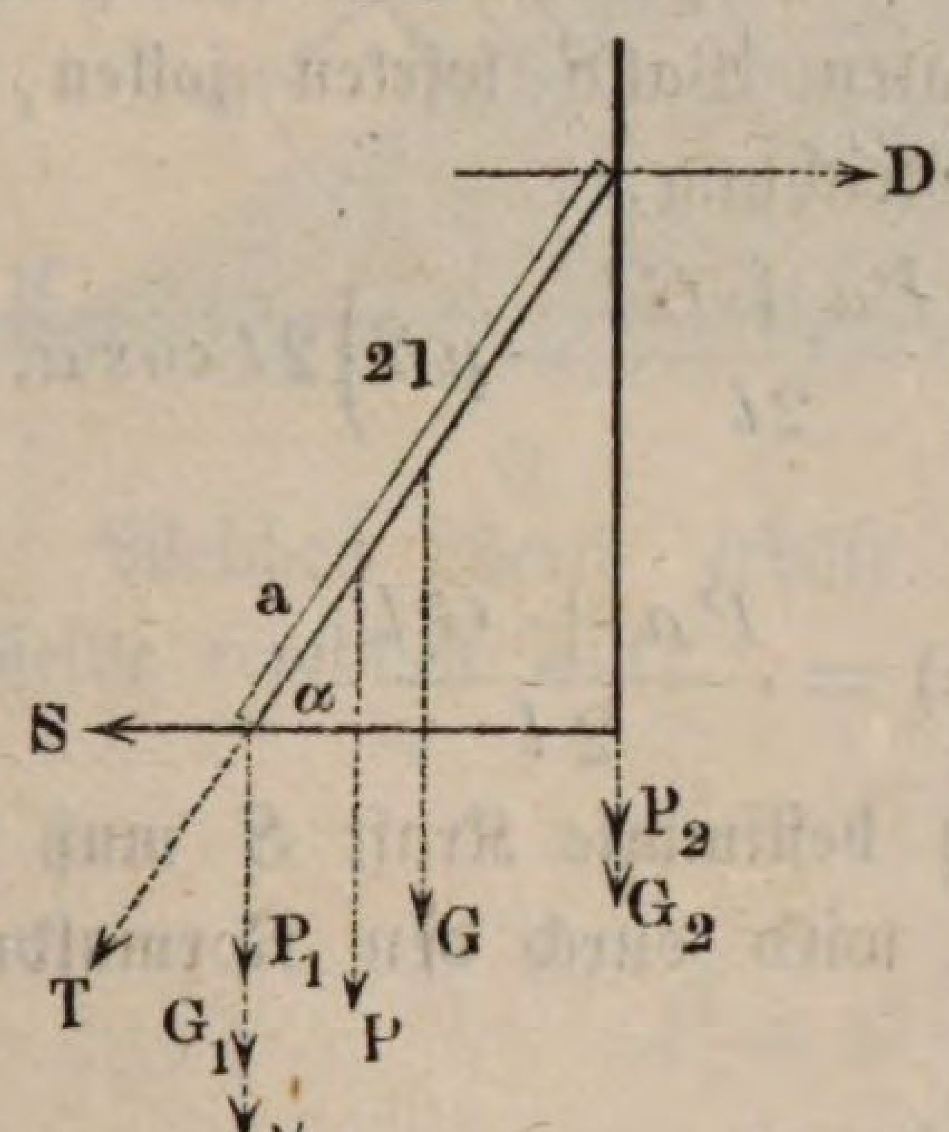
5. Ein mit Eisen beschlagener Schlitten von 25 Kilogramm Gewicht wird auf einer horizontalen Schneemasse in Bewegung gesetzt.

Welchen Weg legt derselbe zurück, wenn eine Arbeitgröße von 20^{km} auf ihn übertragen wurde und der Reibungscoefficient 0,05 ist?

16^m.

6. In einer Verticalebene liegt eine gleich starke Stange vom Gewichte G (Fig. 225), mit dem einen Ende gegen eine verticale Wand, mit dem andern Ende steht sie auf einer Horizontalebene.

Fig. 225.



Es ist die Größe des Neigungswinkels α zu bestimmen, so daß die Reibung das Ausgleiten gerade verhindert, wenn die Stange noch außerdem in der Entfernung a vom untern Ende durch ein Gewicht P belastet ist.

Die Länge des Stabes sei $2\,l$.

Erste Auflösung. Zerlegung der Kräfte:

$$P_1 = \frac{2\,l - a}{2\,l} P, \qquad G_1 = G_2 = \tfrac{1}{2} G.$$

$$P_2 = \frac{a}{2\,l} P,$$

Zur Bestimmung der Componenten D und T ist zu bemerken, daß in Richtung der verticalen Wand die Kraft $P_2 + G_2 - \mu D$ wirksam ist, welche übertragen werden muß:

$$(P_2 + G_2 - \mu D)\,cotg\,\alpha = D$$

$$D = \frac{(P_2 + G_2)\,cotg\,\alpha}{1 + \mu\,cotg\,\alpha},$$

$$T = \frac{P_2 + G_2 - \mu D}{sin\,\alpha},$$

$$V = T\,sin\,\alpha = P_2 + G_2 - \mu D,$$

$$S = cotg\,\alpha\,(P_2 + G_2 - \mu D).$$

Die Bedingungsgleichung des verlangten Gleichgewichtes ist hiernach:

$$S = \mu\,(P_1 + G_1 + V), \text{ d. h.}$$

$$\left(P\frac{a}{2\,l} + \tfrac{1}{2}\,G\right)\frac{cotg\,\alpha}{1 + \mu\,cotg\,\alpha} = \mu\left[P + G - \frac{\mu\,cotg\,\alpha}{1 + \mu\,cotg\,\alpha}\left(P\frac{a}{2\,l} + \tfrac{1}{2}\,G\right)\right]$$

und

$$\frac{(P\,a + G\,l)\,(1 + \mu^2)}{2\,\mu\,l\,(P + G)} - \mu = tang\,\alpha.$$

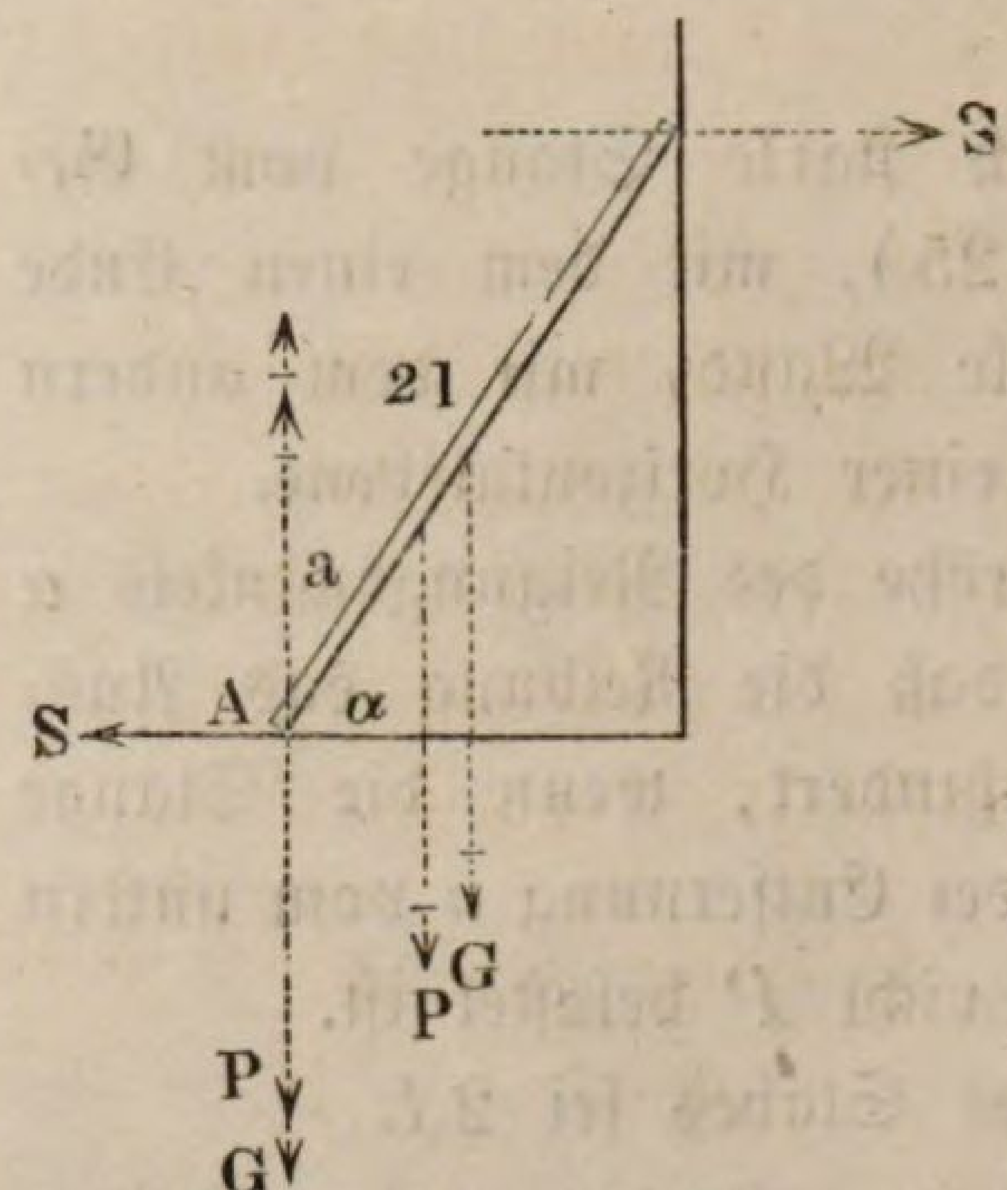
Zweite Auflösung. Anwendung der Kräftepaare. Wir verlegen die beiden Kräfte P und G (Fig. 226) parallel ihrer Richtung nach A, so entsteht nach §. 36 außer der Kraft $P + G$ in A das Kräftepaar:

$$cos\,\alpha\,(G\,l + P\,a).$$

Dieses Paar wird auf die Breite $2\,l \cos\alpha$ gebracht, so ist die Kraft des neuen Paares:

$$\frac{P a + G l}{2 l}.$$

Fig. 226.



Von dieser wird ein Theil durch die Reibung an der verticalen Wand vernichtet. Wenn das Paar auf die Breite $2\,l \sin\alpha$ gebracht wird, wenn also die Kräfte des zu bestimmenden Paares normal zur verticalen Wand wirken sollen, so erhalten wir die Gleichung:

$$S\,.\,2\,l \sin\alpha = \left(\frac{Pa + Gl}{2l} - \mu S\right) 2\,l \cos\alpha,$$

oder

$$S\,(tang\,\alpha + \mu) = \frac{Pa + Gl}{2\,l}.$$

Die hierdurch bestimmte Kraft S muß der in A entstehenden Reibung gleich sein. Diese wird durch den Normaldruck $P + G - \mu\, S$ hervorgebracht.

Hiernach erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$S = \mu\,(P + G - \mu\, S),$$

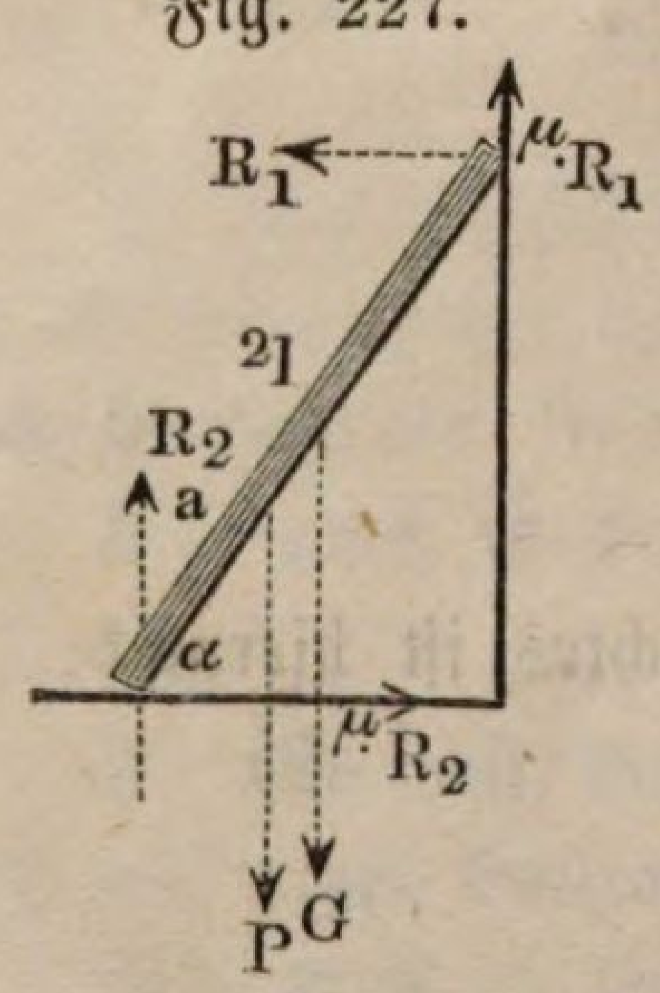
oder:

$$S\,(1 + \mu^2) = \mu\,(P + G).$$

Diese werde durch die oben für S gefundene Gleichung dividirt, so entsteht nach einiger Umformung:

$$tang\,\alpha = \frac{(P a + G l)\,(1 + \mu^2)}{2\,\mu\, l\,(P + G)} - \mu.$$

Fig. 227.



Dritte Auflösung. Benutzung der entstehenden Reactionen (Fig. 227).

$$R_1 - \mu\, R_2 = 0,$$
$$R_2 + \mu\, R_1 - P - G = 0,$$
$$\cos\alpha\,(Pa + Gl) - R_1\,.\,2\,l \sin\alpha - \mu\, R_1\,.\,2\,l \cos\alpha = 0.$$

Hieraus folgt:

$$R_2 = \frac{P + G}{1 + \mu^2},$$

$$R_1 = \frac{\mu\,(P + G)}{1 + \mu^2},$$

$$(Pa + Gl)\,(1 + \mu^2) - 2\,\mu\, l\,(P + G)\, tang\,\alpha - 2\,\mu^2\, l\,(P + G) = 0,$$

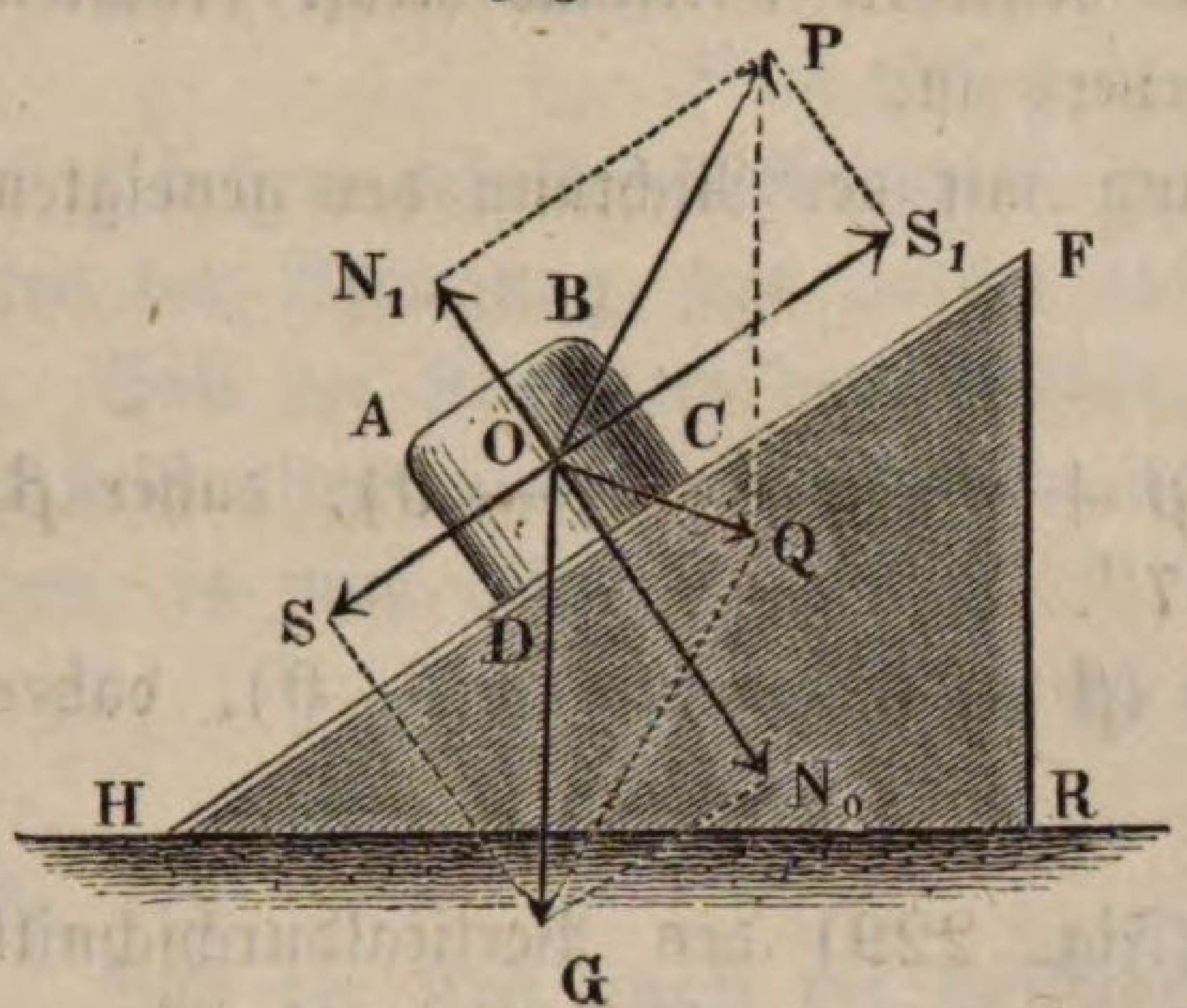
$$tang\,\alpha = \frac{(Pa + Gl)\,(1 + \mu^2)}{2\,\mu\, l\,(P + G)} - \mu.$$

7. Der Stab liege mit seinem oberen Ende gegen eine Mauerkante, während das Uebrige von der vorigen Aufgabe beibehalten werden soll. Durch welche Gleichung bestimmt sich jetzt α der Größe nach?

$$\sin 2\,\alpha = 4\,\frac{\mu}{1 + \mu^2}\cdot\frac{(P + G)\,l}{Pa + Gl}.$$

8. Auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont RH geneigten Ebene FH (Fig. 228) liegt ein Körper $ABCD$ von dem Gewichte G, der durch eine Kraft P, im Schwerpunkte O des Körpers wirksam, auf der Ebene erhalten wird. Es bilde P mit der geneigten Ebene den Winkel β und wirke nach oben ziehend.

Fig. 228.



Welchen Werth erhält P,

a. um das Herabgleiten zu verhindern?

b. um bei der geringsten Vermehrung den Körper nach oben zu ziehen?

Welchen Werth erhält P, wenn die Kraft schiebend wirkt und man dasselbe erreichen will?

$$P = G \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta},$$

$$P = G \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta},$$

$$P = G \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta},$$

$$P = G \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta}.$$

9. Wie ändern sich die letzten Resultate, wenn die Kraft P nach horizontaler Richtung wirkt?

Es ist in den beiden ersten Formeln statt β, $-\alpha$, in den beiden letzten dagegen statt β, α einzuführen.

Wir erhalten in beiden Fällen:

$$P = G \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha},$$

$$P = G \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha},$$

oder $\mu = \tang\vartheta$ gesetzt:

$$P = G \tang(\alpha - \vartheta),$$

$$P = G \tang(\alpha + \vartheta).$$

10. Die in den beiden letzten Nummern erhaltenen Resultate sind auf folgenden speciellen Fall in Anwendung zu bringen. Die geneigte Ebene sei aus hartem Holz construirt, der Körper bestehe aus Gußeisen:

$\alpha = 65^\circ 7'$

$\beta = 37^\circ 13'$

$\mu = 0{,}49$

$G = 270$ Kilogramm

$P = \begin{cases} 173{,}2 \text{ Kilogramm} \\ 601{,}2 \quad » \end{cases}$ wenn die Kraft schiebend wirkt.

11. Ein Körper aus Granit liegt auf einer geneigten Ebene aus Holz, die den Winkel $40^\circ 7' 3''$ mit der Horizontalebene bildet. Der Körper soll auf der Ebene durch eine im Schwerpunkte desselben wirksame Kraft erhalten werden, welche gleich dem Gewicht des Körpers ist.

Welchen Winkel bildet die Kraftrichtung mit der Richtung der geneigten Ebene?

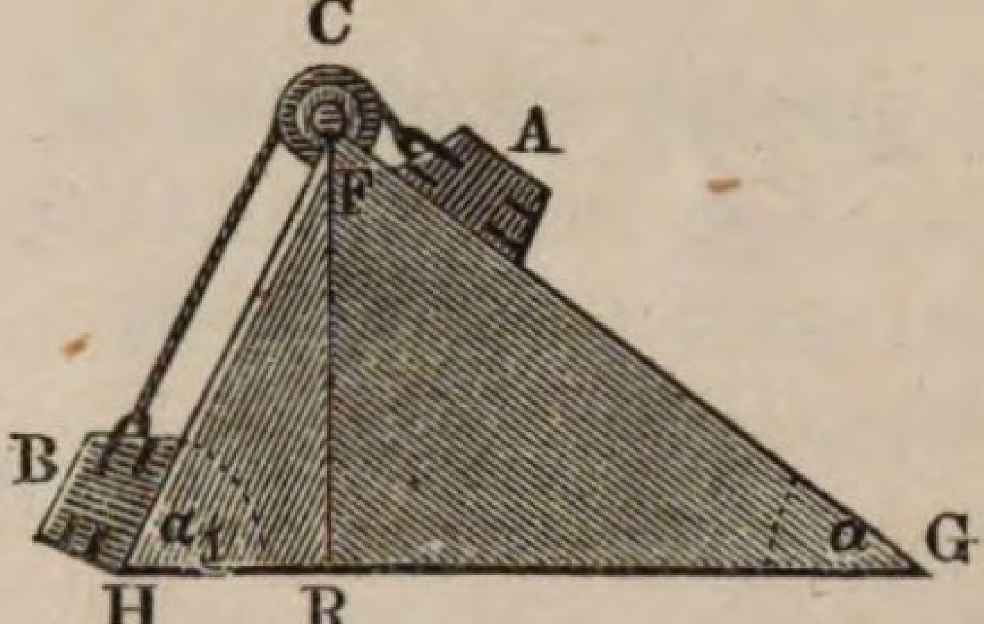
$$\mu = 0{,}53.$$

Wirkt die Kraft ziehend, so ist $\cos(\beta + \vartheta) = \sin(\alpha - \vartheta)$, daher β, weil $\vartheta = 27^\circ 55' 25''$ ist, gleich $49^\circ 52' 57''$.

Wirkt die Kraft schiebend, so ist $\cos(\beta - \vartheta) = \sin(\alpha - \vartheta)$, daher $\beta = 105^\circ 43' 47''$.

12. Es stelle das Dreieck HFG (Fig. 229) den Verticaldurchschnitt zweier geneigten Ebenen vor. Auf der einen derselben, HF, liegt ein Körper B vom Gewicht G, der durch einen zweiten Körper A desselben Materials, auf der anderen geneigten Ebene liegend, im Gleichgewichte erhalten werden soll. Beide Körper sind durch ein vollkommen biegsames Seil mit einander verbunden, das über eine in F angebrachte feste Rolle C geführt ist, parallel den geneigten Ebenen liegt und verlängert durch die Schwerpunkte der Körper geht.

Fig. 229.

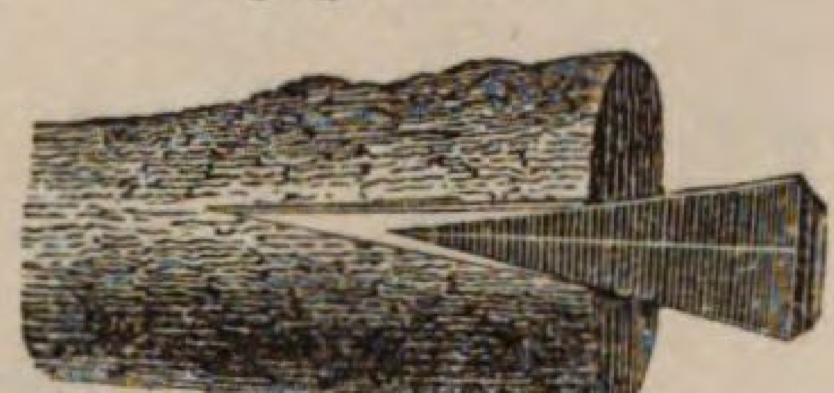


Welches Gewicht muß der zweite Körper haben?

$$G \frac{\sin\alpha_1 \pm \mu\cos\alpha_1}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}.$$

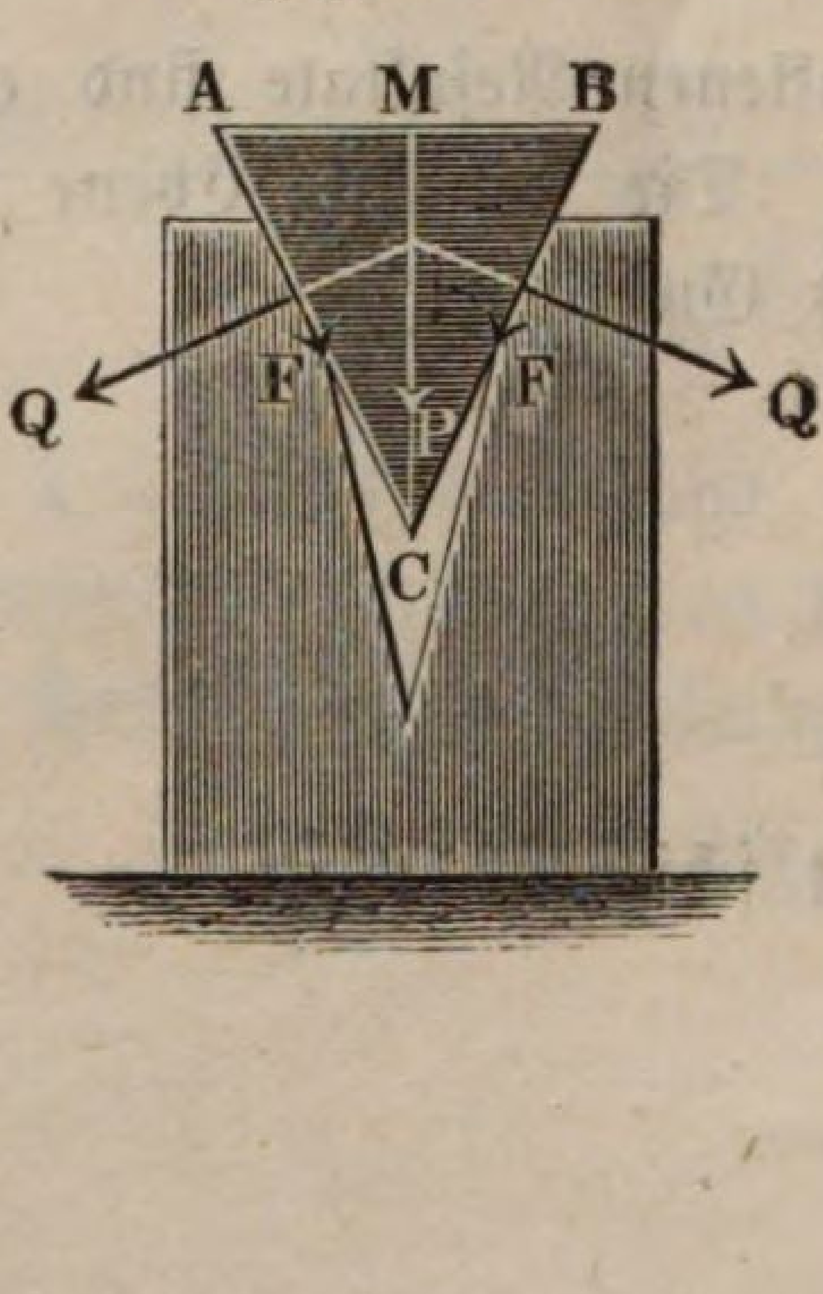
13. Jedes dreiseitige Prisma heißt ein Keil (Fig. 230). Der Gebrauch desselben besteht darin, daß man ihn mit einer Kante zwischen zwei durch irgend eine Kraft an einander gedrückte Flächen einzutreiben sucht, um dieselben dadurch von einander zu entfernen. Der normale Querschnitt eines Keils ist gewöhnlich ein gleichseitiges oder gleichschenkliges Dreieck.

Fig. 230.



Die durch AB (Fig. 231) gehende Ebene heißt der Rücken, die durch AC und BC gehenden Ebenen aber die Seiten des Keils. Die durch C gehende Kante heißt die Schneide, und der von den Seiten gebildete Winkel 2α der Schneidewinkel des Keils. Es wirke normal zu dem Rücken die Kraft P, die mit den Widerständen der auseinandergetrennten Flächen F im Gleichgewichte sein soll. Die Widerstände, deren Richtungen normal zu den Seiten des Keils gerichtet sind, seien auf beiden gleich groß, gleich Q.

Fig. 231.



Die Resultante aus den Widerständen Q ist $2\,Q\, sin\, \alpha$, die aus den entstehenden Reibungen ist $2\, \mu\, Q\, cos\, \alpha$.

Für die Annahme des Gleichgewichtes haben wir daher:

$$P = 2\, Q\, (sin\, \alpha \pm \mu\, cos\, \alpha).$$

In dem erhaltenen Ausdrucke bezieht sich das obere Zeichen auf das Eintreten der Bewegung, das untere auf das der Ruhe.

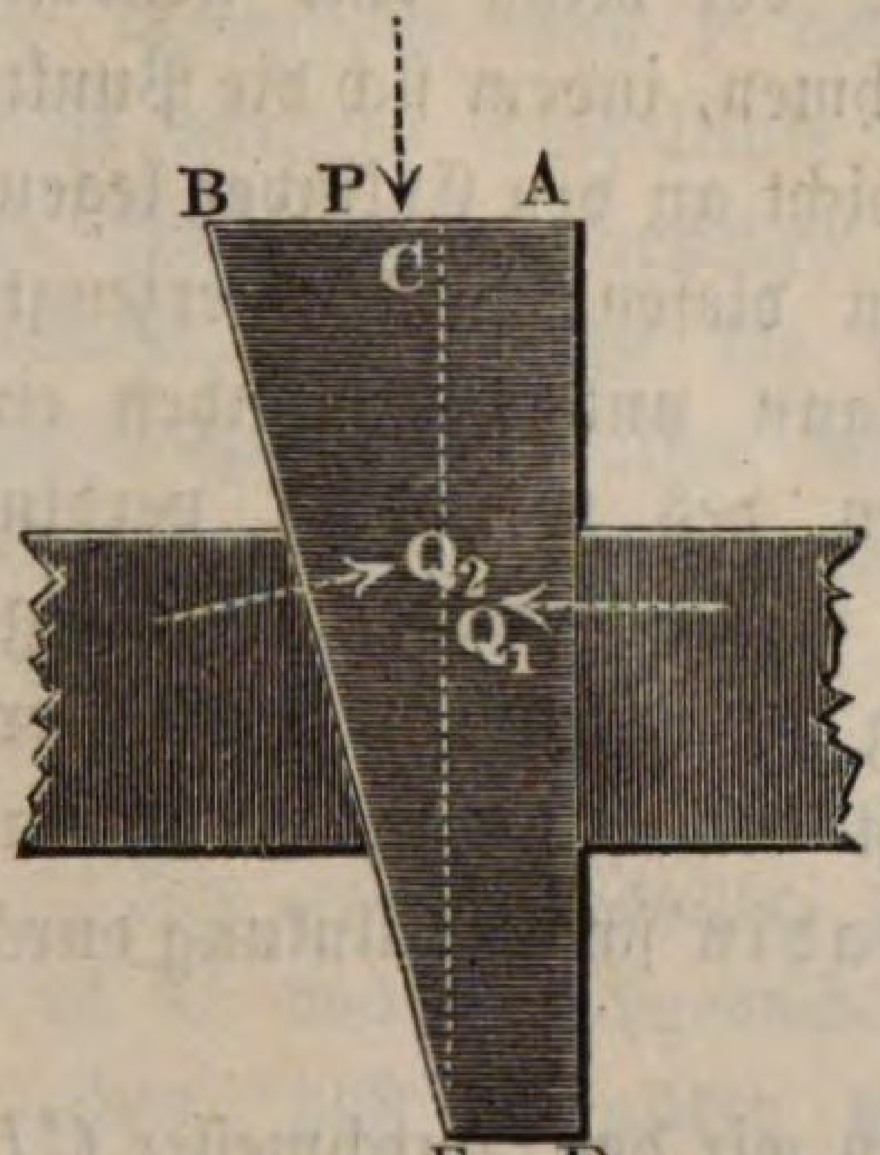
Soll der Keil nach dem Aufhören der Kraft zurückspringen, wie sich in den Keilpressen oftmals die Anordnung findet, so muß P einen positiven Werth haben, es muß also

$$sin\, \alpha - \mu\, cos\, \alpha > 0,$$
$$tang\, \alpha > \mu$$

sein.

Soll der Keil durch die Reibung allein in seinem Sitz erhalten werden, soll derselbe also nach Wegnahme der Kraft P nicht herausspringen, so folgt aus

Fig. 232.



$$sin\, \alpha - \mu\, cos\, \alpha = 0$$
$$tang\, \alpha = \mu, \text{ d. h. } \alpha = \vartheta.$$

Wird der Keil als Befestigungsmittel benutzt, so construirt man den normalen Querschnitt als rechtwinkeliges Dreieck (Fig. 232), der Schneidewinkel α muß ein spitzer sein, damit die entstehende Reibung jedenfalls das Lösen verhindere.

Die Kräfte, welche unter sich im Gleichgewicht sein müssen, sind

$$P,\ Q_1,\ \mu\, Q_1,\ Q_2 \text{ und } \mu\, Q_2.$$

Die Bedingungsgleichungen sind:

$$P - (Q_2\, sin\, \alpha - \mu\, Q_2\, cos\, \alpha - \mu\, Q_1) = 0,$$
$$Q_1 - Q_2\, cos\, \alpha - \mu\, Q_2\, sin\, \alpha = 0,$$
$$Q_2 = \frac{Q_1}{cos\, \alpha + \mu\, sin\, \alpha},$$
$$P = Q_2\, (sin\, \alpha - \mu\, cos\, \alpha) - \mu\, Q_1,$$
$$P = Q_1\, [tang\, (\alpha - \vartheta) - tang\, \vartheta].$$

Die Bedingung für das Festsitzen des Keils

$$P < 0,$$
$$tang\, (\alpha - \vartheta) < tang\, \vartheta,$$

d. h.

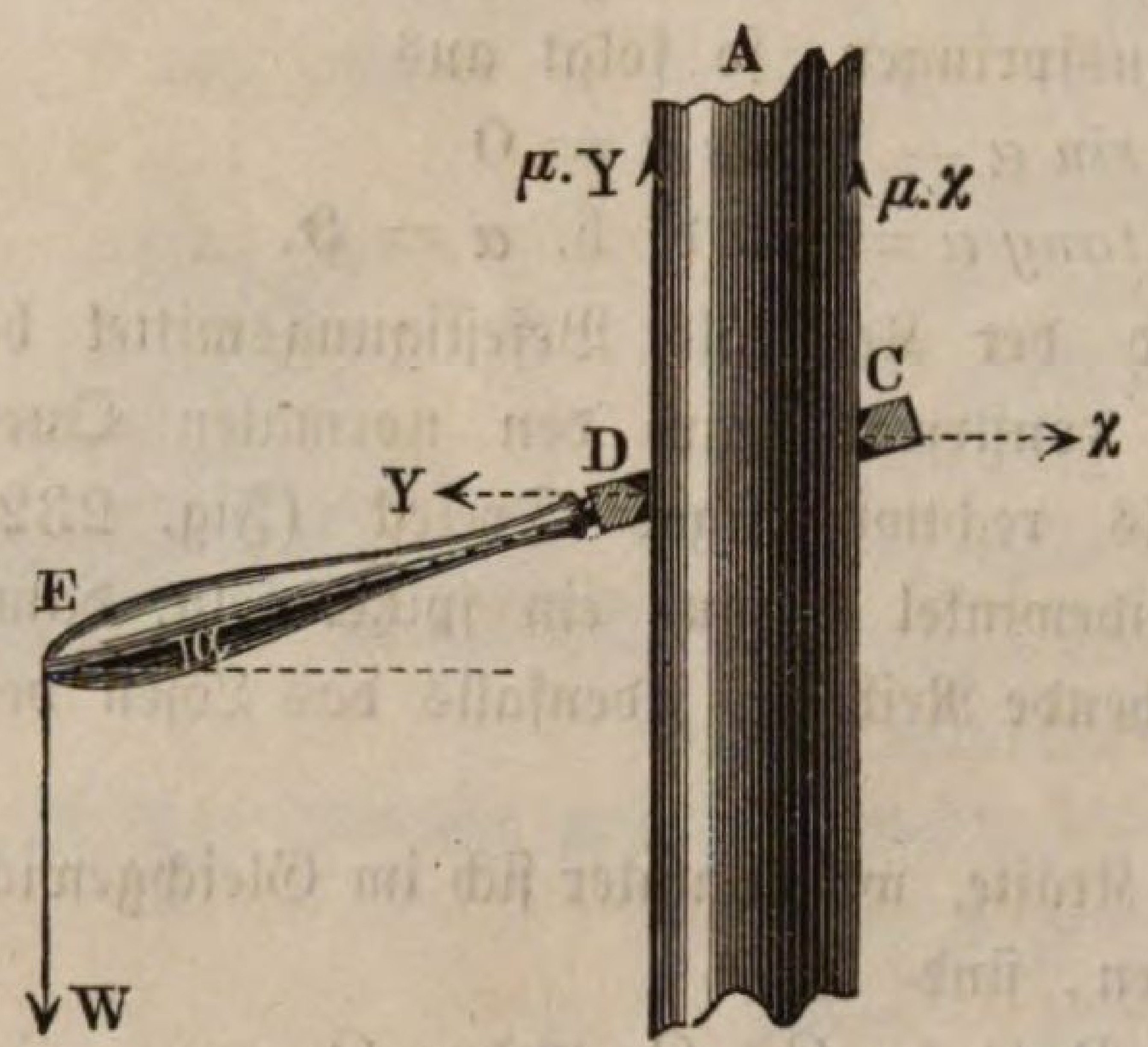
$$\alpha < 2\, \vartheta.$$

In der Praxis läßt man den Befestigungskeil selten in eine vollkommene Schneide auslaufen, sondern stumpft denselben am unteren Ende ab, wie die Figur 232 zeigt. Die Neigung der Seite BE zu der Linie EC giebt man durch das Verhältniß zwischen BC und der Länge, $EC = l$, des Keiles an, und zwar nimmt man bei Keilen, die eine weitere Befestigung nicht erfahren, BC gleich $^1/_{20}$ bis $^1/_{15}\, l$. Wird dagegen der Keil noch durch eine besondere

Schraube befestigt, so ist BC gewöhnlich gleich $\frac{1}{10} l$. Für $BC = \frac{1}{20} l$ ist $tg\,\alpha = 0{,}05$, daher $\alpha = 2^\circ 51' 45''$, für $BC = \frac{1}{10} l$ ist $tg\,\alpha = 0{,}1$ und $\alpha = 5^\circ 42' 38''$. Nimmt man $\mu = 0{,}16$, also $\vartheta = 9^\circ 5' 25''$, so ergiebt sich im ersten Falle: $P = -0{,}27\, Q_1$ und im zweiten: $P = -0{,}22\, Q_1$, wodurch für Befestigungskeile die Bedingung erfüllt ist, daß die Kraft P zum Festhalten nicht allein nicht nothwendig ist, sondern daß sogar noch ein nach entgegengesetzter Richtung von P wirksamer Druck von 0,27 Q_1 resp. 0,22 Q_1 angebracht werden muß, um den Gleichgewichtszustand herzustellen.

14. Es sei um den verticalen Cylinder A (Fig. 233) ein Ring CD gelegt, dessen innerer Durchmesser größer als der Durchmesser des Cylinders, und mit dem Ringe ein Stiel DE verbunden, an dessen Ende E ein Gewicht W aufgehangen ist. Dadurch wird der Ring eine geneigte Lage annehmen, indem sich die Punkte C und D dicht an den Cylinder legen, und die in diesen Punkten erzeugte Reibung kann unter Umständen ein Niedergehen des Cylinders verhindern. Es ist die hierfür nothwendige Bedingung zu entwickeln. Die Vorrichtung ist bekannt unter dem Namen «Saladin'sche Einklinkung durch Friction».

Fig. 233.



Nennen wir den Durchmesser CD des Ringes b, seine Neigung zum Horizont α, die Länge DE des Stieles a, führen bei C und D die normalen und tangentialen Reactionen ein und denken sämmtliche Kräfte in derselben Verticalebene, so haben wir für den Gleichgewichtszustand die drei Gleichgewichtsbedingungen:

$$W - \mu X - \mu Y = 0,$$

$$X - Y = 0,$$

$$X a \sin\alpha + \mu X a \cos\alpha + \mu Y (a + b) \cos\alpha - Y (a + b) \sin\alpha = 0.$$

Hieraus folgt:

$$X = Y = \frac{W}{2\mu},$$

$$tang\,\alpha = \mu \frac{2a + b}{b}.$$

15. Es sei eine Schraube in Verbindung mit ihrer vollkommen festen Mutter gegeben (Fig. 234). Ein in Richtung der Schraubenachse oder parallel derselben wirksamer Druck Q würde, wenn die Mutter nicht vorhanden wäre, eine Bewegung der Schraube in Richtung des Druckes hervorrufen. Die Mutter verhindert diese beabsichtigte Bewegung und gestattet dagegen eine Drehung

um die Achse. Zur Verhinderung derselben können wir im Umfange der Schraube, normal zur Achse derselben, eine Kraft P_1 anbringen, die sich der Drehung widersetzt. Denken wir die Fläche des Schraubengewindes (Spiralfläche) aus unendlich vielen Schraubenlinien zusammengesetzt, so wirken die beiden

Fig. 234.

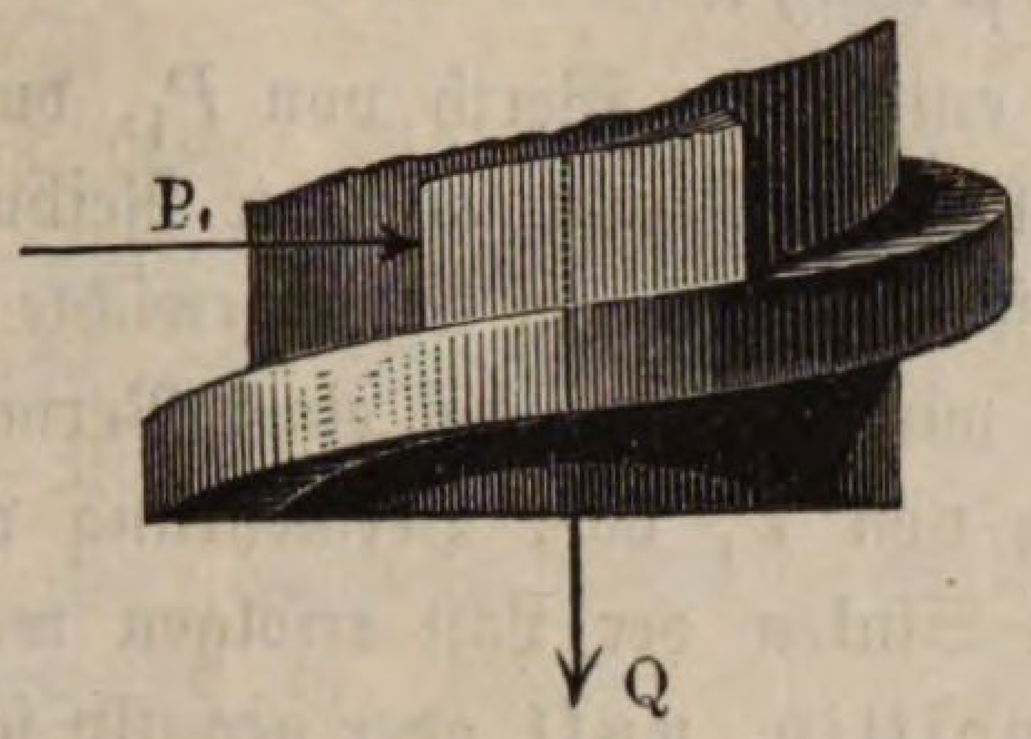
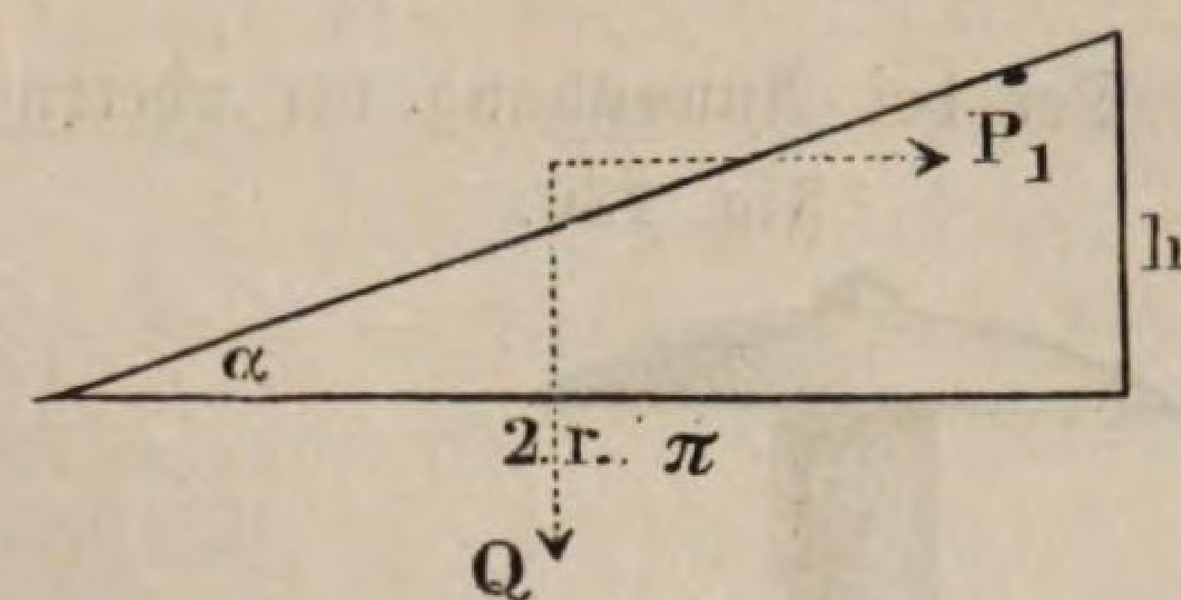


Fig. 235.



Kräfte Q und P_1 in einer mittleren Schraubenlinie, für die h (Fig. 235) die Ganghöhe und r der Halbmesser des zugehörigen Cylinders sein mag. Diese mittlere Spirallinie wickeln wir ab, so entsteht eine um den Winkel α zur Horizontalen geneigte gerade Linie, die verkörpert eine geneigte Ebene vorstellt, auf welche die beiden Kräfte Q und P_1 wirken. Für den Gleichgewichtszustand erhalten wir nach Nummer 9 dieser Uebungen, da P_1 parallel der Grundebene und Q parallel der Höhe wirkt, die Gleichung:

$$P_1 = Q \frac{\sin\alpha \mp \mu \cos\alpha}{\cos\alpha \pm \mu \sin\alpha}.$$

Die oberen Zeichen gelten für den Fall, daß P_1 und die Reibung der Kraft Q das Gleichgewicht halten, während die unteren Zeichen sich darauf beziehen, daß P_1 allein die Kraft Q und die Reibungswiderstände so eben überwindet. Aus der angegebenen Formel leiten wir folgende ab:

$$P_1 = Q \frac{\tang\alpha \mp \mu}{1 \pm \mu \tang\alpha},$$
$$= Q \frac{h \mp \mu 2\pi r}{2\pi r \mp \mu h}.$$

Um den Einfluß der Reibung kennen zu lernen, zerlegen wir den Werth von P_1 in zwei Summanden:

a. für die oberen Zeichen:

$$P_1 = \begin{cases} Q \tang\alpha - \mu Q \dfrac{1 + \tang\alpha^2}{1 + \mu \tang\alpha} \\ Q \dfrac{h}{2\pi r} - \mu Q \dfrac{4\pi^2 r^2 + h^2}{2\pi r (2\pi r + \mu h)}, \end{cases}$$

b. für die unteren Zeichen:

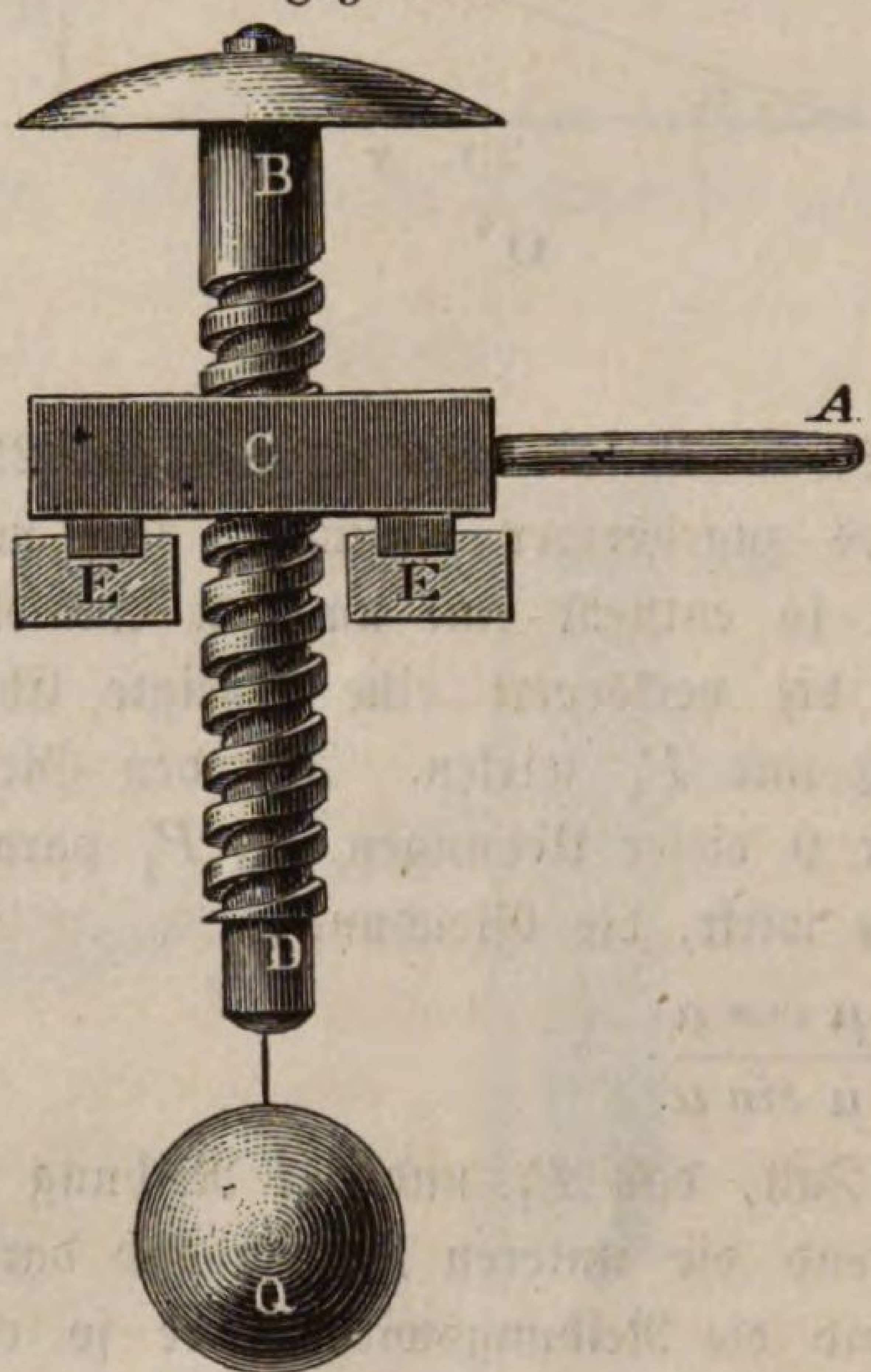
$$P_1 = \begin{cases} Q \tang\alpha + \mu Q \dfrac{1 + \tang\alpha^2}{1 - \mu \tang\alpha} \\ Q \dfrac{h}{2\pi r} + \mu Q \dfrac{4\pi^2 r^2 + h^2}{2\pi r (2\pi r - \mu h)}. \end{cases}$$

Wirkt die Kraft P_1, wie es gewöhnlich der Fall ist, nicht im Umfange der Schraube, sondern wird sie (Fig. 236) durch eine Kraft P ersetzt, die an einem Arm $CA = p$ wirkt, so sind die Momente der in parallelen Ebenen wirksamen Kräftepaare $P_1 r$ und Pp gleich zu setzen und wir erhalten:

$$P = \frac{r}{p} P_1 = \frac{r}{p} Q \frac{tang\,\alpha \mp \mu}{1 \pm \mu\, tang\,\alpha}.$$

Der bei Anwendung der oberen Zeichen entwickelte Werth von P_1, durch den also im Verein mit der Reibung die Last Q gerade im Gleichgewichte erhalten wird, so daß bei einer Verminderung von P_1 oder Vermehrung von Q ein Sinken der Last erfolgen wird, kann positiv, null oder negativ sein, je nachdem $tang\,\alpha \begin{cases} > \mu \\ = \mu \\ < \mu \end{cases}$ ist.

Fig. 236.



Ist P_1 positiv, so ist eine Kraft zur Aufrechthaltung des Gleichgewichtes nothwendig, d. h. die durch Q beabsichtigte Bewegung wird erfolgen, sobald P_1 aufgehoben oder vermindert wird.

Ist P_1 null, so halten die Reibungswiderstände die Last Q allein im Gleichgewichte, eine Vermehrung von Q bringt also Bewegung hervor.

Ist P_1 endlich negativ, so übertreffen die Reibungswiderstände die Last Q, und es muß P_1 für das verlangte Gleichgewicht so wirksam sein, daß es die durch Q beabsichtigte Bewegung unterstützt.

Wird die Schraube als Befestigungsmittel benutzt, so müssen die Reibungswiderstände überwiegend sein, es muß also

$$tang\,\alpha < \mu, \text{ d. h. } P_1 < 0$$

sein.

Wird die Schraube dagegen in Präge- und Stoßwerken angewendet, so soll sie durch einen in ihrer Achse wirksamen Gegendruck zurückspringen, sobald die, das Gleichgewicht bedingende Kraft P_1 vermindert wird.

Für diesen Fall ist

$$tang\,\alpha > \mu, \text{ d. h. } P_1 > 0.$$

Die Schrauben mit mehrfachen Gewinden genügen dieser Bedingung.

16. Welchen Werth erhält P_1 für $\mu = 0{,}16$, wenn:

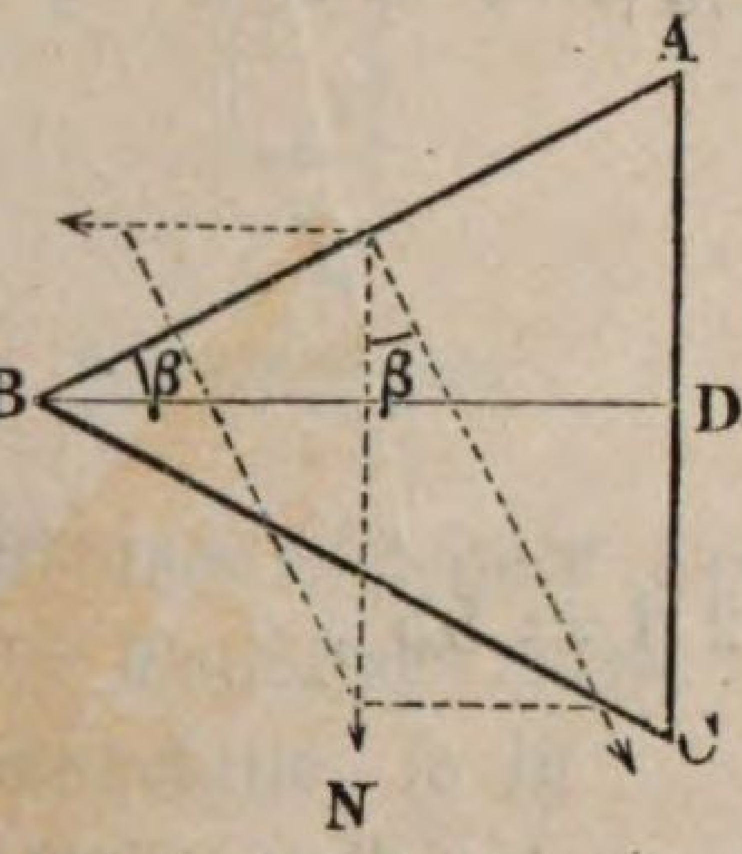
a)	b)
$Q = 250$ Kilogramm	$Q = 750$ Kilogramm
$\alpha = 6^\circ 10'$	$\alpha = 2^\circ 40'$
$P_1 = \begin{cases} 68{,}2 \text{ Kilogramm} \\ -12{,}75 \text{ »} \end{cases}$	$P_1 = \begin{cases} 156 \text{ Kilogramm} \\ -84{,}4 \text{ »} \end{cases}$

17. Welche Last Q kann mit einer Schraube gehoben werden, wenn die Kraft P an einem Arm von 2^m wirkt, der Halbmesser der Schraube $0{,}026^m$ beträgt und der Reibungscoefficient $\mu = 0{,}16$ ist?

a) $P = 45$ Kilogramm	b) $P = 16$ Kilogramm
$\alpha = 9^\circ 10'$	$\alpha = 3^\circ$
$Q = 10492$ Kilogramm	$Q = 5746$ Kilogramm

18. Für scharfgängige Schrauben, die fast allein als Befestigungsschrauben Verwendung finden, sind die Reibungswiderstände auf der Oberfläche des Schraubenkörpers auf folgende Weise zu berechnen. Nehmen wir in Nr. 15 Q vertical und P_1 horizontal wirksam an, so ist der Normaldruck N zur herausgegriffenen mittleren Spirallinie $N = P_1 \sin\alpha + Q \cos\alpha$. Derselbe ist, wenn ABC (Fig. 237) den Durchschnitt eines dreiseitigen Schraubenganges vorstellt, normal zu BD gerichtet, welche Linie die Gangtiefe vorstellt und annähernd mit der Neigung der mittleren Spirallinie zusammenfällt. Zerlegt man N normal zu AB und horizontal, so werden sich die horizontalen Componenten gegenseitig aufheben, und die Normalcomponente $\frac{N}{\cos\beta}$, unter β den halben Kantenwinkel verstanden, ruft die Reibung hervor. Die in Richtung der mittleren Spirallinie von P_1 herrührende Componente $P_1 \cos\alpha$ hat den von Q herrührenden Zug nach unten $Q \sin\alpha$ und die Reibung beim Anziehen der Schraube zu überwinden, während bei dem bloßen Festhalten derselben die Reibung der Componente $P_1 \cos\alpha$ zu Hülfe kommt. Die Gleichgewichtsbedingung ist demnach

Fig. 237.



$$P_1 \cos\alpha = Q \sin\alpha \pm \mu \frac{N}{\cos\beta}.$$

Zwischen der Schraubenmutter und dem befestigten Körper, tritt bei versuchter Lösung der Schraube ebenfalls Reibung, von der Last Q herrührend, auf, die in einem Kreise vom Halbmesser ϱ wirksam gedacht werden mag, für welche Reibung wir einen zweiten Reibungscoefficienten μ' einführen wollen.

Zur Bestimmung der Gleichgewichtsbedingung benutzen wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Die bei einer Umdrehung der Schraube zurückgelegten Wege sind:

für die Kraft $P_1 \ldots 2 r \pi$,

» » » $Q \ldots$ die Ganghöhe h,

» den Reibungswiderstand $\mu \frac{N}{\cos\beta}$ die Hypotenuse $\sqrt{h^2 + (2 r \pi)^2}$,

» » » $\mu' Q$ zwischen Mutter und dem befestigten Körper, $2 \pi \varrho$.

Für das Anziehen der Schraube, also Ueberwindung sämmtlicher Widerstände, haben wir:

$$P.2r\pi - Qh - \mu . 2r\pi \frac{N}{cos\,\beta} \sqrt{l + \left(\frac{h}{2r\pi}\right)^2} - \mu' Q.2\pi\varrho = 0.$$

Die Mutter ist als ein Stützzapfen mit ringförmigem Querschnitt ~~cos β~~, der sich nicht dauernd in Bewegung befindet, anzusehen, so daß wir für ϱ, wenn r_1 den Halbmesser der Mutter bezeichnet n. §. 47 A, 1[a] setzen dürfen: $\frac{2}{3}\frac{r_1{}^3 - r^3}{r_1{}^2 - r^2}$. Nimmt man, wie es gewöhnlich der Fall ist, $r_1 = 2r$, so ist $\varrho = {}^{14}/_9\, r$ und wir haben dann:

$$P_1 - Q\,tang\,\alpha - \mu\,\frac{N}{cos\,\beta}\frac{1}{cos\,\alpha} - \mu' Q\,.\,{}^{14}/_9 = 0,$$

woraus sich ergiebt, wenn wir für N den oben angegebenen Werth einführen:

$$P_1 - Q\,tang\,\alpha - \mu\,\frac{P_1\,tang\,\alpha + Q}{cos\,\beta} - {}^{14}/_9\,\mu' Q = 0,$$

$$P_1 = Q\,\frac{tang\,\alpha + \dfrac{\mu}{cos\,\beta} + {}^{14}/_9\,\mu'}{1 - \mu\,\dfrac{tang\,\alpha}{cos\,\beta}}.$$

Als Beispiel sei $\mu = \mu' = 0{,}16$; $\alpha = 2^\circ 40'$; $2\,\beta = 55^\circ$,

$$P_1 = 0{,}5\,Q.$$

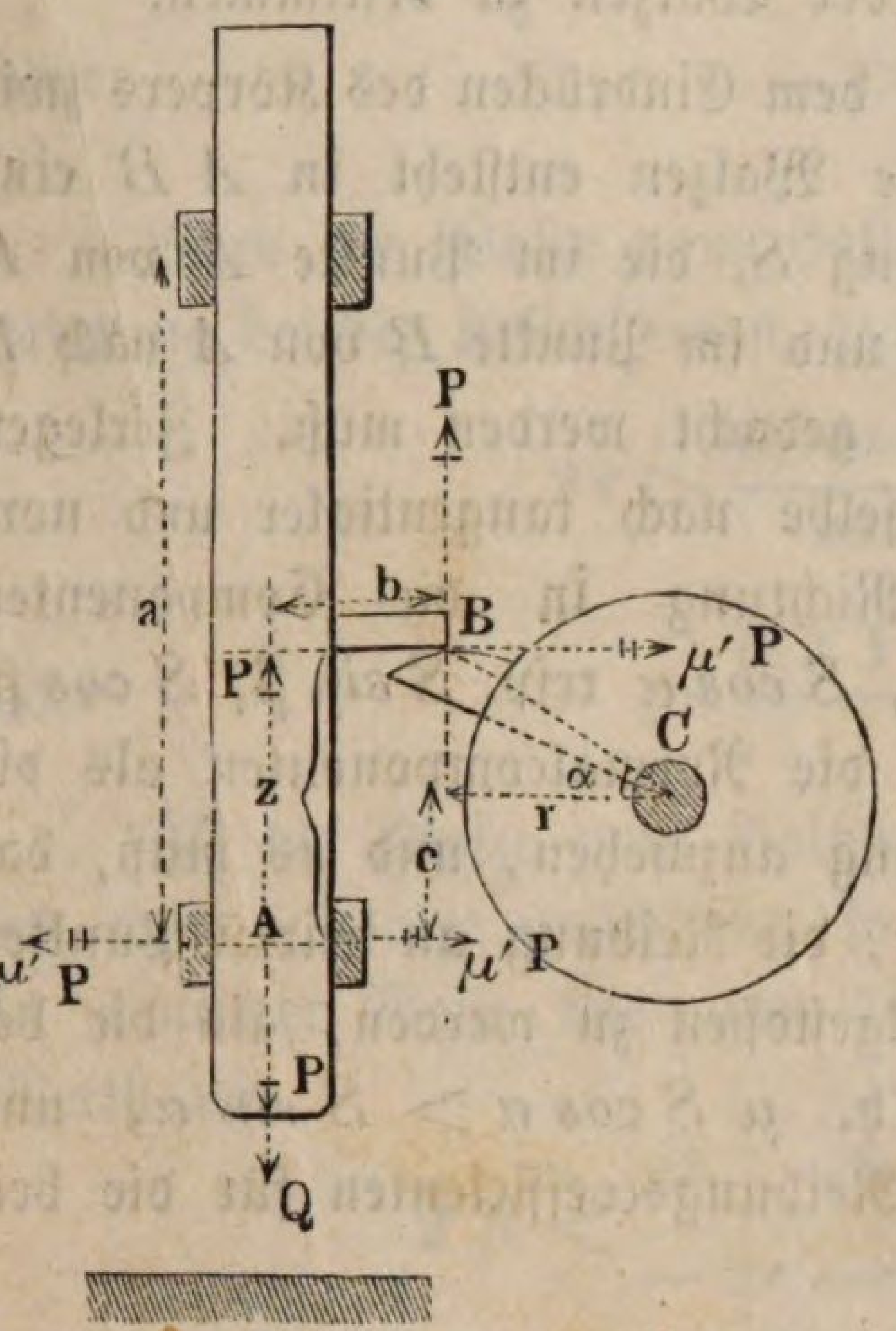
d. h. die zum Festdrehen der Schraube, an dem Umfange derselben erforderliche Kraft, beträgt ungefähr die Hälfte des Drucks, welcher durch das Anziehen der Schraube in Richtung ihrer Achse hervorgerufen wird, der also die zu befestigenden Theile zusammenhält.

19. Eine Stampfe kann sich in verticaler Richtung auf und nieder bewegen. Das Ausweichen der Stampfe nach irgend einer andern Richtung wird durch zur Seite angebrachte Scheidelatten gehindert. Die Bewegung wird durch eine Daumenwelle hervorgebracht, d. i. eine horizontal gelagerte Welle mit gehörig abgerundeten Vorsprüngen, wobei der Daumen gegen einen normal zur Stampfe angebrachten Hebezapfen drückt. Das Gewicht der Stampfe mit Zubehör sei Q (Fig. 238), der normal zum Hebezapfen ausgeübte Druck P, die Entfernung der Scheidelatten a, die Länge des Hebezapfens b, die veränderliche Entfernung desselben von der durch die Mitte der untersten Scheidelatte gelegten Horizontalen sei gleich z. An der unteren Begrenzungsfläche des Hebezapfens wird durch den Druck P Reibung erzeugt, deren Werth gleich $\mu' P$ ist, wenn μ' den Reibungscoefficienten zwischen Daumen und Hebezapfen bezeichnet.

Es mögen P, Q und $\mu' P$ in einer Ebene liegen; die drei Gleichgewichtsbedingungen reduciren sich auf eine, da nur nach Richtung der Stampfenachse Bewegung möglich ist. Wir nehmen den Durchschnittspunkt A

der Stampfenachse mit der durch die Mitte der unteren Scheidelatte gelegten Horizontalen, zum Coordinaten-Anfangspunkte, die Stampfenachse als Z-Achse, und legen die beiden Kräfte P und $\mu' P$ parallel ihrer Richtung nach A.

Fig. 238.



Hierbei entstehen die Kräftepaare $+\mu' Pz$ und $-Pb$. Diese bringen wir auf die Breite a, so ist der durch A normal zur Scheidelatte gehende Druck:

$$\mu' P - \mu' P \frac{z}{a} + P \frac{b}{a}$$

$$= \frac{\mu' P (a - z) + Pb}{a}.$$

Der Druck gegen die obere Scheidelatte ist:

$$\pm \left(P \frac{b}{a} - \mu' P \frac{z}{a}\right),$$

je nachdem $Pb \gtrless \mu' Pz$ ist.

Die aus diesen Drucken hervorgehende Reibung muß mit den in A nach verticaler Richtung wirksamen Kräften P und Q im Gleichgewichte sein.

Bezeichnet daher μ den Reibungscoefficienten zwischen Stampfe und Scheidelatte, so ist

$$P - Q = \mu \frac{\mu' P (a - z) + Pb + Pb - \mu' Pz}{a},$$

oder:

$$P - Q = \mu \frac{\mu' P (a - z) + Pb + \mu' Pz - Pb}{a},$$

d. h.:

$$P = \frac{a Q}{a - 2 \mu b - \mu \mu' (a - 2 z)},$$

oder:

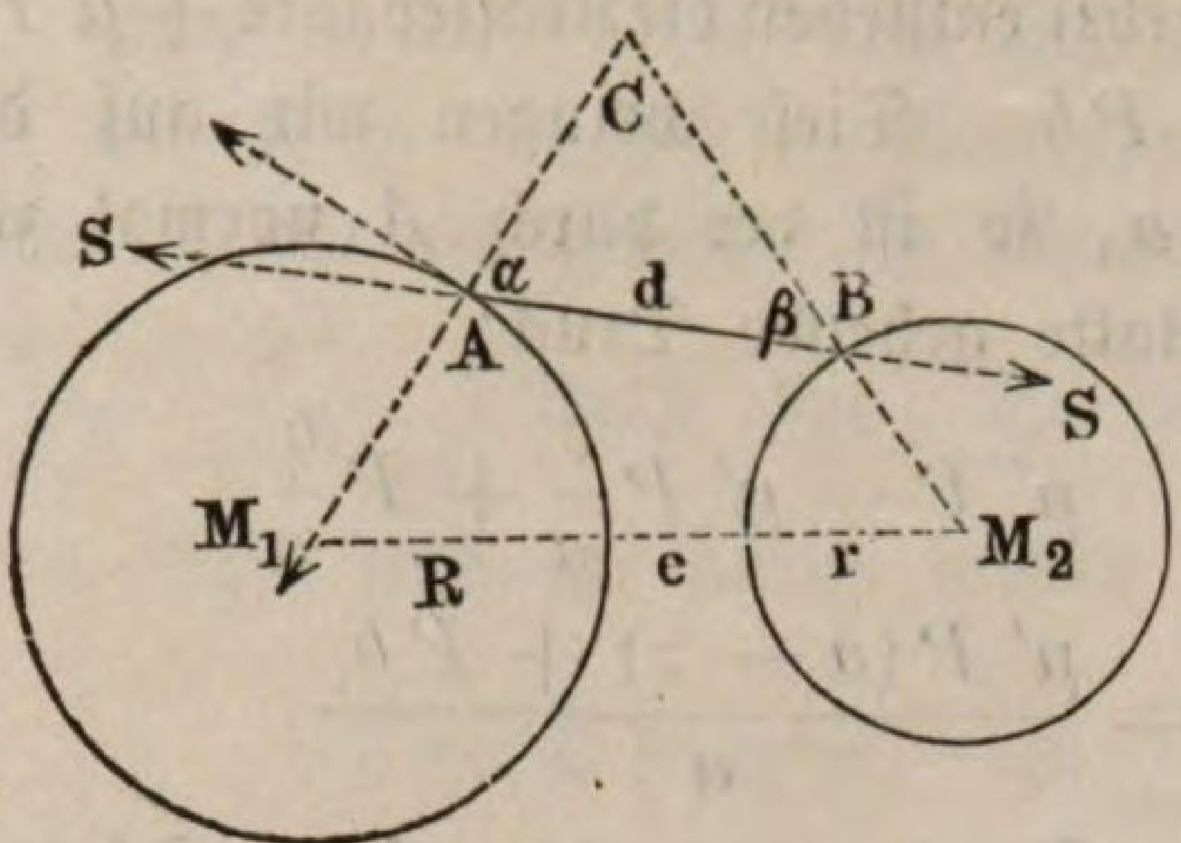
$$P = \frac{Q}{1 - \mu \mu'}.$$

Aus dem ersten Ausdrucke für P lernen wir, daß man in der Praxis an Kraft ersparen kann, wenn man die Stampfen recht lang, die Hebezapfen dagegen recht kurz construirt. Das letztere ist bei den geschlitzten Stampfen im größten Maße erreicht, indem hier b gleich 0 ist.

20. Es stellen die beiden Kreise M_1 und M_2 (Fig. 239 a. f. S.) von den Halbmessern R und r den normalen Querschnitt zweier Quetschwalzen vor, deren geringste Entfernung gleich e sein mag. Zwischen beide Walzen werde ein Körper gesteckt, dessen Dimensionen größer als der Abstand der beiden Walzen sein mögen, und welcher dieselben in den Punkten A und B berührt. Wird

der Körper durch irgend eine Kraft zwischen die Walzen gedrängt und dann sich selbst überlassen, so soll derselbe von den Walzen erfaßt und durchgezogen werden. Für diese Bedingung sind die Radien der Walzen zu bestimmen.

Fig. 239.



Bei dem Eindrücken des Körpers zwischen die Walzen entsteht in AB eine Spannung S, die im Punkte A von B nach A und im Punkte B von A nach B wirksam gedacht werden muß. Zerlegen wir dieselbe nach tangentialer und normaler Richtung in die Componenten $S \sin \alpha$, $S \cos \alpha$ resp. $S \sin \beta$, $S \cos \beta$, so sind die Normalcomponenten als die Ursache der bei A und B entstehenden Reibung anzusehen, und es muß, damit der Körper von den Walzen gefaßt werde, die Reibung an beiden Punkten gleichzeitig größer, als das Streben zurückgestoßen zu werden, als die betreffenden Tangentialcomponenten sein, d. h. $\mu S \cos \alpha > S \sin \alpha$, und $\mu_1 S \cos \beta > S \sin \beta$, wenn μ und μ_1 die Reibungscoefficienten für die beiden Walzen bezeichnen.

Ist nur eine dieser Bedingungen erfüllt, so wird der Körper vor den Walzen eine Drehung erfahren, und findet keine derselben statt, so bleibt der Körper in Ruhe. Aus den obigen Ungleichheiten ergiebt sich hiernach, als Bedingung des Einziehens:

$$tang\, \alpha < \mu$$

gleichzeitig mit

$$tang\, \beta < \mu_1.$$

Nehmen wir α gleich β und μ als den kleineren der beiden Reibungscoefficienten, so reduciren sich die beiden Ungleichheiten auf die eine:

$$tang\, \alpha < \mu \text{ oder } \alpha < \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Es sei $AB = d$ die Dicke des durch die Walzen zu ziehenden Körpers, so ergiebt sich aus der Figur

$$M_1 M_2^2 = (M_1 C - M_2 C)^2 + 4\, M_1 C \,.\, M_2 C \sin \frac{\gamma}{2}^2$$

$$2R = \frac{d^2 - e^2 + 2r\,(d \cos \alpha - e)}{2r \sin \alpha^2 - (d \cos \alpha - e)} \quad \ldots\ldots \quad [2]$$

Aus dieser Gleichung läßt sich R berechnen, wenn r gegeben und die Bedingung unter 1 dabei berücksichtigt wird. Für den Gleichgewichtszustand ist $\alpha = \vartheta$ zu setzen, wodurch der Quotient rechts einen kleineren Werth erhält, so daß die Bedingung des Einziehens der Walzen durch die Ungleichheit ausgesprochen ist.

$$2R > \frac{d^2 - e^2 + 2r\,(d \cos \vartheta - e)}{2r \sin \vartheta^2 - (d \cos \vartheta - e)} \quad \ldots\ldots \quad [3]$$

Haben die beiden Walzen gleichen Durchmesser, dann ist

$$2R = 2r > \frac{d - e}{1 - \cos\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

oder

$$> \frac{(d - e)\sqrt{1 + \mu^2}}{\sqrt{1 + \mu^2} - 1}.$$

Wird die Walze vom Halbmesser R zu einer ebenen Platte, wie die Anordnung bei den Kollersteinen, gegeben, so ist $R = \infty$ zu setzen, und wir erhalten:

$$2r > \frac{d \cos\vartheta - e}{\sin\vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [5]$$

oder

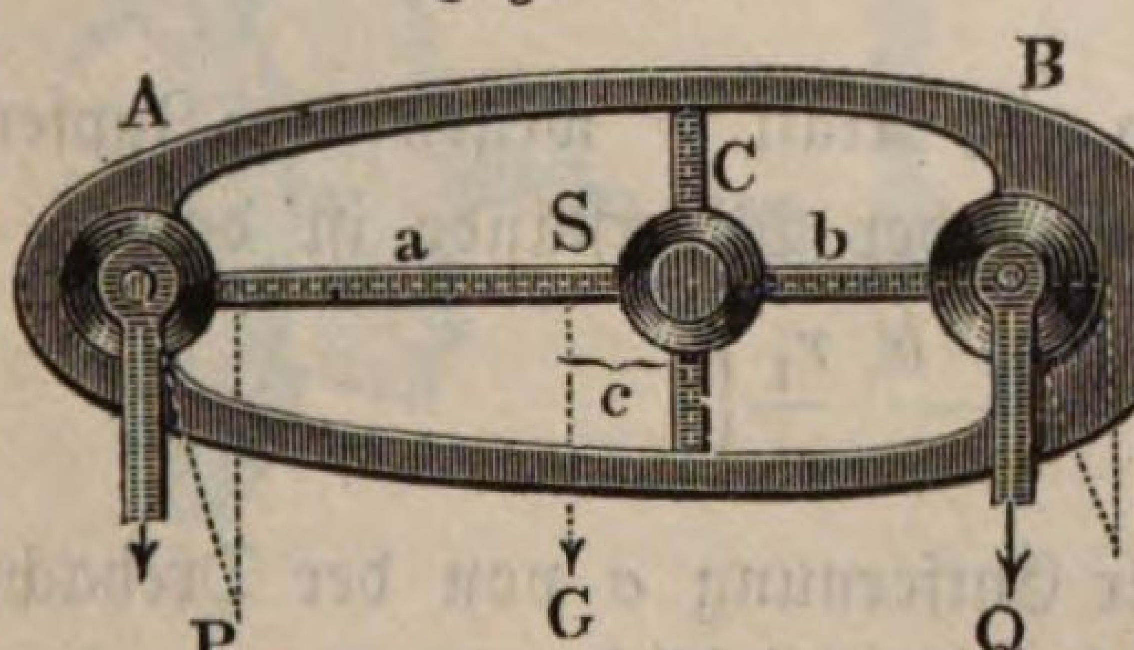
$$> \frac{d\sqrt{1 + \mu^2} - e(1 + \mu^2)}{\mu^2}.$$

Ist die Walze vom Halbmesser R eine hohle, also eine Trommel, welche die andere Walze umschließt, so ist R negativ zu nehmen, und es findet sich in ähnlicher Weise wie oben die nothwendige Bedingung, daß der absolute Werth von

$$2R < \frac{d^2 - e^2 + 2r(d\cos\vartheta - e)}{-2r\sin\vartheta^2 + d(\cos\vartheta - e)} \text{ sein muß} \quad . \quad . \quad . \quad [6]$$

21. Ein zweiarmiger Hebel AB (Fig. 240) mit den Armen a und b habe das Gewicht G, der Halbmesser des Drehzapfens sei r_1 und der Schwerpunkt S liege um c von dem Mittelpunkte C der Drehachse entfernt. An dem einen Ende B hängt an einem Zapfen vom Halbmesser r_2 eine Stange, in deren Richtung eine Last Q normal zum Hebel wirkt. Am andern Ende A desselben sei in gleicher Weise an einem Zapfen vom Halbmesser r_3 eine Stange aufgehängt, in deren Richtung normal zum Hebel eine Kraft P wirken soll, die der Last Q und allen Widerständen das Gleichgewicht hält.

Fig. 240.



Wie groß ist dieselbe, wenn der Reibungscoefficient an allen drei Zapfen gleich μ gesetzt wird?

Wegen der Reibung an den Stangenenden ist das Moment von P:

$$P(a - x)$$

und das von Q:

$$Q(b + y),$$

indem sich bei der eben anfangenden Bewegung der Arm von P vermindert, der von Q vermehrt, wegen der am Zapfen der Stangen stattfindenden Reibung.

Px und Qy sind als die Momente der Reibung an den Umfängen der Stangenzapfen anzusehen, und deshalb beziehlich gleich $\mu \frac{4}{\pi} P r_3$ und

$\mu \frac{4}{\pi} Q r_2$ zu setzen. Wir führen bei den numerischen Rechnungen ein: für allemal statt $\mu \frac{4}{\pi}$ den Coefficienten μ_1 ein. Sehen wir zuerst noch vorläufig von der Reibung an dem Drehzapfen ab, so ist

$$P(a - x) - Q(b + y) = 0$$

$$P = Q \frac{b + \mu_1 r_2}{a - \mu_1 r_3} = Q \frac{(b + \mu_1 r_2)(a + \mu_1 r_3)}{a^2 - (\mu_1 r_3)^2}.$$

Führt man die angedeutete Multiplikation im Zähler aus und vernachlässigt dann im Zähler und Nenner die Glieder mit μ_1^2, da sie gegen die übrigen Summanden als verschwindend klein angesehen werden können, so entsteht

$$P = Q \frac{b}{a} + \mu_1 Q \frac{a r_2 + b r_3}{a^2},$$

in welcher Gleichung der zweite Summand die Vermehrung der Kraft P, welche zur Ueberwindung der betreffenden Reibung nothwendig ist, ausdrückt. Berücksichtigen wir andererseits die Reibung am Drehzapfen des Hebels, so ist

$$P a - Q b - \mu_1 (P + Q) r_1 = 0 \text{ und hieraus}$$

$$P = Q \frac{b + \mu_1 r_1}{a - \mu_1 r_1} = Q \frac{(b + \mu_1 r_1)(a + \mu_1 r_1)}{a^2 - (\mu_1 r_1)^2}.$$

Der Ausdruck liefert, wenn wir, wie oben, die sehr kleinen Summanden vernachlässigen,

$$P = Q \frac{b}{a} + \mu_1 Q \frac{a + b}{a} \cdot \frac{r_1}{a},$$

worin der zweite Summand die Vermehrung der Kraft P wegen der Zapfenreibung bezeichnet. Bei Berücksichtigung sämmtlicher Widerstände ist daher

$$P = Q \frac{b}{a} + \mu_1 Q \left\{ \frac{a r_2 + b r_3}{a^2} + \frac{a + b}{a} \cdot \frac{r_1}{a} \right\}.$$

Wirkt das Gewicht G des Hebels in der Entfernung c von der Drehachse und kommt dasselbe der Kraft P zu Hülfe, so ist schließlich

$$P = Q \frac{b}{a} + \mu_1 Q \left\{ \frac{a r_2 + b r_3}{a^2} + \frac{a + b}{a} \cdot \frac{r_1}{a} \right\} + G \frac{\mu_1 r_1 - c}{a}.$$

War der Hebel gleicharmig, also $a = b$, und liegt der Schwerpunkt des Hebels in der Drehachse, so ist $c = 0$ und

$$P = Q + \mu_1 Q \frac{r_2 + r_3 + 2 r_1}{a} + \mu_1 G \frac{r_1}{a}.$$

Nehmen wir endlich noch die Stangenzapfen r_2 und r_3 gleich groß $= r$ und führen statt der Halbmesser die Durchmesser d und d_1 ein, so ist

$$P = Q \left\{ 1 + \mu_1 \frac{d}{a} + \mu_1 \frac{d_1}{a} \right\} + \mu G \frac{d_1}{2a}.$$

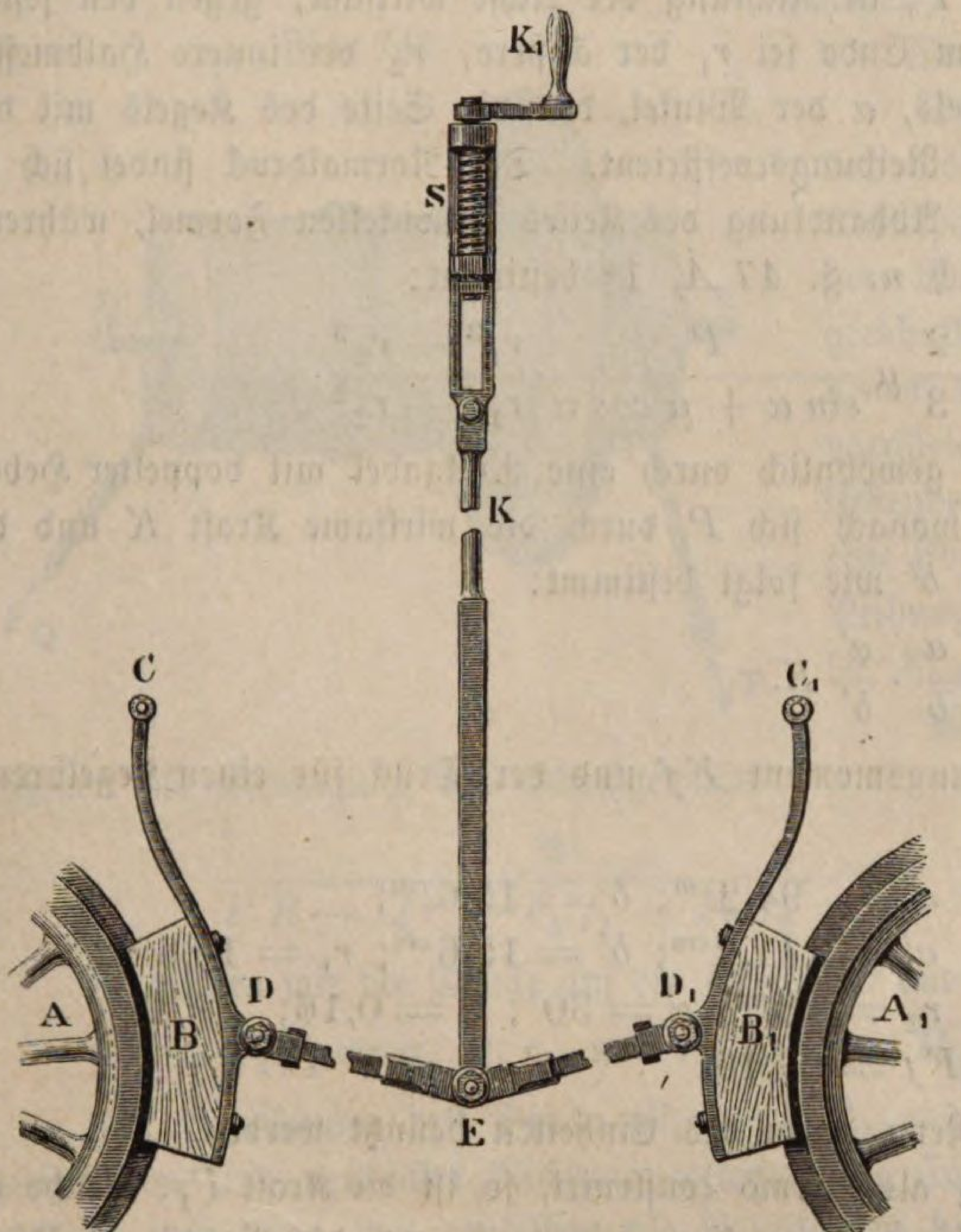
22. Ein Backenbrems besteht aus einem oder zwei Stücken Holz oder Gußeisen, die gegen den Umfang einer Welle oder eines darauf sitzenden Rades

gedrückt werden, hierdurch Reibung erzeugen, um mit Hülfe derselben eine vorhandene Bewegung zu vernichten oder zu verlangsamen.

Es gehören hierzu die sogenannten Schleifzeuge, die bei den Fuhrwerken zur Anwendung kommen.

Es soll der Reibungswiderstand F bei einem Schleifwerke (Fig. 241) für Eisenbahnräder berechnet werden, bei welchem das Bremsen an zwei Rädern A und A_1 zu gleicher Zeit bewirkt wird. Zu dem Ende wird der Kniehebel $D\,E\,D_1$ mittelst der Schraube S in eine möglichst horizontale Lage gebracht, wodurch die beiden Laschen B und B_1 gegen die Radumfänge gedrückt werden. Die Kraft an der Kurbel sei K_1, Länge derselben a, Halbmesser der Schraube r, h deren Ganghöhe, α der Neigungswinkel und μ Reibungscoefficient für die Bewegung der Schraube. Weiter sei β der Winkel zwischen einem Arme des Kniehebels und der Zugstange $E\,K$, μ' der Reibungscoefficient zwischen Radumfang und Backe.

Fig. 241.



Für diese Annahmen ist:

$$F = \mu' \frac{a}{r} K_1 \frac{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \operatorname{tang}\beta,$$

oder:

$$F = \mu' \frac{a}{r} K_1 \operatorname{cotg}(\alpha + \vartheta) \operatorname{tang}\beta.$$

Es sei beispielsweise:

$K_1 = 15$ Kilogramm; $a = 23{,}5^{cm}$; $r = 2{,}6^{cm}$; $\alpha = 6^\circ 5'$;
$\beta = 80^\circ$; $\mu' = 0{,}4$; $\mu = 0{,}16$.

Es ist $\operatorname{tang}\vartheta = \mu = 0{,}16$, daher $\vartheta = 9^\circ 5' 25''$ und $F = 1134$ Kilogr.

23. Liegen die Achsen zweier Wellen in einer geraden Linie, und wird die Bewegung der einen an die andere übertragen, so heißt die hierzu nöthige Vorrichtung eine Kuppelung. Geschieht die Mittheilung der Bewegung durch eine erzeugte Reibung, so nennt man den verbindenden Theil eine Frictionskuppelung.

Die Reibung mag auf den Mänteln zweier normalen Kegel hervorgebracht werden. Der Kegel auf der treibenden Welle ist fest und bietet der Reibung eine concave Oberfläche dar, bei dem andern, der auf der getriebenen Welle verschiebbar ist, geschieht die Reibung auf der convexen Oberfläche. Die Vorrichtung wird auch als Brems benutzt.

Es ist das Reibungsmoment Ff zu bestimmen, wenn der verschiebbare Kegel mit einem Drucke P, in Richtung der Achse wirksam, gegen den festen geschoben wird. Zu dem Ende sei r_1 der äußere, r_2 der innere Halbmesser des reibenden Kegelmantels, α der Winkel, den die Seite des Kegels mit der Achse bildet, und μ der Reibungscoefficient. Der Normaldruck findet sich in dem Werthe $2\,Q$ der bei Abhandlung des Keiles entwickelten Formel, während der Arm der Reibung sich *n.* §. 47 A, 1ª bestimmt:

$$Ff = \frac{2}{3}\mu \frac{P}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Der Druck P wird gewöhnlich durch eine Rückgabel mit doppelter Hebelverbindung übertragen, wonach sich P durch die wirksame Kraft K und die Hebelarme a, b, a' und b' wie folgt bestimmt:

$$P = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} K.$$

Es seien das Reibungsmoment Ff und der Druck für einen Kegelbrems zu bestimmen, wenn:

$$K = 15 \text{ Kilogr.};\ a = 94{,}2^{cm};\ b = 15{,}6^{cm};$$
$$a' = 141{,}2^{cm};\ b' = 15{,}6^{cm};\ r_1 = 15{,}6^{cm};$$
$$r_2 = 13^{cm};\ \alpha = 30^\circ;\ \mu = 0{,}16;$$
$$Ff = 29{,}46,$$

wenn Kilogramm und Meter darin als Einheiten benutzt werden.

Ist die Vorrichtung als Brems construirt, so ist die Kraft P_1, welche im Zapfen der inneren Büchsennabe wirksam sein muß, um die Bremse zu lösen:

$$P_1 = P\,\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}.$$

Bei Benutzung der obigen Zahlenwerthe und $\alpha = 7^\circ$ erhalten wir:

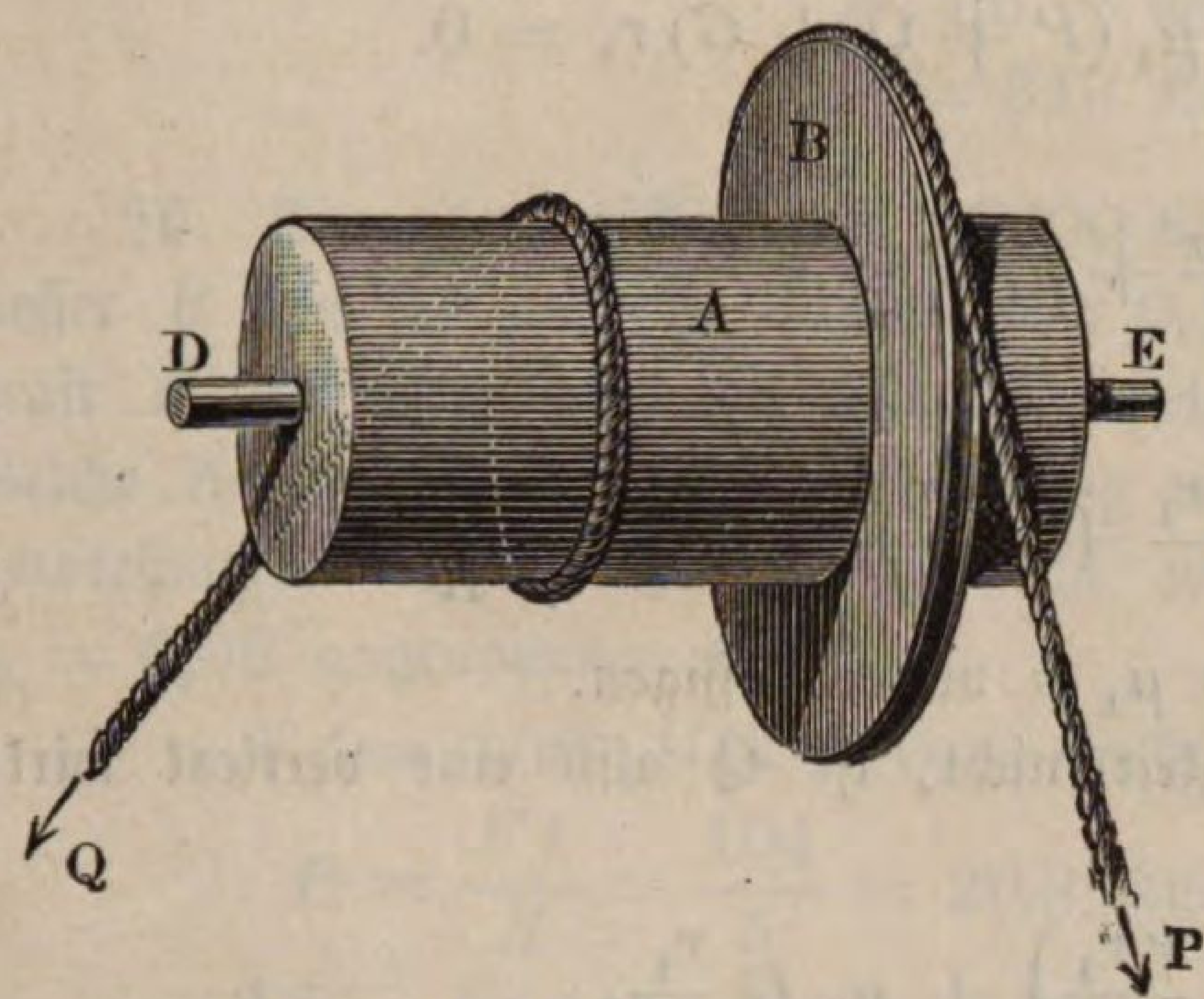
$$P_1 = 107{,}6 \text{ Kilogramm.}$$

24. Auf einer Welle A (Fig. 242), die in Zapfen D und E horizontal gelagert ist, sei eine Scheibe B in einer Verticalebene befestigt. Diese Anordnung heißt das Rad an der Welle.

Eine in tangentialer Richtung zum Umfange der Scheibe wirksame Kraft P soll eine im Umfange der Welle ebenfalls nach tangentialer Richtung wirkende Kraft Q im Gleichgewichte halten, so daß die geringste Vermehrung von P eine Bewegung von Q zur Folge hat. Die Kräfte P und Q mögen in Verticalebenen liegen und in diesen mit der verticalen Richtung die Winkel α und β bilden. Es sei:

R Halbmesser der Scheibe,
r » » Welle,
r_1 » » eines Zapfens,
G das Gewicht der Maschine,
l Länge der Welle von Zapfen zu Zapfen,
a, b, c die Entfernungen der Verticalebenen, in welchen P, G, Q liegen, von dem einen Ende D der Welle.

Fig. 242.



Das Gleichgewicht erfordert, daß die algebraische Summe der Kräftepaare für die Achse DE der Welle, als Momentenachse gleich Null werde. Die verschiedenen Kräfte wirken nämlich in parallelen Ebenen, die daraus entstehenden Kräftepaare können in eine Ebene gebracht werden. Das Reibungsmoment am Zapfen D sei $F_1 f_1$, am Zapfen E, $F_2 f_2$.

Wir haben nach diesen Annahmen als Bedingung des Gleichgewichts:

$$PR - Qr - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0.$$

Bezeichnen wir die Drucke auf die Zapfen D und E mit B_1 und B_2, so ist

$$F_1 f_1 = \mu_1 B_1 r_1, \text{ und } F_2 f_2 = \mu_1 B_2 r_1.$$

Zur Berechnung der Drucke B_1 und B_2 müssen wir die Kräfte nach horizontaler und verticaler Richtung zerlegen, die Componenten an die Zapfen verlegen und dann aus denselben die Resultanten bestimmen. Hiernach ist:

$$B_1 = \frac{1}{l}\sqrt{[P(l-a)\cos\alpha + G(l-b) + Q(l-c)\cos\beta]^2 + [Q(l-c)\sin\beta - P(l-a)\sin\alpha]^2},$$

$$B_2 = \frac{1}{l}\sqrt{(Pa\cos\alpha + Gb + Qc\cos\beta)^2 + (Qc\sin\beta - Pa\sin\alpha)^2}.$$

In diesen Ausdrücken findet sich die zu berechnende Kraft P, weshalb man dieselbe, ohne Berücksichtigung der Widerstände, aus der Gleichung $PR - Qr = 0$ bestimmt, und den hierdurch erhaltenen Werth bei der Berechnung von B_1 und B_2 benutzt. Nachdem noch die Momente der Zapfenreibung bestimmt, läßt sich nun aus der aufgestellten Momentengleichung der genauere Werth von P berechnen.

Ist Q eine zu hebende Last, so ist wegen der verticalen Richtung von Q, $\beta = 0$ zu setzen, dagegen ist der Biegungswiderstand des Seiles in Rechnung zu bringen. In den Ausdrücken für B_1 und B_2 ist hiernach $\sin\beta = 0$ und $\cos\beta = 1$ zu setzen, und die Momentengleichung erhält die Form:

$$PR - Q(r + \psi\,\delta^2) - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0.$$

Wirkt P auch vertical, so ist:

$$B_1 = [P(l-a) + G(l-b) + Q(l-c)]\frac{1}{l},$$

$$B_2 = [Pa + Gb + Qc]\frac{1}{l}.$$

$F_1 f_1 + F_2 f_2 = \mu_1 (P + Q + G) r_1$, und es nimmt deshalb die Momentengleichung die bequemere Form an:

$$PR - Q(r + \psi\delta^2) - \mu_1 (P + Q + G) r_1 = 0.$$

Hieraus erhalten wir:

$$P = Q\frac{r + \psi\delta^2 + \mu_1 r_1}{R - \mu_1 r_1} + \mu_1 G \frac{r_1}{R - \mu_1 r_1},$$

oder

$$P = Q\left(\frac{r + \psi\delta^2 + \mu_1 r_1}{R} + \mu_1 \frac{r r_1}{R^2}\right) + \mu_1 G \frac{r_1}{R},$$

wenn wir die Glieder mit μ_1^2 und $\mu_1 \psi$ vernachlässigen.

Berücksichtigen wir die Steifigkeit nicht, ist Q also eine vertical wirksame Kraft, so ist

$$P = Q\left(\frac{r + \mu_1 r_1}{R} + \mu_1 \frac{r r_1}{R^2}\right) + \mu_1 G \frac{r_1}{R},$$

wobei man in den meisten Fällen den mit dem Gewicht G behafteten Summand fortlassen darf. Sehen wir endlich von sämmtlichen Widerständen ab, so ist

$$P = Q\frac{r}{R},$$

wie wir bereits in Nr. 28 der Uebungen des ersten Capitels gefunden.

25. Eine horizontale Welle, an beiden Enden in Lagern ruhend, trägt zwei Räder, durch welche die Welle in drei Theile getheilt ist, die sich wie 2 : 2 : 1 verhalten. Die Welle hat ein Gewicht von 300 Kilogramm, das Kraftrad, in der Entfernung 2 von dem einen Ende, wiegt 1300 Kilogramm, hat einen Halbmesser von $1{,}5^m$ und die zu suchende Kraft P wirke tangential in einer zur Wellenachse normalen Ebene nach horizontaler Richtung. Das Lastrad in der Entfernung 1 von dem andern Wellenende wiegt 700 Kilogramm, hat einen Halbmesser von $0{,}5^m$ und die Last von 900 Kilogramm wirkt tangential in einer zur Wellenachse normalen Ebene nach verticaler Richtung. Der Halbmesser der Zapfen sei $0{,}105^m$ und der Coefficient für die Zapfenreibung 0,08.

Ohne Berücksichtigung der Widerstände und der Gewichte ist:

$$P \,.\, 1{,}5 = 900 \,.\, 0{,}5, \text{ daher } P = 300 \text{ Kilogr.}$$

Die auftretenden Kräfte wirken bereits entweder nach horizontaler oder nach verticaler Richtung, dieselben sind deshalb zur Berechnung der Zapfendrucke B_1 und B_2 in parallele Componenten an die Wellenden zu verlegen. Nennen wir die Verticalcomponenten V_1 und V_2, die Horizontalcomponenten H_1 und H_2, so ist:

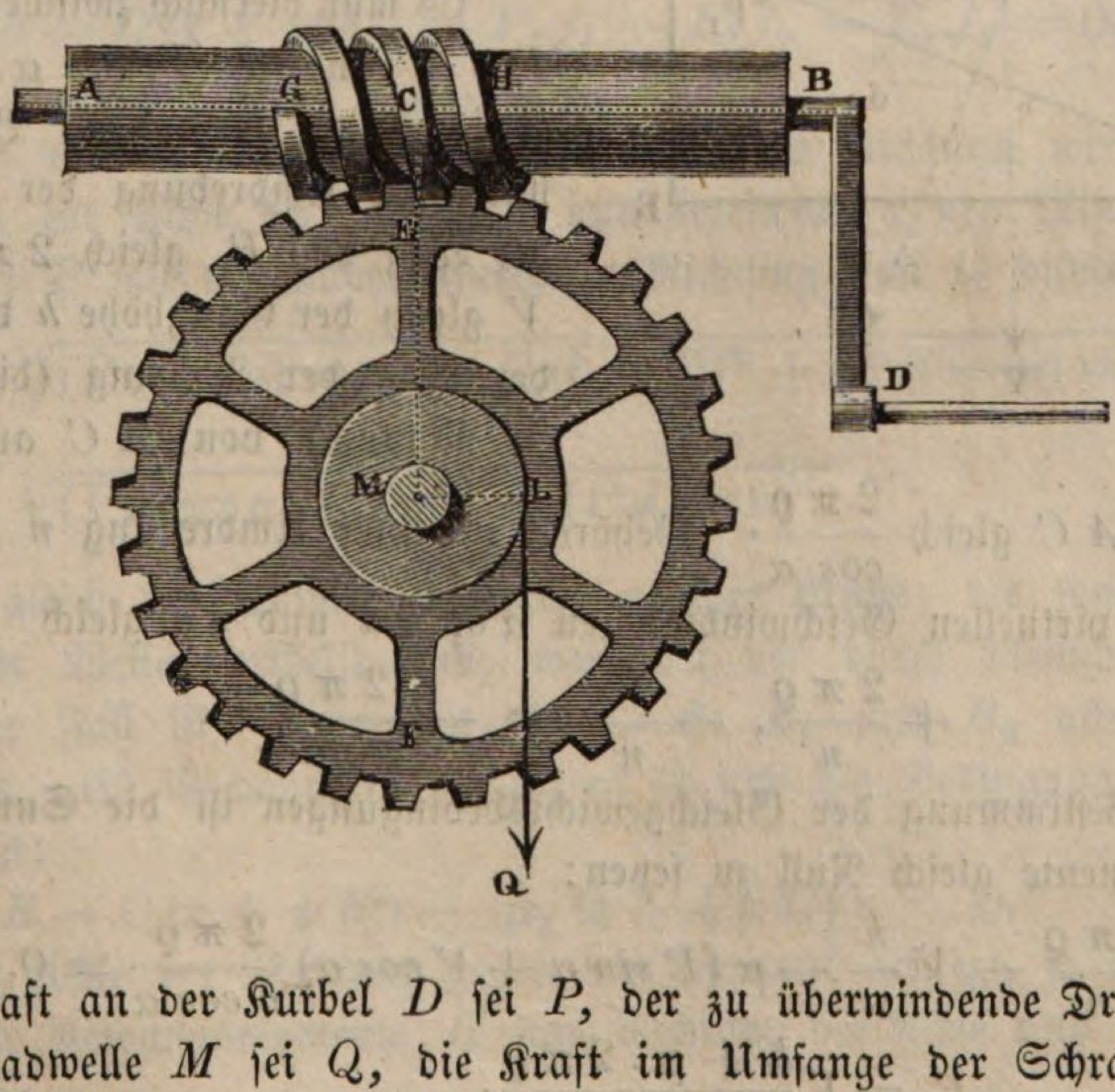
$$V_1 = 150 + 1300 \,.\, 0{,}6 + 1600 \,.\, 0{,}2 = 1250 \text{ Kilogr.},$$
$$V_2 = 150 + 1300 \,.\, 0{,}4 + 1600 \,.\, 0{,}8 = 1950 \quad »$$
$$H_1 = 0{,}6\, P = 180 \text{ Kilogr.},$$
$$H_2 = 0{,}4\, P = 120 \quad »$$
$$B_1 = \sqrt{1250^2 + 180^2} = 1263 \text{ Kilogr.},$$
$$B_2 = \sqrt{1950^2 + 120^2} = 1954 \quad »$$
$$F_1 f_1 + F_2 f_2 = 0{,}08\ (1263 + 1954)\, 0{,}105 = 27,$$
$$P \,.\, 1{,}5 = 900 \,.\, 0{,}5 + 27 = 477,$$
$$P = 318 \text{ Kilogr.}$$

26. Ein eisernes Rad von 10000 Kilogramm Gewicht und einem Halbmesser R von 5^m ruht in Zapfen von $0{,}13^m$ Halbmesser. Wie groß ist die Kraft P am Umfange des Rades, welche die Zapfenreibung überwindet? Welche Arbeitstärke ist zur Ueberwindung der Reibung nothwendig, wenn fünf Umdrehungen in der Minute gemacht werden und der Reibungscoefficient $\mu_1 = 0{,}08$ angenommen wird?

$$Ff = 0{,}08 \,.\, 10000 \,.\, 0{,}13 = 104,$$
$$P = \frac{Ff}{R} = \frac{104}{5} = 20{,}8 \text{ Kilogr.},$$
$$L^{=} = 0{,}1047 \,.\, Ff \,.\, u = 0{,}1047 \,.\, 104 \,.\, 5 = 54^{\underline{\underline{km}}}.$$

27. Die Beziehung zwischen Kraft und Last bei der Schraube ohne Ende (Fig. 243) ist bei Berücksichtigung der Reibung zwischen Radzähnen und Schraubengängen abzuleiten.

Fig. 243.



Die Kraft an der Kurbel D sei P, der zu überwindende Druck im Umfange der Radwelle M sei Q, die Kraft im Umfange der Schraube sei P_1 und der Widerstand zwischen Rad und Schraube V; der Halbmesser ML der

Welle sei r, der Halbmesser ME des Rades R, der mittlere Halbmesser der Schraube ϱ und die Kurbellänge BD sei gleich a.

Bei einer vollständigen Umdrehung der Schraube ist der Weg von P gleich $2\pi a$, von P_1 gleich $2\pi\varrho$. Gehören zu einer Umdrehung n Zeitmomente, so sind die virtuellen Geschwindigkeiten der beiden Kräfte $\frac{2\pi a}{n}$ und $\frac{2\pi\varrho}{n}$, die mit entgegengesetzten Zeichen in Rechnung zu bringen sind, da P die Kraft P_1 überwinden soll. Zur Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen haben wir die Summe der virtuellen Momente gleich Null zu setzen:

$$P\frac{2\pi a}{n} - P_1\frac{2\pi\varrho}{n} = 0,$$

d. h.
$$P = P_1\frac{\varrho}{a}.$$

Zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen Q und V verfahren wir in gleicher Weise:

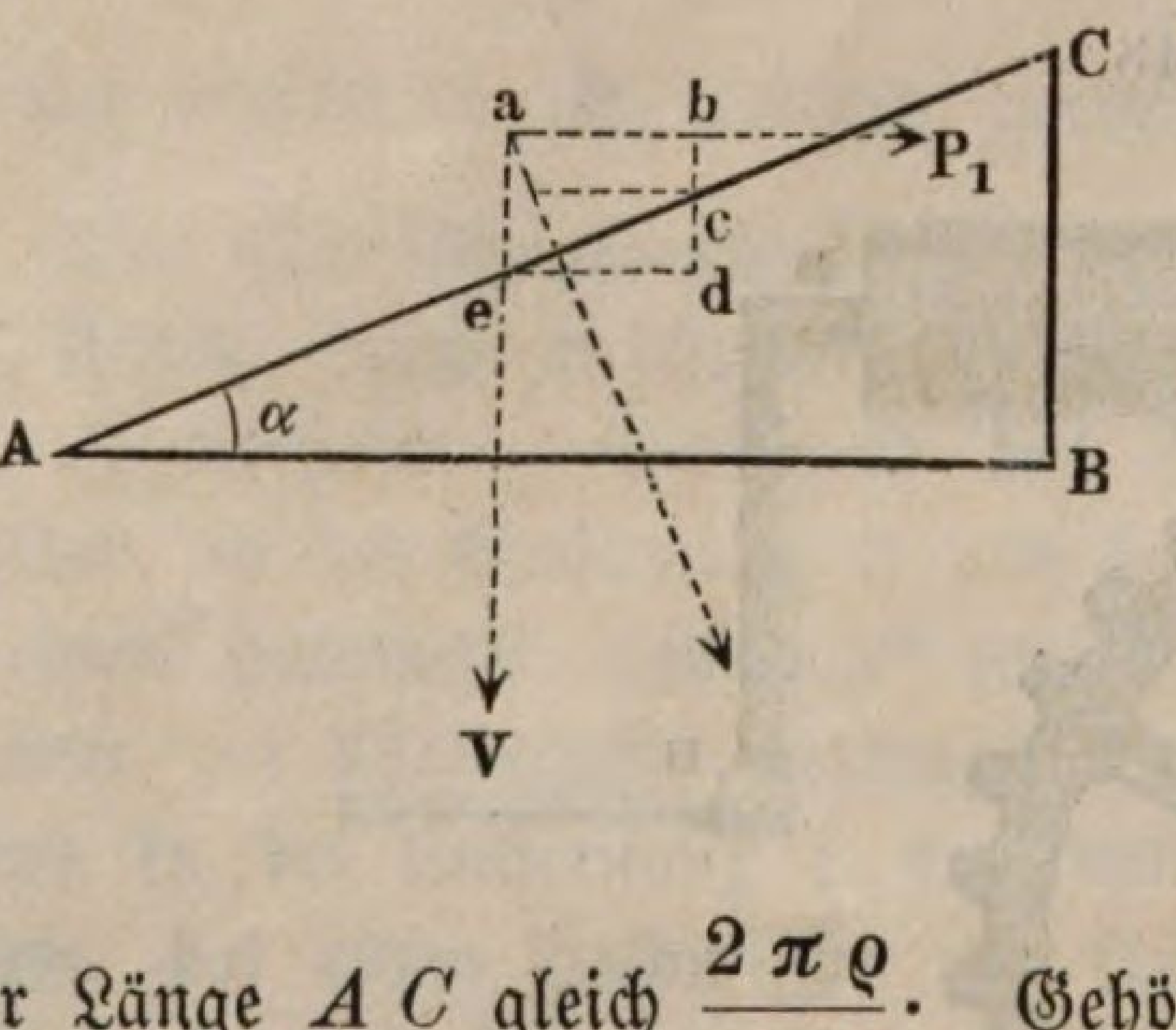
$$Q\frac{2\pi r}{n} - V\frac{2\pi R}{n} = 0,$$

$$V = Q\frac{r}{R}.$$

Bei der Bestimmung des Verhältnisses zwischen V, P_1, handelt es sich um die in den Schraubengängen stattfindende Reibung.

Ist AC (Fig. 244) die abgewickelte mittlere Spirallinie der Schraube, α deren Neigungswinkel, μ der Reibungscoefficient, so ist $\mu(P_1 \sin\alpha + V\cos\alpha)$ die Reibung.

Fig. 244.



Es muß hiernach zwischen den Kräften P_1, V und $\mu(P_1 \sin\alpha + V\cos\alpha)$ Gleichgewicht stattfinden. Bei einer vollständigen Umdrehung der Schraube ist der Weg von P_1 gleich $2\pi\varrho$; der von V gleich der Ganghöhe h der Schraube; der Weg der Reibung (die bekanntlich in Richtung von AC auftritt) gleich der Länge AC gleich $\frac{2\pi\varrho}{\cos\alpha}$. Gehören zu einer Umdrehung n Zeitmomente, so sind die virtuellen Geschwindigkeiten ab, cd und ce gleich

$$+\frac{2\pi\varrho}{n},\ -\frac{h}{n} \text{ und } -\frac{2\pi\varrho}{n\cos\alpha}.$$

Zur Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen ist die Summe der virtuellen Momente gleich Null zu setzen:

$$P_1\frac{2\pi\varrho}{n} - V\frac{h}{n} - \mu(P\sin\alpha + V\cos\alpha)\frac{2\pi\varrho}{n\cos\alpha} = 0,$$

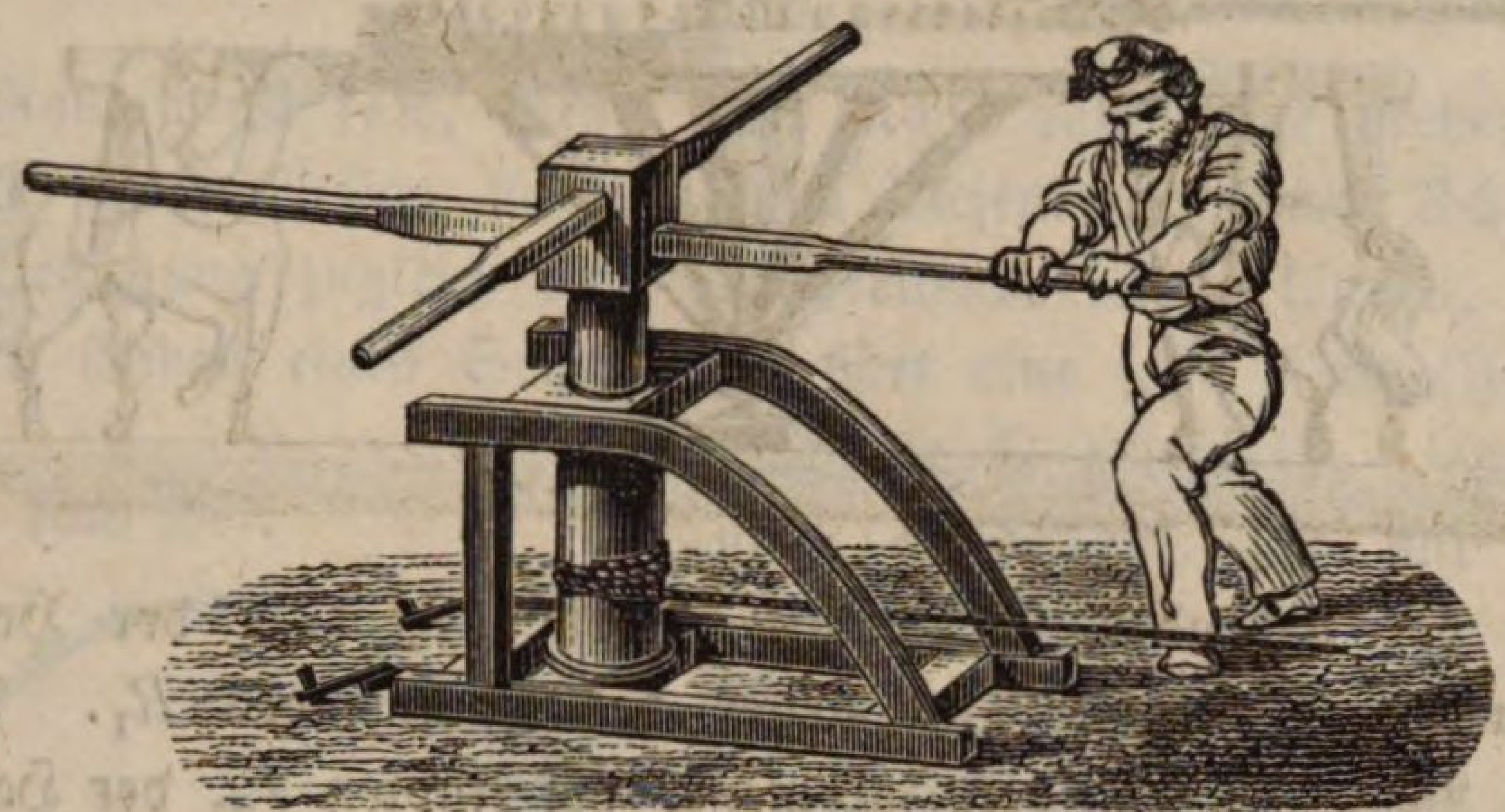
d. h.
$$P_1 = V\frac{h + \mu \cdot 2\pi\varrho}{2\pi\varrho - \mu h}.$$

Setzen wir hierin statt V den oben durch Q ausgedrückten Werth und substituiren darauf den Werth von P_1 in der obigen Gleichung für P, so entsteht:

$$P = Q \frac{h + \mu \cdot 2\pi\varrho}{2\pi\varrho - \mu h} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\varrho}{a}.$$

28. Wird das Rad an der Welle mit einer stehenden Welle construirt, so heißt dasselbe je nach der Construction Erdwinde (Fig. 245) oder Göpel.

Fig. 245.



Es ist hier noch das Moment der durch das eigene Gewicht G hervorgerufenen Reibung zu überwinden, während der Reibung erzeugende Druck B, wegen des senkrecht wirkenden Gewichts geringer wird.

Behalten wir die Bezeichnungen aus Aufgabe 24 bei und setzen das Moment der Reibung am unteren Zapfen nach §. 47 A, 2^b, $F_3 f_3$ gleich $\mu G \frac{r_1}{2}$, so ist:

$$P R - Q (r + \psi \delta^2) - F_1 f_1 - F_2 f_2 - F_3 f_3 = 0,$$
$$F_1 f_1 = \mu_1 B_1 r_1; \; F_2 f_2 = \mu_1 B_2 r_1.$$

Nehmen wir an, daß Q stets nach derselben Richtung wirksam ist und zwar normal zur Achse der Maschine, und bezeichnet α den Winkel, den die Richtung von P mit der unveränderlichen Richtung von Q bildet, so ist

$$B_1 = \frac{1}{l} \sqrt{[P (l - a) \cos\alpha + Q (l - c)]^2 + [P (l - a) \sin\alpha]^2},$$

$$B_2 = \frac{1}{l} \sqrt{(P a \cos\alpha + Q c)^2 + (P a \sin\alpha)^2}.$$

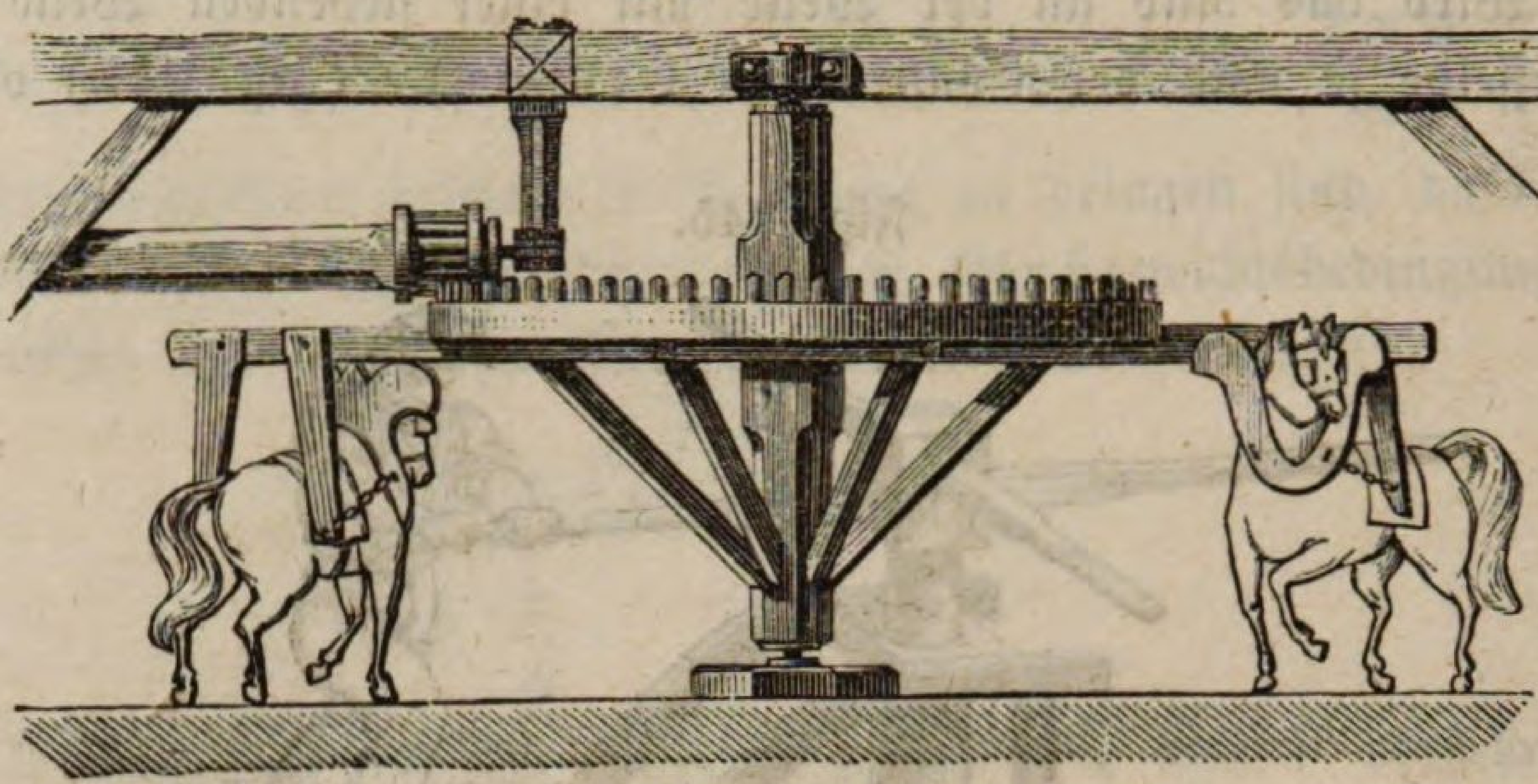
Ist P gleich der Summe mehrerer gleicher Kräfte, die symmetrisch um die Achse der Welle vertheilt sind, was bei der durch Menschen bewegten Erdwinde der Fall ist, so werden die Drucke B_1 und B_2 allein durch Q hervorgerufen. Es ist dann $B_1 + B_2 = Q$ und die Bedingung des Gleichgewichts heißt:

$$P R - Q (r + \psi \delta^2) - (\mu_1 Q + \tfrac{1}{2} \mu G) r_1 = 0.$$

Ist die Achse der Maschine gegen den Horizont geneigt, so muß zur Bestimmung der Reibungsmomente, G nach Richtung der Achse und normal dazu zerlegt werden.

29. Eine stehende Welle (Fig. 246) ist mit einer liegenden durch ein Kammrad und einen Drehling verbunden. Die stehende Welle wird durch zwei Pferde in Bewegung gesetzt, die diametral gegenüber an dem Arme m wirken.

Fig. 246.



Das Gewicht der stehenden Welle mit Zubehör sei G_1, der Halbmesser der Zapfen r_1, und der mittlere Halbmesser des Kammrades R_1. Das Gewicht der liegenden Welle sei G_2, der Halbmesser der Zapfen r_2, der Halbmesser des Drehlings R_2. Auf der liegenden Welle ist noch ein Stirnrad vom Halbmesser R_3 befestigt, in dessen Umfange ein Druck Q zu überwinden ist, dessen Richtung mit der Verticalen zusammenfällt. Es ist der Werth von Q zu bestimmen, wenn jedes Pferd mit dem Drucke von P Kilogramm wirkt und die Zapfenreibung berücksichtigt werden soll; μ sei der Coefficient für die Zapfenreibung, und der im Mantel der Räderverbindung nach horizontaler Richtung wirksame Druck sei V.

Wir erhalten als Gleichgewichtsbedingungen:

$$1)\ 2\,P m - \mu\, G_1 \frac{r_1}{2} - V R_1 - \mu_1 V r_1 = 0,$$

$$2)\ V R_2 - Q R_3 - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0.$$

Es ist hier wieder wie früher $F_1 f_1 = \mu_1 B_1 r_2$ und $F_2 f_2 = \mu_1 B_2 r_2$. Benutzen wir die in Aufgabe 24 angenommenen Bezeichnungen, so ist

$$B_1 = \frac{1}{l}\sqrt{[Q(l-c) + G_2(l-b)]^2 + V^2(l-a)^2},$$

$$B_2 = \frac{1}{l}\sqrt{(Q c + G_2 b)^2 + (V a)^2}.$$

Es sei für die numerische Berechnung:
$P = 60$ Kilogr.; $G_1 = 300$ Kilogr.; $G_2 = 200$ Kilogr.;
$m = 3{,}139^m$; $l = 3{,}452^m$; $a = 0{,}314^m$; $b = 1{,}65^m$; $c = 2{,}824^m$;
$R_1 = 0{,}628^m$; $R_2 = 0{,}314$; $R_3 = 0{,}157^m$; $r_1 = 0{,}046^m$; $r_2 = 0{,}036^m$;
$\mu = 0{,}16$; $\mu_1 = 0{,}08$.

Wir bestimmen zuerst V aus der Gleichung

$$2\,P m - \mu\, G_1 \frac{r_1}{2} - V R_1 - \mu_1 V r_1 = 0$$

$$V = 594{,}5 \text{ Kilogr.}$$

Q findet sich nun annähernd aus der Gleichung $V R_2 - Q R_3 = 0$

$$Q = 1190 \text{ Kilogr.}$$

$B_1 = 629$ Kilogr.; $B_2 = 1070$ Kilogr.; $F_1 f_1 + F_2 f_2 = 5$.

Ein genauerer Werth von Q findet sich nun aus der Gleichung:

$$V R_2 - Q R_3 - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0,$$

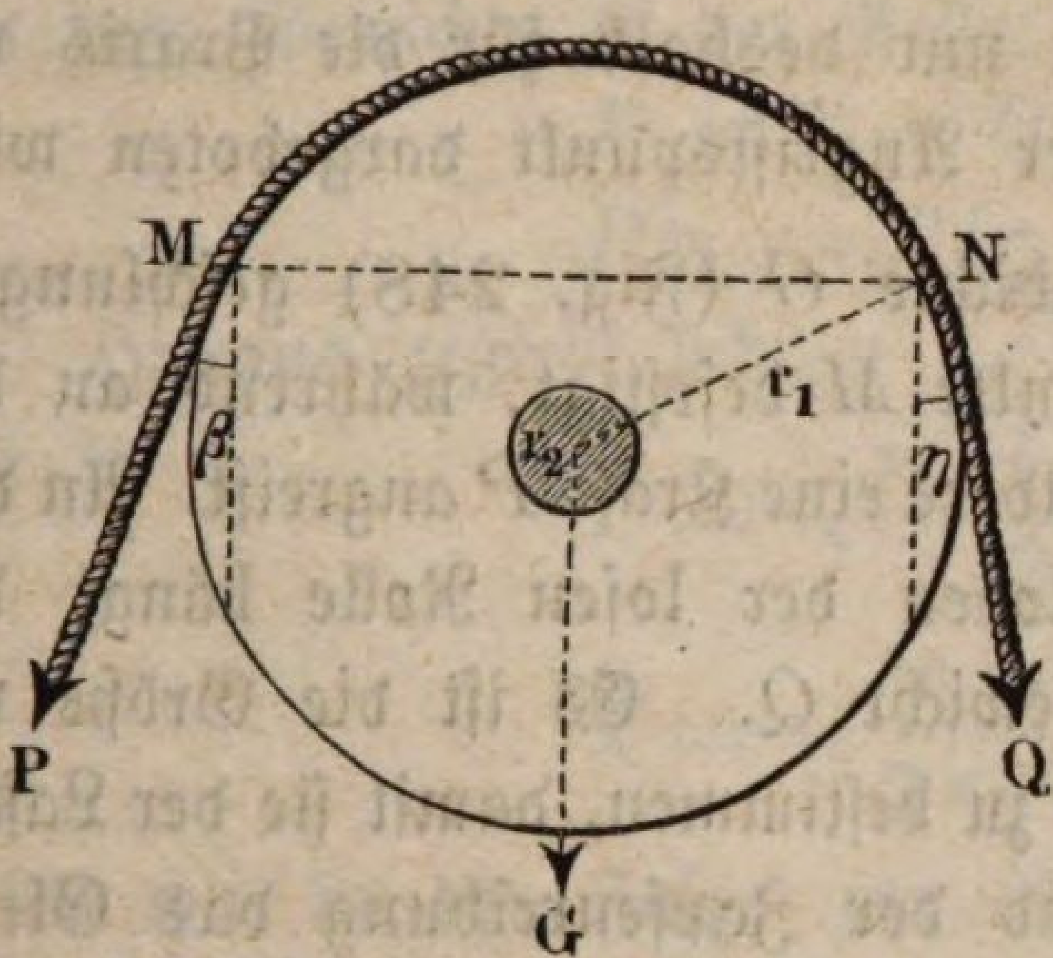
$$Q = 1157 \text{ Kilogr.}$$

30. Es seien die Bedingungen des Gleichgewichts an den Rollen zu bestimmen.

Eine Rolle heißt fest, wenn ihrer Achse allein eine drehende Bewegung gestattet ist. Lose Rollen sind dagegen diejenigen, deren Achsen außer der drehenden Bewegung zugleich eine fortschreitende haben können.

An den Enden eines Seiles, das über eine feste Rolle (Fig. 247) vom Gewichte G gelegt ist, seien die Kräfte P und Q wirksam, die mit dem mittlern Querschnitte der Rolle in einer Ebene liegen.

Fig. 247.



Es ist die Größe von P zu bestimmen, die der Kraft Q und der Reibung am Zapfen das Gleichgewicht hält. Der Halbmesser der Rolle sei r_1, der des Zapfens r_2. Es sei MN die, zu dem vom Seile umspannten Bogen, gehörige Sehne. Die Kraftrichtungen von P und Q mögen mit der Verticalen die Winkel β und η bilden. Die Gleichgewichtsbedingung ist:

$$P r_1 - Q(r_1 + \psi \delta^2) - F f = 0,$$

$$F f = \mu_1 B r_2$$

$$B = \sqrt{(P \cos \beta + Q \cos \eta + G)^2 + (P \sin \beta - Q \sin \eta)^2}.$$

Die Berechnung von P geschieht in der oben beim Rade an der Welle angegebenen Weise durch aufeinanderfolgende Substitutionen.

Wirken die beiden Kräfte P und Q nach paralleler Richtung, so ist $\beta = \eta = 0$, $B = P + Q + G$, daher:

$$P r_1 = Q(r_1 + \psi \delta^2) + \mu_1 (P + Q + G) r_2,$$

$$P = \frac{Q(r_1 + \psi \delta^2) + \mu_1 (Q + G) r_2}{r_1 - \mu_1 r_2}.$$

Vernachlässigt man das Gewicht G der Rolle, so ist:

$$P = Q \frac{r_1 + \psi \delta^2 + \mu_1 r_2}{r_1 - \mu_1 r_2},$$

wofür wir in der Folge zur Abkürzung

$$P = a Q$$

schreiben wollen.

Man multiplicire Zähler und Nenner des Ausdrucks a, mit $r_1 + \mu_1 r_2$ und vernachlässige dann die Glieder mit $\mu_1{}^2$ und $\mu_1 \psi$, so ergiebt sich:

$$a = \frac{r_1^2 + r_1 \psi \delta^2 + \mu_1 r_1 r_2 + \mu_1 r_1 r_2}{r_1^2}$$

$$= 1 + \psi \frac{\delta^2}{r_1} + 2 \mu_1 \frac{r_2}{r_1},$$

für $\psi = 13$ und $\mu_1 = 0{,}08$ ist schließlich

$$a = 1 + 13 \frac{\delta^2}{r_1} + 0{,}16 \frac{r_2}{r_1}.$$

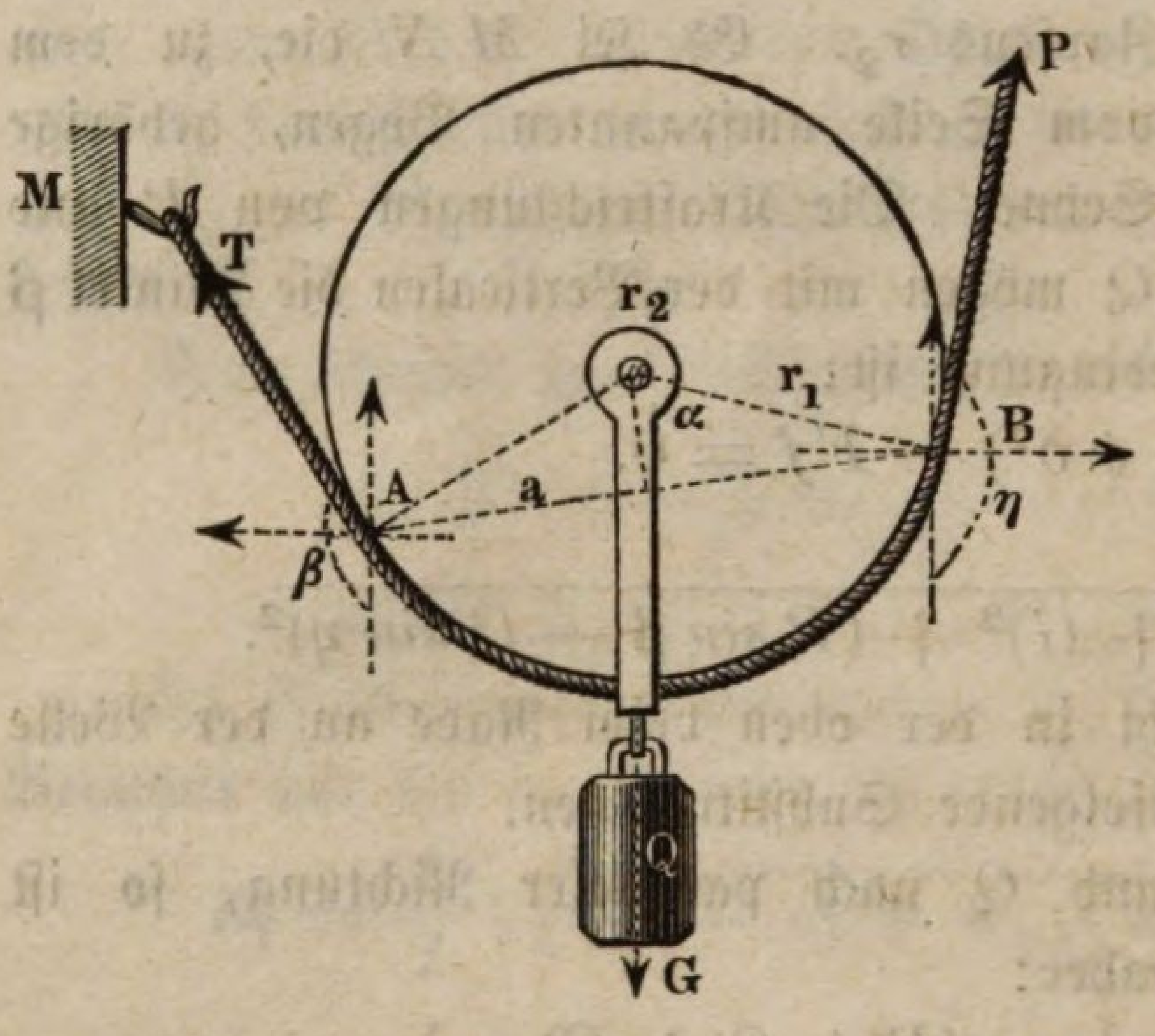
Kommt anstatt eines Seiles eine Kette zur Verwendung, so ist $\psi \delta^2$ durch μd n. F. 119 zu ersetzen und es ist deshalb für eine Kette, wenn $\mu = 0{,}16$ genommen wird:

$$a = 1 + 0{,}16 \frac{d}{r_1} + 0{,}16 \frac{r_2}{r_1}.$$

Bei Vernachlässigung der auftretenden Widerstände wird $a = 1$ und deshalb $P = Q$, d. h. bei einer festen Rolle ist die nothwendige Kraft wenigstens gleich der Last, und die ganze Vorrichtung ist nur deshalb für die Praxis von Nutzen, weil der Kraft dadurch ein bequemer Angriffspunkt dargeboten wird.

31. Das um eine lose Rolle vom Gewichte G (Fig. 248) geschlungene Seil ist mit einem Ende an einem festen Punkte M befestigt, während an das andere eine Kraft P angreift. An dem Kloben der losen Rolle hängt das Gewicht Q. Es ist die Größe von P zu bestimmen, damit sie der Last Q und der Zapfenreibung das Gleichgewicht halte. Die Kraftrichtungeen von P und Q liegen mit dem mittlern Durchschnitte der Rolle und dem festen Punkte M in einer Ebene. Der Halbmesser der Rolle sei r_1, der des Zapfens r_2, der vom Seile umspannte Bogen AB gehöre zu dem Mittelpunktswinkel 2α. Die Seilenden mögen mit der Richtung von Q die Winkel β und η bilden.

Fig. 248.



Ist T die Spannung des befestigten Seilendes, so müssen die Horizontalcomponenten von T und P gleich und entgegengesetzt gerichtet sein und die Summe der Verticalcomponenten muß gleich dem Gewichte $Q + G$ sein:

$$T \sin \eta - P \sin \beta = 0$$

$$- T \cos \eta - P \cos \beta = Q + G.$$

Andererseits haben wir für das Gleichgewicht gegen Drehung:

$$P r_1 - T (r_1 + \psi \delta^2) - \mu_1 Q r_2 = 0,$$

da das Gewicht G der Rolle zur Reibung Nichts beiträgt.

Hieraus ist in den vorkommenden Fällen P und T durch $Q + G$ auszudrücken, indem man die beiden Winkel η und β annähernd als gleich an-

nimmt und die beiden letzten Gleichungen zur Bestimmung von T und P benutzt. Vernachlässigt man hierbei sämmtliche Widerstände, so erhält man aus

$$-T\cos\eta - P\cos\beta = Q + G$$
$$-2P\cos\beta = Q + G$$
$$2P\cos(2R - \beta) = Q + G$$
$$2P\sin\alpha = Q + G.$$

Durch Multiplication mit r_1 ergiebt sich weiter:

$$P.2r_1\sin\alpha = (Q + G)r_1.$$

Es ist $2r_1\sin\alpha$ gleich der Sehne AB, die zu dem, vom Seile umschlungenen Bogen gehört. Setzen wir die Länge von AB gleich s, so erhalten wir schließlich:

$$Ps = (Q + G)r_1.$$

Gesetzt, die Seilenden nehmen eine Richtung an, die sich von der verticalen fast gar nicht unterscheidet, so gehen die obigen Gleichungen, wenn wir von dem Gewichte G der Rolle absehen, über in:

$$P + T = Q$$
$$Pr_1 = T(r_1 + \psi\delta^2) + \mu_1 Q r_2.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$P = Q\frac{r_1 + \psi\delta^2 + \mu_1 r_2}{2r_1 + \psi\delta^2},$$
$$T = Q\frac{r_1 - \mu_1 r_2}{2r_1 + \psi\delta^2},$$

wofür wir in der Folge zur Abkürzung $P = bQ$ und $T = cQ$ schreiben wollen. Durch Division beider Gleichungen erhalten wir:

$$P = \frac{b}{c}T = \frac{r_1 + \psi\delta^2 + \mu_1 r_2}{r_1 - \mu_1 r_2}T,$$

was mit Rücksicht auf die feste Rolle mit aT bezeichnet werden muß. Zur bequemeren Benutzung obiger Formeln werden die Ausdrücke von b und c in ähnlicher Weise, wie der Werth von a bei der festen Rolle, einer Umformung unterworfen. Man multiplicire Zähler und Nenner mit $2r_1 - \psi\delta^2$ und vernachlässige die Glieder mit ψ^2 und $\mu_1\psi$, dann ist:

$$b = \tfrac{1}{2} + \psi\frac{\delta^2}{4r_1} + \mu_1\frac{r_2}{2r_1} = \tfrac{1}{2} + 3{,}25\frac{\delta^2}{r_1} + 0{,}04\frac{r_2}{r_1},$$
$$c = \tfrac{1}{2} - \psi\frac{\delta^2}{4r_1} - \mu_1\frac{r_2}{2r_1} = \tfrac{1}{2} - 3{,}25\frac{\delta^2}{r_1} - 0{,}04\frac{r_2}{r_1},$$

wenn wir für ψ und μ_1 die betreffenden Werthe 13 und 0,08 benutzen. Es ist hiernach b jederzeit größer als $\frac{1}{2}$, aber niemals gleich 1, so daß bei der losen Rolle die Kraft P jederzeit kleiner als die Last Q ist, bei dieser Vorrichtung also an Kraft gespart wird. Bei Vernachlässigung sämmtlicher Widerstände wird $b = c = \frac{1}{2}$ und $P = T = \frac{1}{2}Q$.

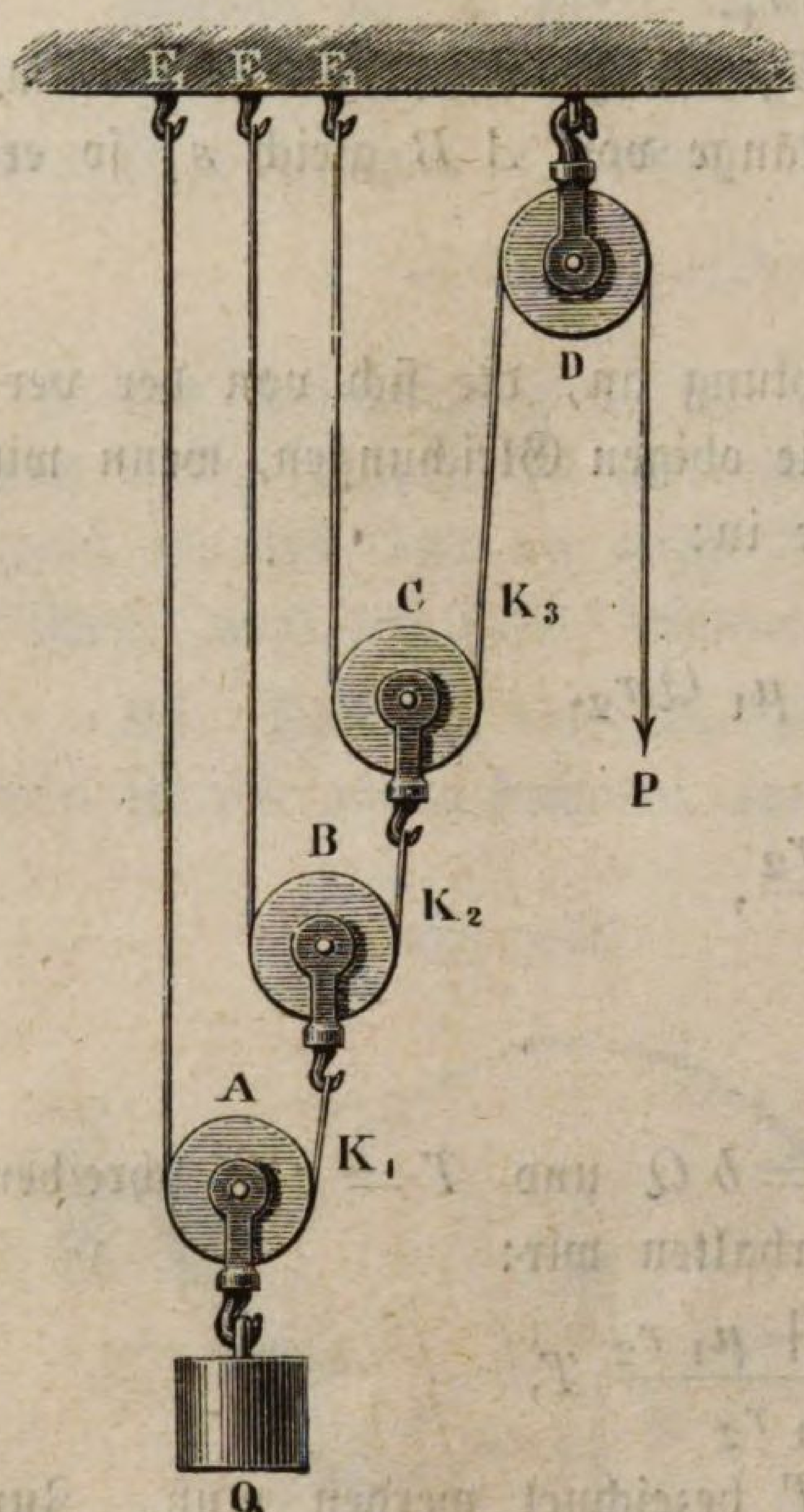
Findet anstatt des Seiles eine Kette Verwendung, so ist $\psi\delta^2$ durch μd zu ersetzen, unter d die Dicke des Rundeisens zur Kette verstanden. Demnach haben wir für Ketten:

$$b = \frac{r_1 + \mu d + \mu_1 r_2}{2 r_1 + \mu d} = \tfrac{1}{2} + \mu \frac{d}{4 r_1} + \mu_1 \frac{r_2}{2 r_1} = \tfrac{1}{2} + 0{,}08 \frac{d + r_2}{2 r_1},$$

$$c = \frac{r_1 - \mu_1 r_2}{2 r_1 + \mu d} = \tfrac{1}{2} - \mu \frac{d}{4 r_1} - \mu_1 \frac{r_2}{2 r_1} = \tfrac{1}{2} - 0{,}08 \frac{d + r_2}{2 r_1}.$$

32. Mehrere lose Rollen K_1, K_2, K_3 ... (Fig. 249), die so durch Seile mit einander in Verbindung stehen, daß die Bewegung einer der Rollen die der übrigen zur Folge hat, nennt man in dieser Zusammenstellung einen Rollenzug.

Fig. 249.



Es soll bei einem Rollenzuge von n losen Rollen die erforderliche Kraft P berechnet werden, durch welche die Last Q, im Verein mit der Zapfenreibung und der Steifigkeit der Seile, im Gleichgewichte erhalten wird. Die Rollen mögen denselben Halbmesser haben, ebenso deren Zapfen, die Seile haben sämmtlich dieselbe Stärke δ und sind vertical gerichtet. Von dem Gewichte der Rollen mag abgesehen werden.

Es ist

$$P = a b^n Q,$$

d. h.

$$P = \frac{(r_1 + \psi \delta^2 + \mu_1 r_2)^{n+1}}{(r_1 - \mu_1 r_2)(2 r_1 + \psi \delta^2)^n} Q.$$

Wird Steifigkeit und Reibung vernachlässigt, so ist

$$P = \frac{1}{2^n} Q.$$

Wegen der in diesem Resultate vorkommenden Potenz heißt der Rollenzug auch Potenzflaschenzug.

33. Es ist bei einer gegebenen Last Q und einer disponiblen Kraft P, welche die Reibung und Steifigkeit zu gleicher Zeit überwinden soll, die Anzahl der losen Rollen für einen Rollenzug zu bestimmen:

$$n = \frac{\log P - \log Q - \log a}{\log b}.$$

34. Eine Verbindung von mehreren Rollen heißt eine Flasche, wenn dieselben unter einander angebracht sind, wenn ihre Achsen sich also in paralleler Lage in einer Ebene befinden. Die Verbindung heißt dagegen ein Kloben, wenn zu sämmtlichen Rollen eine Achse gebraucht wird, die Rollen also neben einander liegen. Die Verbindung einer festen und losen Flasche heißt ein Flaschenzug (Fig. 250), die eines festen und losen Kloben dagegen ein Klobenzug (Fig. 251 und Fig. 252).

Die in einer Flasche befindlichen Rollen mögen denselben Durchmesser haben.

Die feste Flasche (Fig. 253) sei horizontal befestigt und die lose Flasche in derselben Verticalebene horizontal darunter durch die Seile gehalten.

Fig. 250.

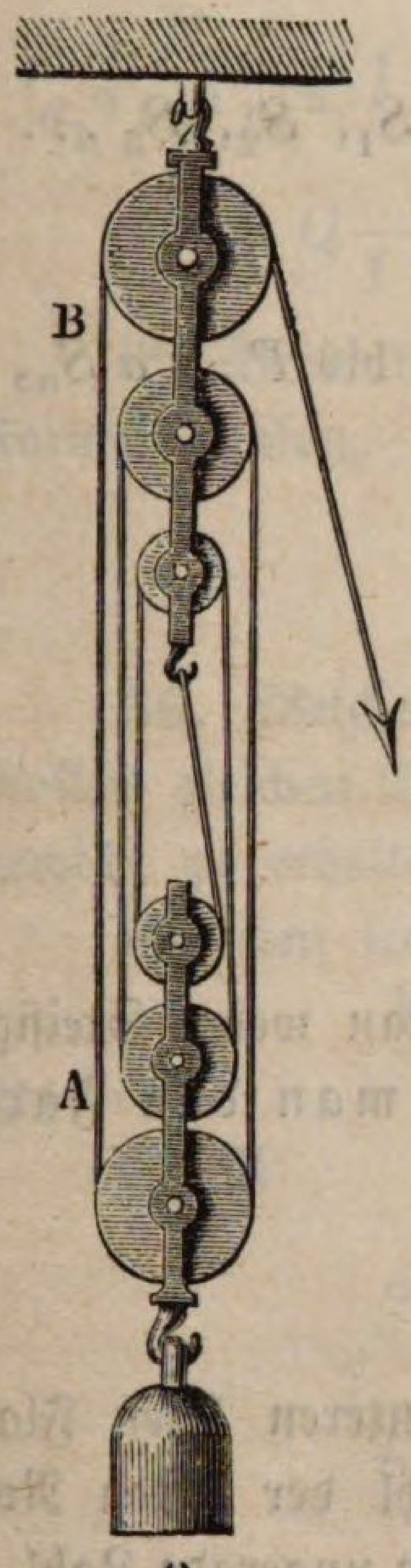


Fig. 251.

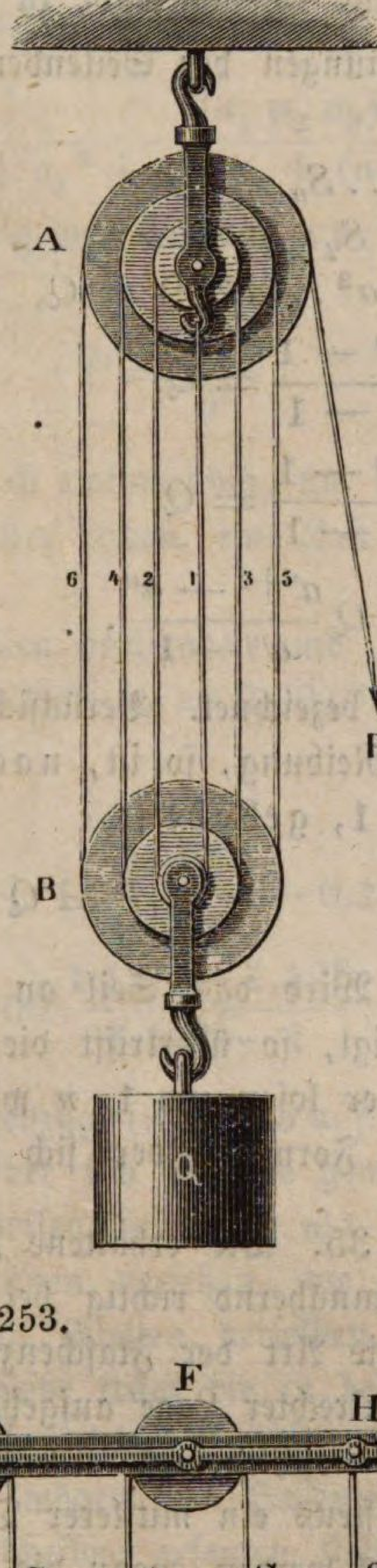


Fig. 252.

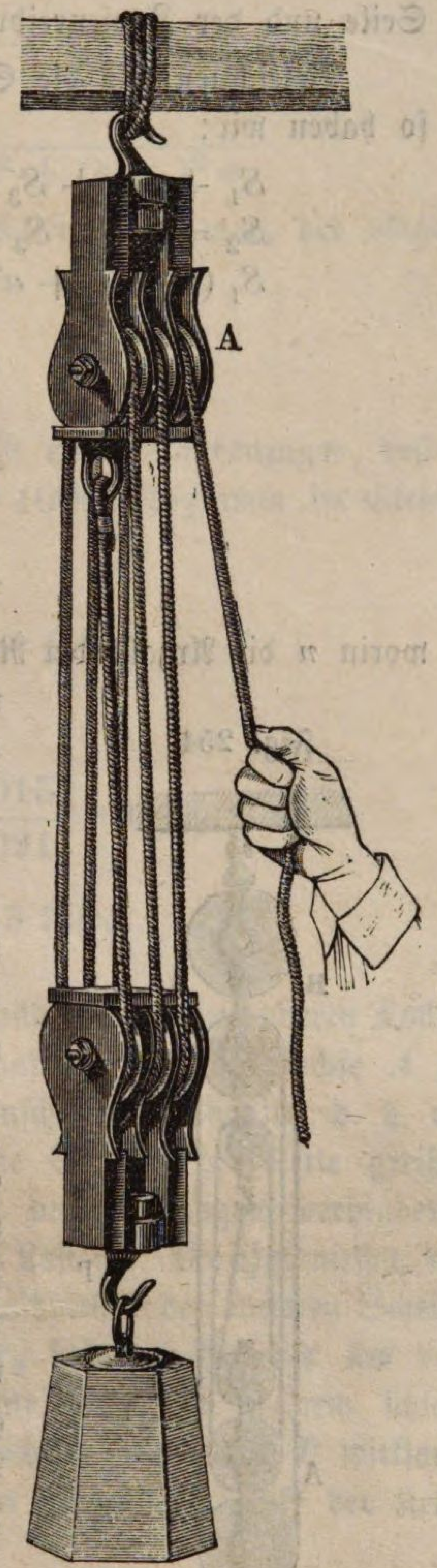


Fig. 253.



In beiden Flaschen möge sich dieselbe Anzahl Rollen befinden, so daß das verbindende Seil mit dem einen Ende an der festen Flasche befestigt ist,

während das andere, über die letzte feste Rolle geführt, von der Kraft P angegriffen werden mag.

Welche Größe muß P erhalten, um sich mit der Last Q, die aus der zu hebenden Last und dem Gewichte der losen Flasche besteht, der Steifigkeit der Seile und der Zapfenreibung ins Gleichgewicht zu setzen?

Bezeichnen wir die Spannungen der Seilenden mit S_1, S_2, $S_3 \ldots S_n$, so haben wir:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots S_n = Q,$$

$$S_2 = a\, S_1;\; S_3 = a\, S_2;\; S_4 = a\, S_3 \ldots \text{u. s. w. bis } P = a\, S_n,$$

$$S_1 (1 + a + a^2 + a^3 \ldots a^{n+1}) = Q,$$

$$S_1 \frac{a^n - 1}{a - 1} = Q,$$

$$\frac{P}{a^n} \frac{a^n - 1}{a - 1} = Q,$$

$$P = Q \frac{a^{n+1} - a^n}{a^n - 1},$$

worin n die Anzahl der Rollen bezeichnet. Berücksichtigt man weder Steifigkeit noch Reibung, so ist, nachdem man den Factor $a - 1$, gehoben:

$$P = Q \frac{1}{n}.$$

Fig. 254.



Wird das Seil an der unteren losen Flasche befestigt, so übertrifft die Anzahl der festen Rollen die der losen um 1, n wird eine ungerade Zahl, die obige Formel ändert sich jedoch nicht.

35. Die erhaltene Formel läßt sich auch noch als annähernd richtig bei dem Klobenzuge benutzen; für die Art der Flaschenzüge jedoch, deren Flaschen in senkrechter Lage aufgehängt sind, die also Rollen von verschiedenem Durchmesser enthalten, müßte wenigstens ein mittlerer Durchmesser der Rollen eingeführt werden, wenn die Formel einen angenäherten Werth von P liefern sollte. Will man eine genauere Formel erhalten, so verfahre man wie folgt:

In jeder Flasche befinden sich drei Rollen (Fig. 254), wobei die in der einen Flasche mit denen in der anderen der Größe nach übereinstimmen. Das Seil ist an der oberen Flasche befestigt und die Seilenden werden als parallel in verticaler Lage vorausgesetzt. Die Spannungen seien wieder S_1, $S_2 \ldots$, S_6, die Kraft sei P, die zu hebende Last Q, und die von der Größe der Rollen abhängigen Coefficienten setzen wir gleich a_1, a_2, a_3.

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = Q,$$
$$S_2 = a_1 S_1,\ S_3 = a_1 S_2,\ S_4 = a_2 S_3,$$
$$S_5 = a_2 S_4,\ S_6 = a_3 S_5 \text{ und } P = a_3 S_6,$$
$$S_1 (1 + a_1 + a_1^2 + a_1^2 a_2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2^2 a_3) = Q,$$
$$\frac{P}{a_1^2 a_2^2 a_3^2}(1 + a_1 + a_1^2 + a_1^2 a_2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2^2 a_3) = Q,$$
$$P = Q \frac{(a_1 a_2 a_3)^2}{1 + a_1 + a_1^2 + a_1^2 a_2 + (a_1 a_2)^2 + (a_1 a_2)^2 a_3}.$$

Bei Vernachlässigung von Reibung und Steifigkeit findet man, der obigen Formel analog,

$$P = \frac{Q}{6}.$$

36. Welche Kraft ist nothwendig, um mittelst eines Flaschenzuges, dessen Rollen gleichen Durchmesser haben, eine Last von 1000 Kilogramm im Gleichgewicht zu erhalten?

Es seien sechs Rollen vorhanden und

$$\delta = 0{,}026^m;\ r_1 = 0{,}091^m;\ r_2 = 0{,}015$$

gegeben.

Es ist

$$a = 1 + 13 \frac{0{,}026^2}{0{,}091} + 0{,}16 \frac{0{,}015}{0{,}091} = 1{,}12,$$
$$P = 1000 \frac{1{,}12^7 - 1{,}12^6}{1{,}12^6 - 1} = 243 \text{ Kilogr.}$$

37. In dem Flaschenzuge (Fig. 255 a. f. S.) bilden die beiden oberen Rollen einen einzigen Körper, der sich um die gemeinschaftliche feste Drehachse A zu drehen vermag. Die Rollen sind hier als Kettenscheiben construirt, d. h. an ihrem Umfange mit Zähnen versehen, die in die Schaken der Kette greifen und auf diese Weise ein Gleiten derselben, auf den Umfängen verhindern. Die untere lose Kettenscheibe trägt die zu hebende Last Q. Die Halbmesser der beiden oberen Kettenscheiben seien R und r, der Halbmesser der unteren Scheibe sei r_1 und die Zapfen mögen den Halbmesser r_2 haben. Bei der um das System der drei Kettenscheiben gelegten Kette ohne Ende, sei in dem schlaff herunterhängenden Theile der oberen größeren Scheibe die Kraft P wirksam, und die von der unteren losen Scheibe nach oben führenden Theile der Kette mögen die Spannungen S_1 und S_2 erfahren.

Die Gleichgewichtsbedingung ist, unter d den Durchmesser des Eisens der Kettenglieder verstanden:

$$PR + S_2 r - S_1 (R + \mu d) - \mu_1 (S_1 + P) r_2 = 0,$$

oder wenn wir in dem die Zapfenreibung enthaltenden Summand $P = S_1$ setzen:

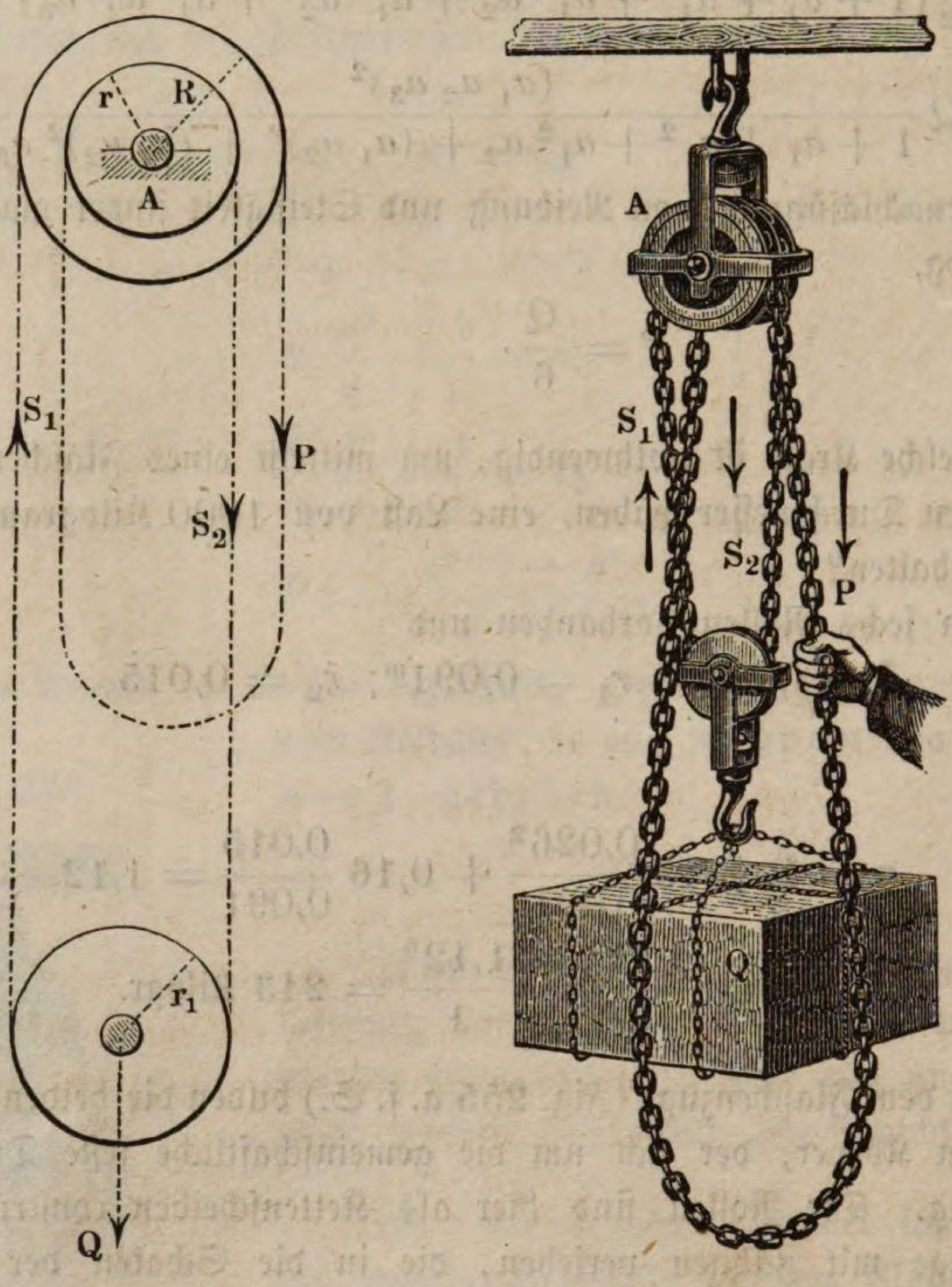
$$PR + S_2 r - S_1 R \left(1 + \mu \frac{d}{R} + 2 \mu_1 \frac{r_2}{R}\right) = 0.$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck stimmt mit dem bei der festen

Rolle für Ketten entwickelten Werthe von a überein, so daß wir als Gleichgewichtsbedingung erhalten:

$$P R + S_2 r - S_1 R a = 0.$$

Fig. 255.



Ferner ist S_1 als die an der unteren losen Kettenscheibe wirksame Kraft und S_2 als die Spannung des befestigten Endes anzusehen. Demnach haben wir der Theorie der losen Rolle gemäß

$$S_1 = b\, Q = a\, S_2.$$

Mit Benutzung dieser Beziehungen nimmt die obige Gleichgewichtsbedingung die Form an:

$$P R + \frac{b}{a} Q r - a b \,.\, Q R = 0.$$

Es ist demnach die zur Hebung der Last Q nothwendige Kraft

$$P = b\, Q \frac{a^2 R - r}{a R},$$

und die mit einer gegebenen Kraft P zu hebende Last

$$Q = \frac{P R a}{b\,(a^2 R - r)}.$$

Bei Vernachlässigung aller Widerstände ist $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ zu setzen und es wird dann $P = Q\frac{R-r}{2R}$ und $Q = 2\frac{PR}{R-r}$. Der letztere Werth ist die größtmöglichste Last, die mit der gegebenen Kraft P gehoben werden kann, und es ist deshalb $\frac{Q}{Max\,Q}$ jederzeit ein echter Bruch, der sich um so mehr der Einheit nähert, je mehr man die Widerstände herunterzuziehen, im Stande ist:

$$\frac{Q}{Max\,Q} = \frac{(R-r)\,a}{2b\,(a^2 R - r)}.$$

Die Vorrichtung heißt Differential-Flaschenzug. Bei den käuflich zu erwerbenden derartig eingerichteten Hebezeugen ist:

$$\frac{r}{R} = \frac{11}{12};\ \frac{d}{2R} = \frac{1}{21};\ \frac{r_2}{R} = \frac{1}{5},$$

daher $a = 1{,}047$, $b = 0{,}512$ und

$$\frac{Q}{Max\,Q} = \frac{a}{2b}\cdot\frac{1-\frac{r}{R}}{a^2-\frac{r}{R}} = 0{,}48.$$

Der vorstehende Flaschenzug hat noch die für die Praxis sehr wichtige Eigenschaft, daß derselbe mit der angehängten Last Q sich selbst überlassen, in Ruhe bleibt. Die hierfür nothwendigen Bedingungen sind noch zu entwickeln. Sobald Q sinkt, geht auch das Kettenstück mit der Spannung S_1 nach unten, während die mit der Spannung S_2 und der Kraft P behafteten sich nach oben bewegen. Die Gleichgewichtsbedingung ist in diesem Fall:

$$S_1 R - (PR + S_2 r)\,a = 0,$$

und weiter ist nach der Theorie der losen Rolle $S_2 = a\,S_1 = b\,Q$, daher bei Benutzung dieser Angaben:

$$\frac{b}{a}\,QR - (PR + b\,Q\,r)\,a = 0$$

und

$$P = \frac{b}{a^2}\cdot\frac{Q}{R}\,(R - r\,a^2).$$

Soll nun die Last Q ohne jegliche Kraft auf der erlangten Höhe erhalten werden, so muß $P \overset{\leq}{=} 0$ sein, d. h. aber

$$R - r\,a^2 \overset{=}{<} 0,$$

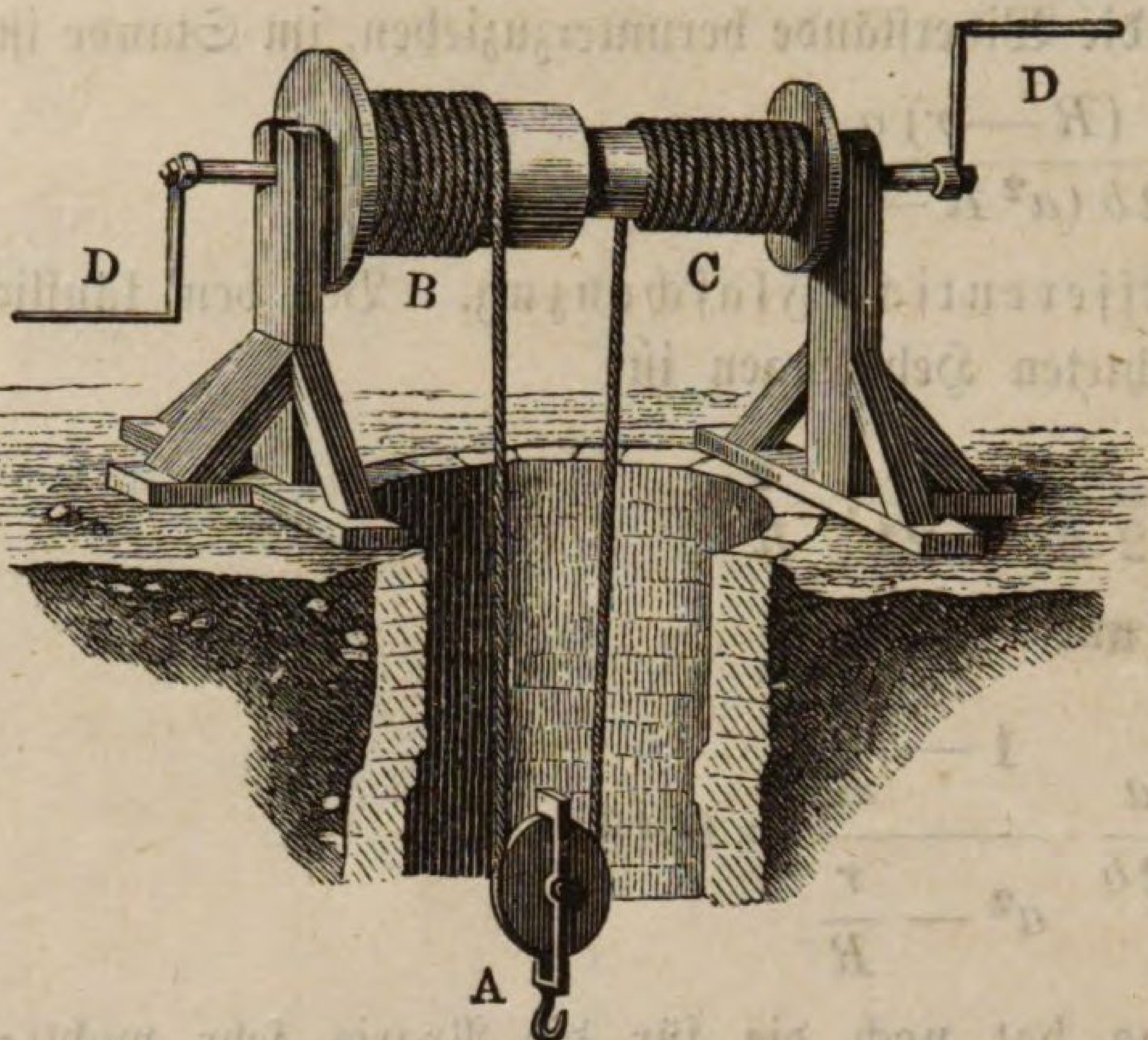
$$\frac{r}{R} \overset{=}{>} \left(\frac{1}{a}\right)^2.$$

Bei den käuflichen Exemplaren ist $\frac{r}{R} = \frac{11}{12} = 0{,}9167$, und da $a = 1{,}047$, $\frac{1}{a} = 0{,}95$, $\left(\frac{1}{a}\right)^2$ also $= 0{,}9025$ ist, so ist der oben entwickelten Bedin-

gung genügt, und die Differential-Flaschenzüge haben diese bemerkenswerthe Eigenschaft.

38. Eine Last (Fig. 256) hängt an einer losen Rolle A und die Enden des Seiles, welches diese Rolle trägt, sind nach entgegengesetzter Richtung um eine horizontal gelagerte Welle BC gewickelt, die an diesen Stellen verschiedenen Durchmesser hat. Die Welle wird mittelst der Kurbeln D durch eine Kraft P gedreht, oder dieselbe kann auch in dem Umfange einer Scheibe wirksam sein. Die zu hebende Last habe mit der losen Rolle das Gewicht Q.

Fig. 256.



Welche Größe muß P erhalten, um der Last und den Widerständen das Gleichgewicht zu halten?

Wird die Welle gedreht, so wickelt sich das eine Seilende auf den stärkern Theil B der Welle auf und das andere von dem schwächern C ab, so daß die bei jeder Umdrehung erlangte Höhe der Last gleich der halben Differenz dieser verschiedenen Wellumfänge sein wird.

Die Vorrichtung heißt deshalb Differentialhaspel.

Es sei das Gewicht der Welle mit Zubehör G, der Halbmesser des stärkern Theils der Welle r_1, die Spannung des daran hängenden Seiles S_1, der Halbmesser des schwächeren Theils r_2, die Spannung des daran wirkenden Seiles S_2, der Zapfenhalbmesser der Welle ϱ_1. Der Arm der Kraft P sei R.

$$S_1 = b\,Q \text{ und } S_2 = c\,Q,$$
$$PR - S_1(r_1 + \psi\,\delta^2) + S_2 r_2 - Ff = 0,$$
$$Ff = \mu_1 (P + Q + G)\,\varrho_1,$$
$$P = Q\frac{b(r_1 + \psi\,\delta^2) - c\,r_2 + \mu_1\,\varrho_1}{R - \mu_1\,\varrho_1} + \mu_1\,G\frac{\varrho_1}{R - \mu\,\varrho_1}.$$

Werden die Widerstände und das Gewicht der Welle außer Betracht gelassen, so ist

$$P = Q\frac{r_1 - r_2}{2R}.$$

39. Ein Cylinder liege auf zwei horizontalen Unterlagen, die in einiger Entfernung von einander in paralleler Richtung angebracht sind. Der Cylinder werde einige male mit einem dünnen, vollkommen biegsamen Faden umschlungen, an dessen Enden gleiche Gewichte Q angehängt werden. Bringt man zu einem der beiden Gewichte ein Uebergewicht F von einer solchen Größe, daß gerade

das Rollen beginnt, so haben wir n. §. 117, wenn G das Gewicht und r den Halbmesser des Cylinders bezeichnet,

$$Fr = \varphi (G + 2\,Q + F).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich das Uebergewicht F oder der Reibungscoefficient φ bestimmen. Die Versuche über rollende Reibung sind in der Weise ausgeführt worden.

Als Beispiel diene:

a. $\begin{cases} G = 40 \text{ Kilogr.}; & F = 0{,}25 \text{ Kilogr.}; \\ Q = 3{,}5 \quad » & r = 287{,}7^{mm}; \end{cases}$

$\varphi = 1{,}52^{mm}.$

b. $\begin{cases} G = 20 \text{ Kilogr.}; & r = 366{,}16^{mm}; \\ Q = 5 \quad » & \varphi = 0{,}5^{mm}; \end{cases}$

$F = 0{,}041$ Kilogr.

40. Ein Cylinder, der ein Gewicht G und den Grundflächenhalbmesser r hat, liegt auf einer geneigten Ebene vom Neigungswinkel α und werde durch eine Kraft P, die im Schwerpunkte des Cylinders parallel der schiefen Ebene wirkt, im Gleichgewicht erhalten.

Welche Größe hat P?

Wodurch bestimmt sich α, wenn der Cylinder ohne die Kraft P auf der schiefen Ebene liegen bleiben soll?

$$P = G \sin\alpha \pm \frac{\varphi}{r} G \cos\alpha,$$

$$\tang\alpha = \frac{\varphi}{r}.$$

41. Ein Körper vom Gewichte Q liege vermittelst einer Platte auf zwei Walzen von kreisförmigem Querschnitt und demselben Halbmesser R. Wie groß ist die in Richtung der Platte tangential zu den Walzen anzubringende Kraft F, welche die wälzende Reibung zwischen Platte und Walzen einerseits und Walzen und Erdboden andererseits überwindet. Die betreffenden Reibungscoefficienten seien φ und φ_1 und G sei das Gewicht der Walzen:

$$F = \frac{\varphi\, Q + \varphi_1 (Q + G)}{2\,R}$$

und bei Vernachlässigung des Gewichtes G:

$$F = \frac{Q}{2\,R} (\varphi + \varphi_1).$$

42. Eine Chausseewalze vom Halbmesser R ruht in Zapfen vom Halbmesser r. Das Gewicht der Walze sei Q, das, des auf den Zapfen liegenden Rahmen mit Zubehör, G. Wie groß ist die Kraft P in den Zugsträngen, damit die wälzende und Zapfenreibung gerade überwunden werde?

$$P R = \varphi (Q + G) + \mu_1 \sqrt{P^2 + G^2} \,.\, r.$$

Es sei

$Q = 1000$ Kilogr.; $R = 0{,}785^{m}$; $\mu_1 = 0{,}08$;

$G = 100$ Kilogr.; $r = 0{,}033^{m}$; $\varphi = 0{,}018^{m}$.

Zuerst P, aus der Gleichung $PR = \varphi (Q + G)$ berechnet, giebt als Näherungswerth $P = 25{,}2$ Kilogr., der zur Berechnung des Moments der Zapfenreibung benutzt wird, wonach sich dann aus der obigen Gleichung ein genauerer Werth von P finden läßt:

$$P = 25{,}26 \text{ Kilogr.}$$

43. Ein Rollenbett bestehe aus sechs in paralleler Lage horizontal gelagerten Cylindern vom Halbmesser r_1, deren Zapfen den Halbmesser r_2 haben mögen. Eine Last vom Gewichte Q soll mittelst einer Kraft P gerade in Bewegung gesetzt werden, d. h. mit den Widerständen der Bewegung gerade im Gleichgewicht sein.

Welchen Werth hat P, wenn die Reibungscoefficienten μ und φ und das Gewicht jedes Cylinders G ist?

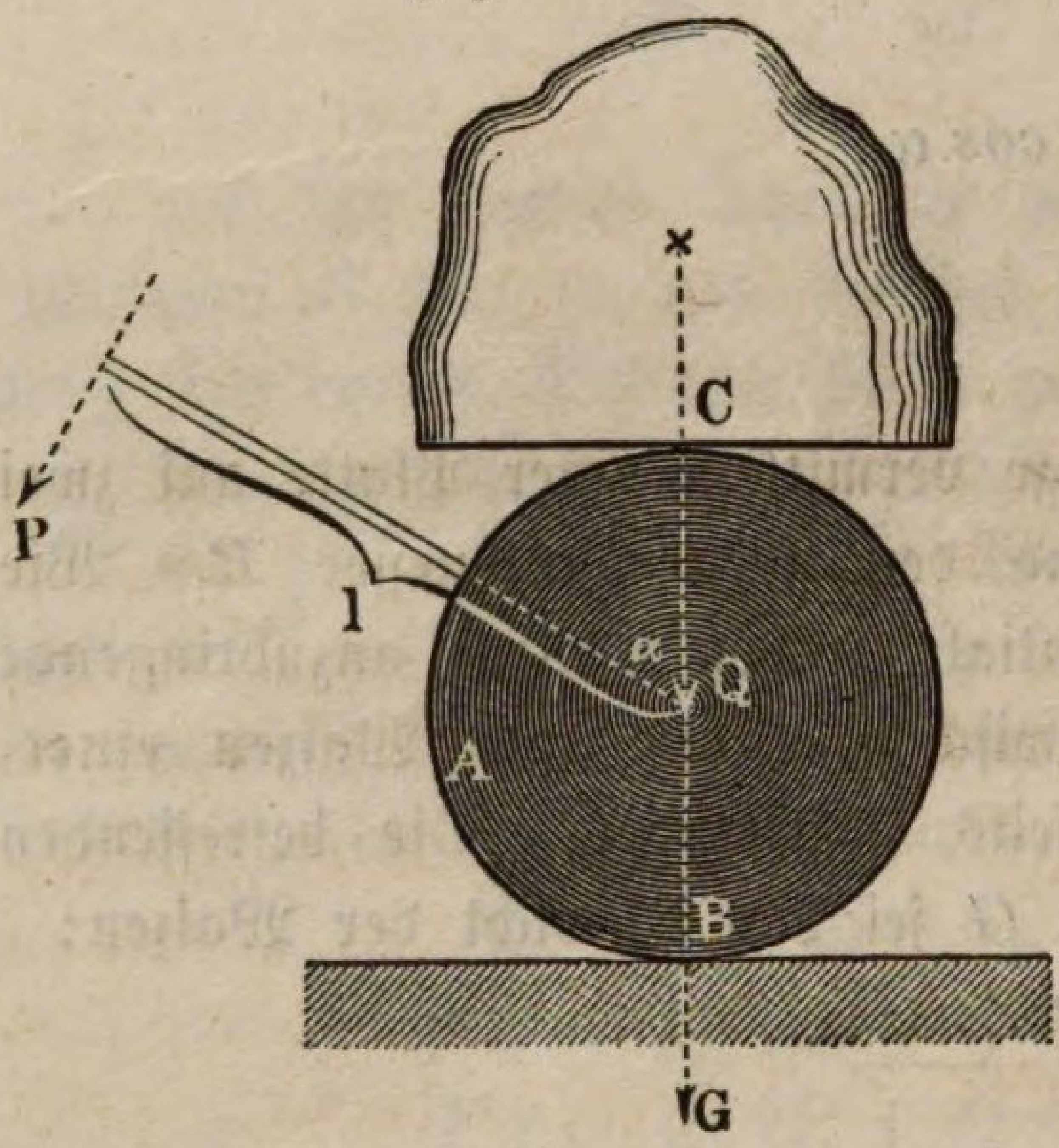
$$P = Q\frac{\varphi}{r_1} + 6\,\mu_1 \sqrt{\left(\frac{Q}{6} + G\right)^2 + P^2} \cdot \frac{r_2}{r_1},$$

oder annähernd:

$$P = \frac{Q\varphi + \mu_1 (Q + 6\,G)\, r_2}{r_1}.$$

44. Eine Last Q (Fig. 257) wird auf horizontalem Boden durch untergelegte Walzen A fortgeschafft. Die hierzu nothwendige Kraft P soll berechnet werden, wenn dieselbe normal zu einem Arme von der Länge l wirkt, der die Achse der Walze schneidet und in diesem Augenblicke mit der Verticalen den Winkel α bildet. Der Halbmesser der Walze sei r, das eigene Gewicht G und die Reibungscoefficienten seien φ_1 und φ_2.

Fig. 257.



Der Druck am oberen Berührungspunkte C ist gleich Q, der am unteren B gleich $Q + P \sin\alpha + G$. Das Moment, welches die Bewegung hervorzurufen versucht, ist $Pl + P\cos\alpha \cdot r$, die Gleichgewichtsbedingung deshalb:

$$Pl + P\cos\alpha \cdot r = \varphi_1 (Q + G + P\sin\alpha) + \varphi_2\, Q,$$

daher

$$P = \frac{Q(\varphi_1 + \varphi_2) + G\,\varphi_1}{l + r\cos\alpha - \varphi_1 \sin\alpha},$$

und für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ergiebt sich:

$$P = \varphi \frac{2\,Q + G}{l + r\cos\alpha - \varphi\sin\alpha}.$$

45. Ein Rad W (Fig. 258) vom Gewicht Q liegt mit den Enden seiner horizontalen Achse auf den Umfängen zweier Scheiben (Frictionsrollen) A und B von demselben Halbmesser R, deren Achsen sich in horizontaler fester Lagerung befinden.

Wie groß ist die, an den Umfängen der Scheiben, zur Ueberwindung der Zapfenreibung nothwendige Kraft, wenn der Halbmesser der Scheibenzapfen $= r$ ist, und die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Scheiben mit dem Centrum des Rades zu der Richtung von Q unter dem Winkel γ geneigt sind?

$$P = \frac{Q}{2 \cos \gamma} \cdot \frac{\varphi + \mu_1 r}{R}.$$

Es ist hiernach vortheilhaft, Winkel γ möglichst klein zu nehmen.

Fig. 258.

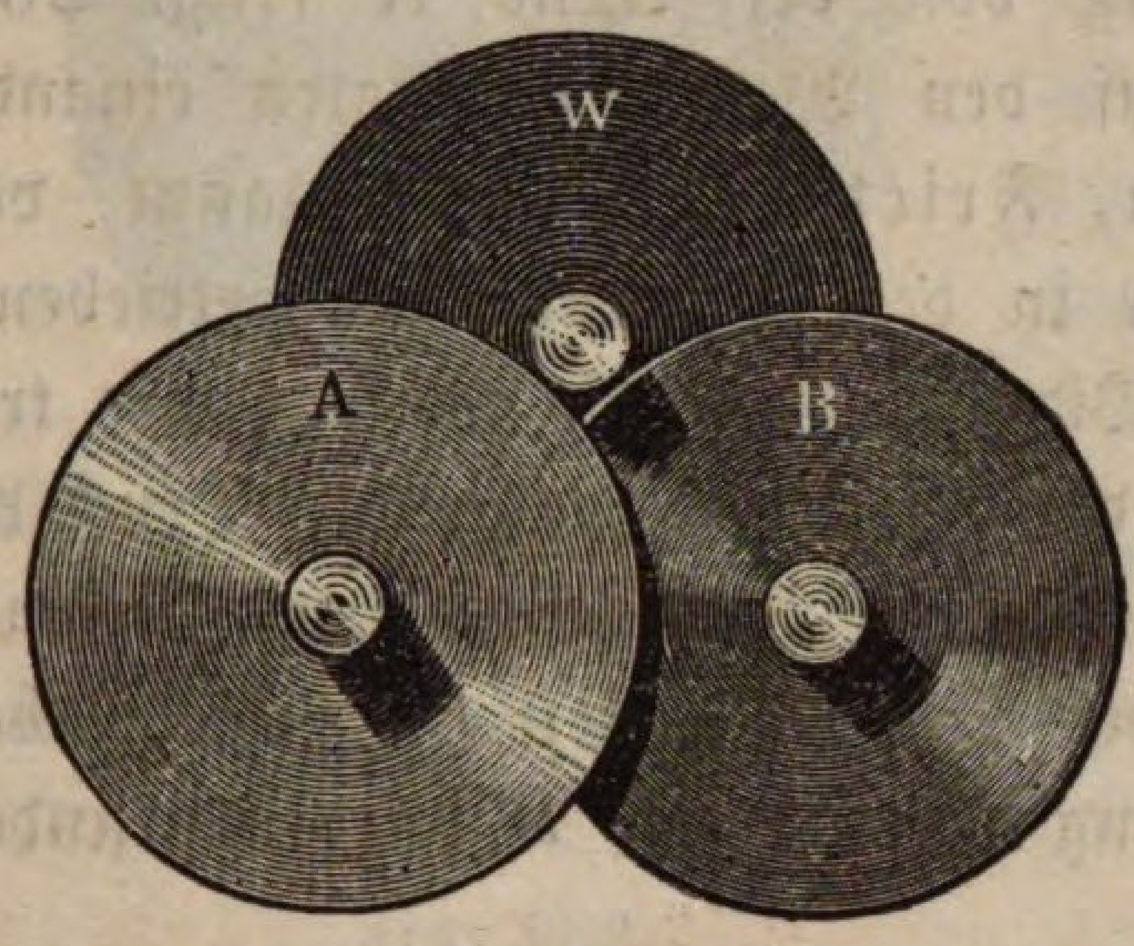
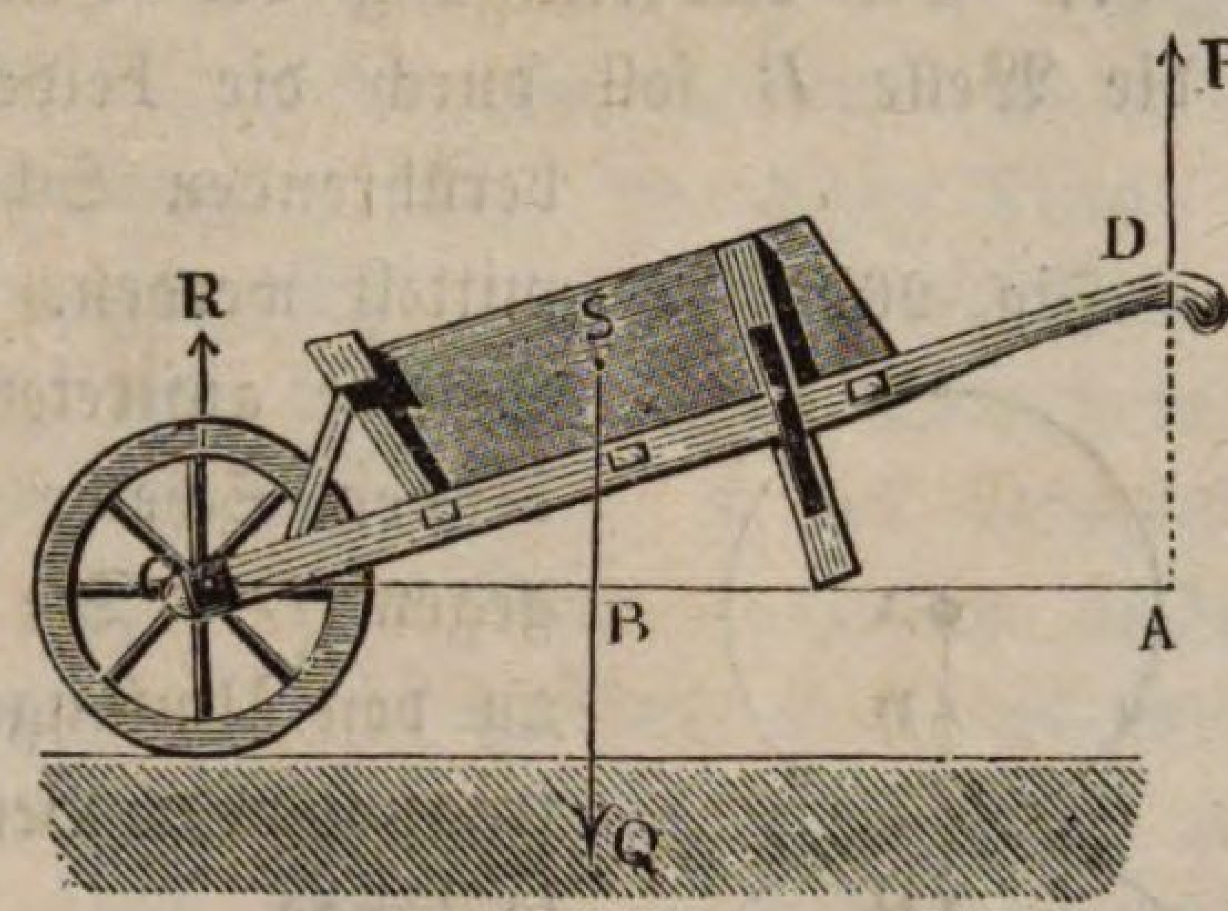


Fig. 259.



46. Auf einem Schiebkarren (Fig. 259) liegt eine Last Q. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt S findet sich in der Entfernung $CB = b$ von der Radachse C, während das Ende des Karrenarmes um $CA = a$ entfernt sein mag.

Wie groß ist die Kraft, die gerade die Hindernisse überwindet, wenn R der Halbmesser des Rades, r der der Achse, μ und φ die Reibungscoefficienten sind?

Man zerlege Q in zwei parallele Componenten, in C und D wirksam; die erstere ist $Q \frac{a - b}{a}$ und die in D wirkende $Q \frac{b}{a}$, welche Last von dem in D anfassenden Menschen überwunden werden muß. Die in Richtung von DC wirksame Kraft sei F, welche, den Winkel DCA mit α bezeichnend, in die beiden Componenten $F \cos \alpha$ nach horizontaler Richtung und $F \sin \alpha$ nach verticaler Richtung zerfällt. Die wälzende Reibung wird von $Q \frac{a - b}{a}$ und $F \sin \alpha$ erzeugt, die Zapfenreibung dagegen durch den Druck

$$\sqrt{\left(Q \frac{a - b}{a} + F \sin \alpha\right)^2 + (F \cos \alpha)^2}.$$

Es ist deshalb:

$$F \cos \alpha . R = \varphi \left(Q \frac{a-b}{a} + F \sin \alpha\right) + \mu_1 r \sqrt{\left(Q \frac{a-b}{a} + F \sin \alpha\right)^2 + (F \cos \alpha)^2}.$$

Unter dem Wurzelzeichen kann man den Summand $(F \cos \alpha)^2$ vernachlässigen, wodurch sich eine bequemere Formel zur Berechnung von F ergiebt.

$$F\cos\alpha \,.\, R = (\varphi + \mu_1 r)\left(Q\frac{a-b}{a} + F\sin\alpha\right),$$

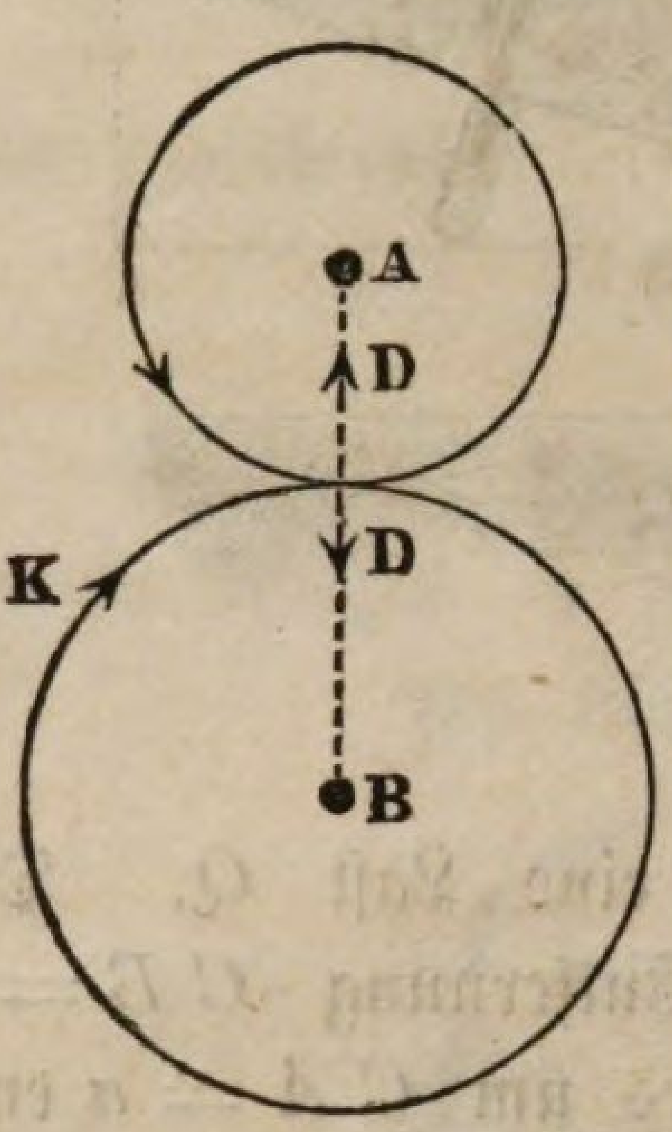
$$F = Q\frac{a-b}{a}\,\frac{\varphi + \mu_1 r}{R\cos\alpha - (\varphi + \mu_1 r)\sin\alpha}.$$

Erhält α einen verhältnißmäßig kleinen Werth, so daß $\sin\alpha = 0$ und $\cos\alpha = 1$ gesetzt werden darf, so ist endlich

$$F = Q\frac{a-b}{a}\,\frac{\varphi + \mu_1 r}{R}.$$

47. Die Uebertragung der Bewegung von der Welle A (Fig. 260) auf die Welle B soll durch die beiden auf den Wellen befestigten einander berührenden Scheiben, Frictionsräder genannt, vermittelt werden. Der in dem Umfange der getriebenen Scheibe auftretende Widerstand sei K, der von der treibenden Scheibe auf die getriebene ausgeübte Druck dagegen D. Die aus dem letzteren entstehende Reibung an den Umfängen der Scheiben ist μD. Die Uebertragung der Bewegung von A auf B wird stattfinden, so lange

Fig. 260.



$$\mu D > K \text{ ist.}$$

Für den Grenzfall ist hiernach:

$$D = \frac{K}{\mu},$$

d. h. der Druck D muß um so größer sein, je kleiner der Reibungscoefficient μ ist. Sobald $K > \mu D$ wird, hört die Uebertragung der Bewegung auf, es findet ein Rutschen statt und es müssen dann andere Hülfsmittel zur Uebertragung benutzt werden. Hierher gehören die Anbringung von keilförmigen Nuthen auf den Scheibenumfängen, Uebertragung der Bewegung durch Zahnräder oder durch um beide Scheiben gelegte und gespannte Riemen. Bezeichnen wir den Winkel, den die beiden Seiten einer Keilnuth mit einander machen mit 2δ, so ist der Normaldruck gegen die Seitenwandungen derselben $\frac{1}{n}\frac{D}{2\sin\delta}$, wenn n solcher Keilnuthen vorhanden sind, und die hieraus sich ergebende Reibung gleich $2n\mu\frac{1}{n}\frac{D}{2\sin\delta}$ $= \mu\frac{D}{\sin\delta}$. Für den oben angenommenen Grenzfall ist daher

$$D = \sin\delta\,\frac{K}{\mu},$$

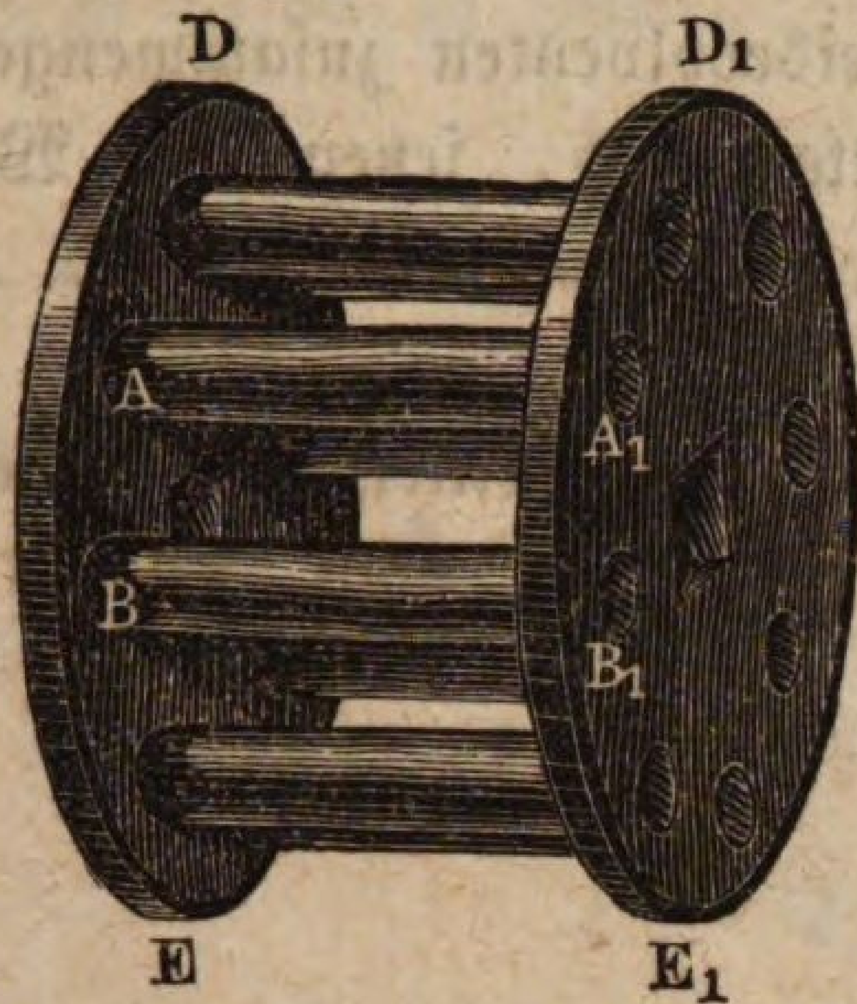
woraus ersichtlich, daß in diesem Falle der Druck D geringer sein kann, als bei vollkommen glatten Scheibenumfängen.

48. Bestimmung der Reibung, die zwischen den Seitenflächen der Zähne zweier in einander greifender Räder stattfindet.

Ein Drehling oder Trilling besteht aus zwei parallelen Scheiben DE

und $D_1 E_1$ (Fig. 261), die durch cylindrische oder konische Stäbe, Triebstöcke genannt, verbunden sind. Bei der Uebertragung der Bewegung an einen solchen

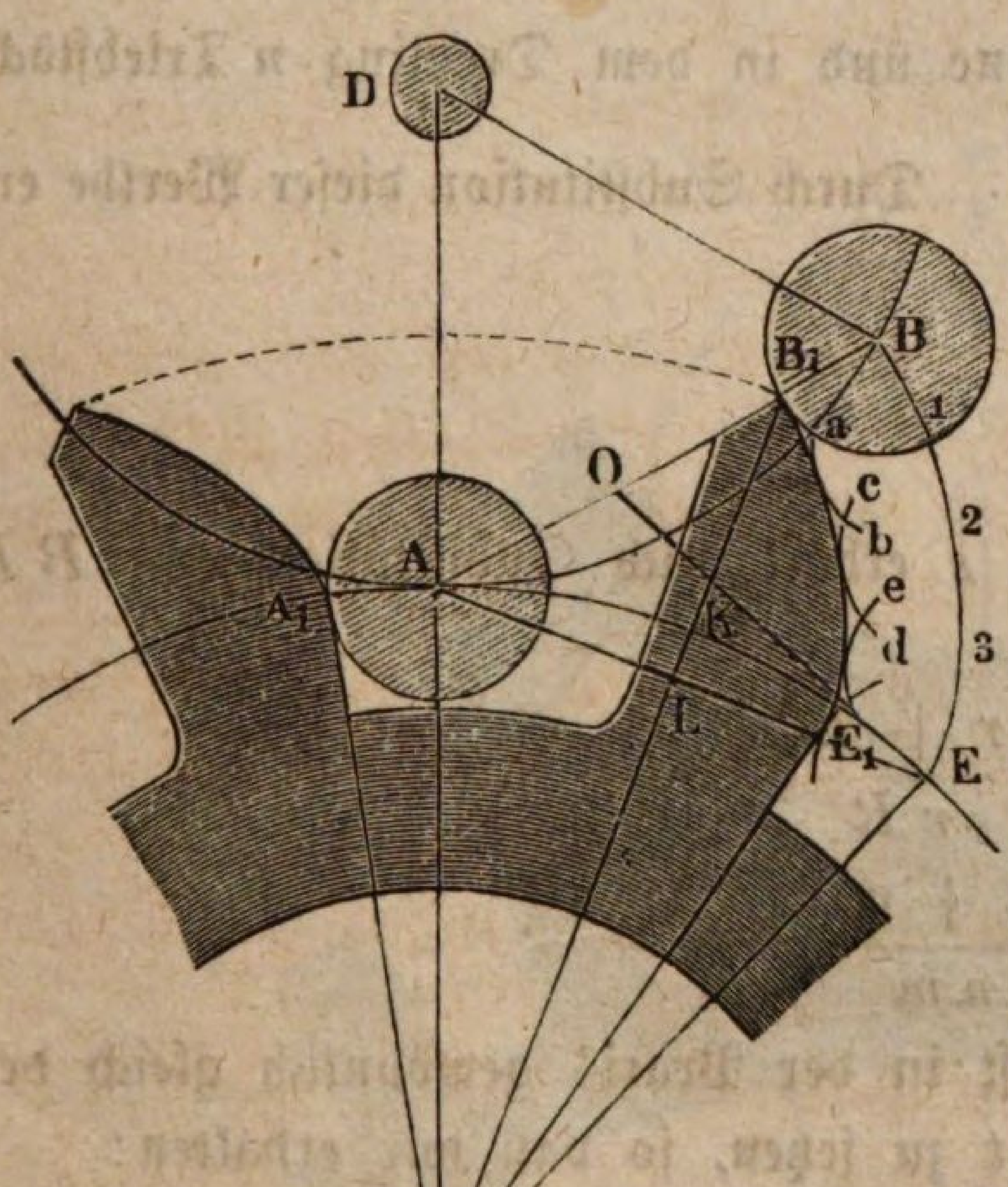
Fig. 261.



Drehling greifen die Zähne des Zahnrades in die zwischen zwei Triebstöcken vorhandenen Zwischenräume.

Denkt man den Drehling-Theilkreis BA (Fig. 262) auf dem ruhenden Zahnrad-Theilkreise EA abgerollt, so beschreibt der Mittelpunkt eines Triebstocks eine Epicykloide, weshalb die Wölbung $B_1 E_1$ eines Zahnes nach einer dem Epicykloidenbogen BE parallelen Curve geschehen muß. Wird, wie es gewöhnlich der Fall ist, der Drehling durch das Zahnrad getrieben, so erfolgt der Eingriff, wenn der Mittelpunkt A des Triebstockes in der Centrale CD der beiden Räder liegt. Zur Bestimmung der Reibung zwischen Triebstock und Zahn nehmen wir in dem Theilriß AE des Rades die Kraft P und im Theilriß AB des Drehlings den Widerstand Q an. Aus dem Widerstande Q entspringt tangential zur Wölbungslinie des Zahnes die Reibung μQ, wenn μ den Reibungscoefficienten bezeichnet. Es müssen hiernach die drei Kräfte P, Q und μQ unter sich im Gleichgewicht sein.

Fig. 262.



Die Theilung der Räder $AB = AE$ setzen wir gleich t, die Länge der Zahncurve $B_1 E_1$ gleich s. Bei dem einmaligen Fortschieben des Triebstockes sind die Wege der drei Kräfte P, Q und μQ gleich t, t und s, welche wir in absoluter Hinsicht den virtuellen Geschwindigkeiten proportional nehmen können. Hiernach erhalten wir, die algebraische Summe der virtuellen Momente gleich 0 gesetzt, die Kraft P, welche zur Ueberwindung des Widerstandes und der Reibung nothwendig ist:

$$Pt - Qt - \mu Q s = 0,$$

$$P = Q\left(1 + \mu \frac{s}{t}\right).$$

Zur Bestimmung von s haben wir:

$$BE : B_1 E_1 = AB : AB_1,$$

oder, wenn ϱ den Halbmesser BB' des Triebstockes bezeichnet:

$$BE : s = t : t - \varrho$$

und

$$s = \frac{t - \varrho}{t} BE.$$

Wir denken den Bogen BE aus zwei Kreisevolventen zusammengesetzt, für die die beiden Kreise C und D die Evoluten sind, setzen den Winkel $ACE = \alpha$, den Winkel $ADB = \beta$ und die Halbmesser AC und AD gleich R und r.

Die Länge eines Kreisevolventenbogens, der zum Mittelpunktswinkel φ gehört und dessen Evolutenkreis den Halbmesser r hat, ist nach Gesetzen der höheren Mathematik gleich $\frac{1}{2} r \varphi^2$.

Wenden wir dies an, so ist:

$$BE = \tfrac{1}{2} R \alpha^2 + \tfrac{1}{2} r \beta^2$$
$$= \tfrac{1}{2} t (\alpha + \beta), \text{ da}$$
$$R\alpha = r\beta = \text{der Theilung } t \text{ ist.}$$

oder, für α und β ebenfalls die entsprechenden Werthe $\frac{t}{R}$ und $\frac{t}{r}$ eingesetzt:

$$BE = \tfrac{1}{2} t^2 \frac{r + R}{rR}.$$

Es seien in dem Zahnrade m Zähne und in dem Drehling n Triebstöcke vorhanden, so ist $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ und $\beta = \frac{2\pi}{n}$. Durch Substitution dieser Werthe erhalten wir andererseits:

$$BE = \pi t \frac{n + m}{mn}.$$

Der oben entwickelte Ausdruck von s erhält nach Substitution von BE folgende Werthe:

$$s = \tfrac{1}{2} t (t - \varrho) \frac{r + R}{rR},$$

$$s = \pi (t - \varrho) \frac{n + m}{nm}.$$

Der Durchmesser des Triebstockes ist in der Praxis gewöhnlich gleich der Hälfte der Theilung, für ϱ ist daher $\frac{1}{4} t$ zu setzen, so daß wir erhalten:

$$s = \tfrac{3}{8} t^2 \frac{r + R}{rR} = \tfrac{3}{4} \pi t \frac{n + m}{nm},$$

und die zur Ueberwindung von Q und μQ nothwendige Kraft P ist demnach gleich

$$P = Q\left(1 + \tfrac{3}{8} \mu t \frac{r + R}{rR}\right),$$

oder

$$P = Q\left(1 + \tfrac{3}{4} \mu \pi \frac{n + m}{nm}\right).$$

Aus dem zweiten Summand in der Klammer, der das Wachsthum der Kraft P durch die hervorgerufene Reibung anzeigt, lernen wir, daß dieselbe um so kleiner wird, je größer die Anzahl der Räderzähne ist.

Als specielle Fälle reihen sich hieran noch folgende:

a. für das Zahnrad eine Zahnstange angenommen, so sind die Zähne desselben nach Cykloiden abzurunden und in den vorstehenden Formeln ist $R = m = \infty$ zu setzen:

$$P = Q\left(1 + \tfrac{3}{8}\mu\,\frac{t}{r}\right),$$

$$P = Q\left(1 + \tfrac{3}{4}\mu\,\frac{\pi}{n}\right).$$

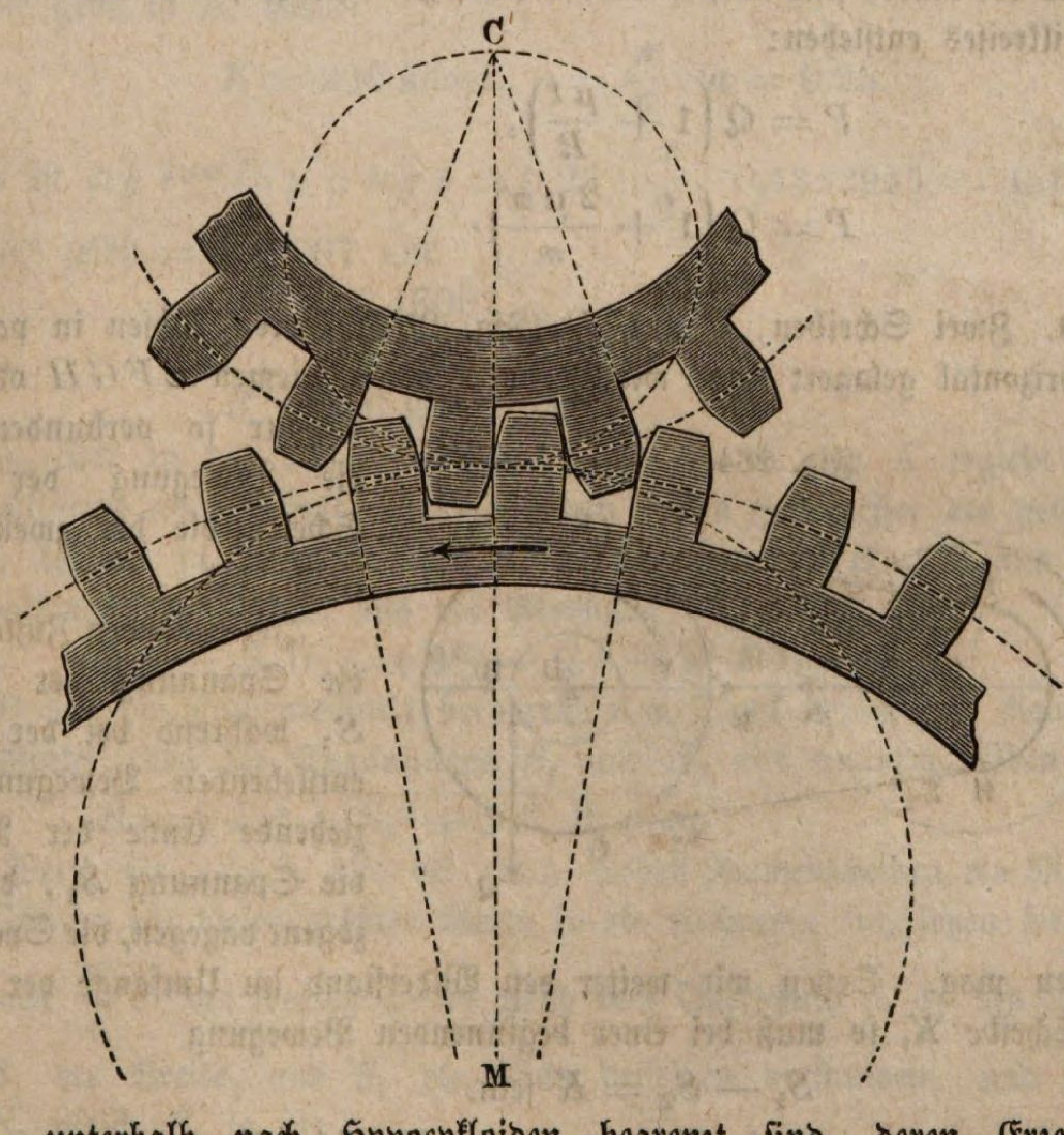
b. Für den cylindrischen oder konischen Drehling einen geraden angenommen, so sind die Zähne des Rades nach Kreisevolventen zu begrenzen und in den vorstehenden Formeln ist also $r = n = \infty$ zu setzen:

$$P = Q\left(1 + \tfrac{3}{8}\mu\,\frac{t}{R}\right),$$

$$P = Q\left(1 + \tfrac{3}{4}\mu\,\frac{\pi}{m}\right).$$

In ähnlicher Weise findet sich die Kraft P zur Ueberwindung des Widerstandes Q und der Reibung $\mu\,Q$ für zwei in einander greifende Stirnräder C und M (Fig. 263), bei denen die Zähne oberhalb des Theilrisses nach Epicy-

Fig. 263.



kloiden, unterhalb nach Hypocykloiden begrenzt sind, deren Erzeugungskreise einen halb so großen Durchmesser haben, als die Theilkreise der Räder.

Die Hypocykloide wird bei dieser Annahme des Erzeugungskreises zu einer geraden Linie.

In diesem Falle beginnt der Eingriff der Zahnräder um ebenso viel vor der Centrallinie MC, als er hinter derselben aufhört. Das treibende Rad M mag m Zähne und den Halbmesser R haben, das getriebene Rad C dagegen soll mit n Zähnen versehen sein und den Halbmesser r haben, so ist:

$$P = Q\left(1 + \tfrac{1}{2}\mu t \frac{2R + r}{rR}\right),$$

$$P = Q\left(1 + \mu\pi \frac{2m + n}{mn}\right).$$

Wird das treibende Rad zu einer Zahnstange, so sind die Zähne des Rades gerade, die der Stange durch Cykloiden begrenzt, deren Erzeugungskreis einen halb so großen Durchmesser hat als der Theilkreis des Rades:

$$P = Q\left(1 + \frac{\mu t}{r}\right),$$

$$P = Q\left(1 + \frac{2\mu\pi}{n}\right).$$

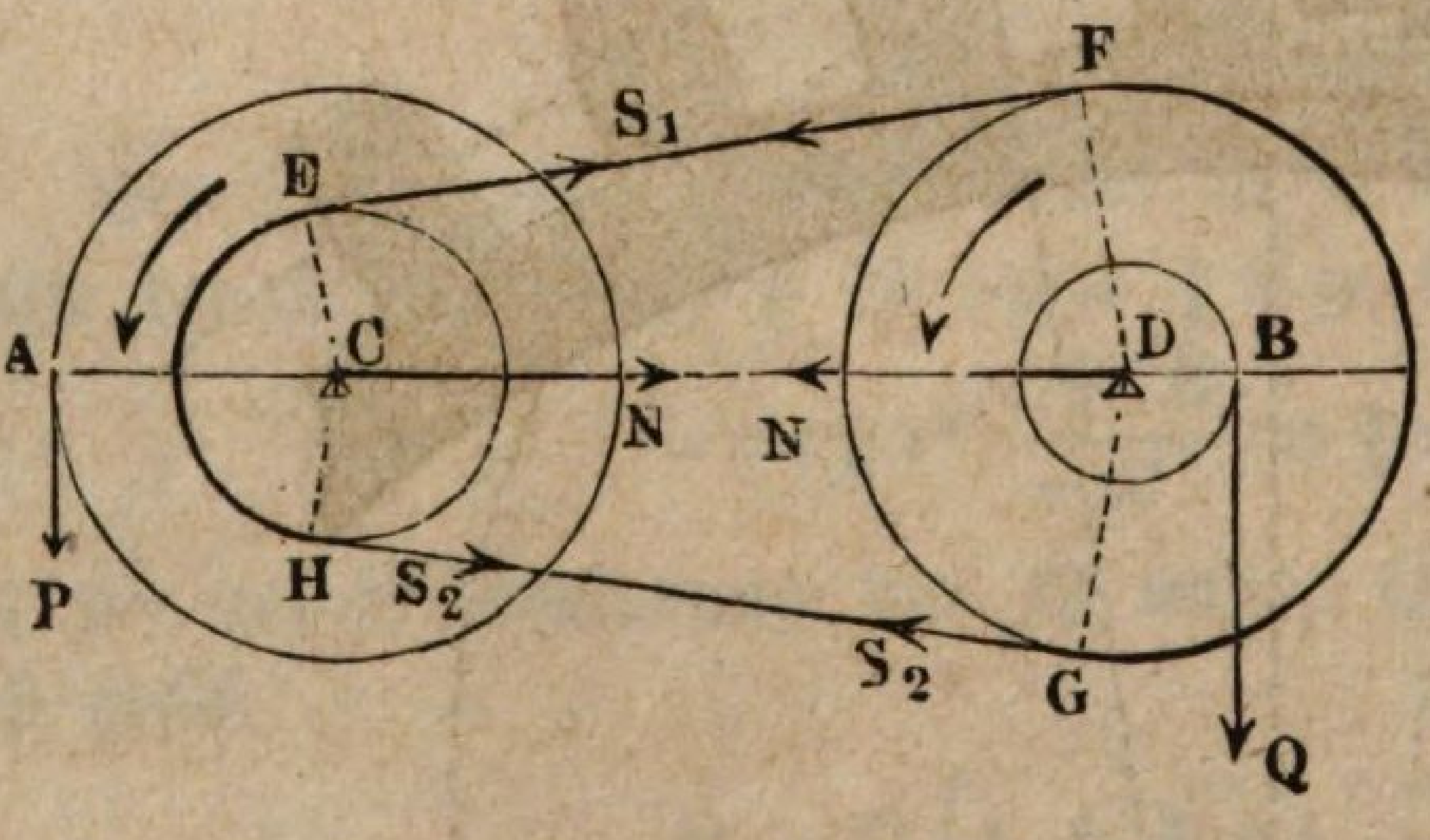
Ist das getriebene Rad eine Zahnstange, so sind deren Zähne gerade, die Zähne des Rades sind nach Kreisevolventen zu begrenzen, die durch Abwickelung des Theilkreises entstehen:

$$P = Q\left(1 + \frac{\mu t}{R}\right),$$

$$P = Q\left(1 + \frac{2\mu\pi}{m}\right).$$

49. Zwei Scheiben, C und D (Fig. 264), deren Achsen in paralleler Lage horizontal gelagert sind, werden durch einen Riemen $EFGH$ oder eine Schnur so verbunden, daß die Bewegung der einen Scheibe die der zweiten zur Folge hat.

Fig. 264.



Im ruhenden Zustande sei die Spannung der Riemen S, während bei der gerade entstehenden Bewegung das ziehende Ende der Riemen, die Spannung S_1, das gezogene dagegen, die Spannung S_2 haben mag. Setzen wir weiter den Widerstand im Umfange der getriebenen Scheibe K, so muß bei einer beginnenden Bewegung

$$S_1 - S_2 = K \text{ sein.}$$

Nimmt man an, daß S_1 gegen die anfängliche Spannung S um eben so viel zunimmt, als S_2 abnimmt, so ist:

$$S_1 = S + \tfrac{1}{2} K,$$
$$S_2 = S - \tfrac{1}{2} K,$$

d. h.
$$S = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

Es ist der Werth von S zu berechnen, damit bei einer beginnenden Bewegung der Widerstand K gerade überwunden werde.

Wir haben nach F. 116:
$$S_1 = e^{\mu \alpha} S_2.$$

Bei Benutzung der obigen Relationen ergiebt sich:
$$K = e^{\mu \alpha} S_2 - S_2,$$
$$S_2 = \frac{K}{e^{\mu \alpha} - 1} \text{ und } S_1 = \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1} K,$$
$$S = \tfrac{1}{2} \frac{e^{\mu \alpha} + 1}{e^{\mu \alpha} - 1} K.$$

Dieser Werth genügt gerade dem Gleichgewichtszustande, will man daher auf eine Uebertragung sicher rechnen, so muß man S größer als den eben gefundenen Werth nehmen:
$$S > \tfrac{1}{2} \frac{e^{\mu \alpha} + 1}{e^{\mu \alpha} - 1} K.$$

Wie groß ist S, wenn
$$K = 200 \text{ Kilogr.}, \alpha = \frac{\pi}{2}, \mu = 0{,}25.$$

Es ist $log\, e^{\mu \alpha} = \mu\, \alpha\, log\, e = 0{,}25 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0{,}4342945 = 0{,}170547,$ daher $e^{\mu \alpha}$ selbst $= 1{,}48097$ und
$$S > \tfrac{1}{2} \frac{2{,}48097}{0{,}48097} 200$$
$$S > 516 \text{ Kilogramm.}$$

50. Der in der letzten Formel benutzte Werth von K ergiebt sich bei Berücksichtigung aller Nebenhinderniſſe, wenn r den Halbmesser der getriebenen Scheibe, Q den zu überwindenden Druck am Arme $DB = b$ und r_1 den Zapfenhalbmesser bezeichnet, aus der Gleichung
$$S_1\, r - S_2\, (r + \psi\, \delta^2) - Q\, b - \mu_1\, B\, r_1 = 0,$$
worin B den die Zapfenreibung hervorrufenden Druck bezeichnet. Nennt man ε den Winkel, den die Spannungen S_1 und S_2 mit einander bilden, so ist
$$B = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2\, S_1\, S_2 \cos \varepsilon},$$
welcher Werth für $\varepsilon = 0$, also bei gleich großen Riemenscheiben ein Maximum wird. Führen wir diesen größten Werth in die Rechnung ein, setzen ferner den Querschnitt $\frac{\pi}{4} \delta^2$ des idealen Seiles gleich dem Querschnitt $\beta_1\, \delta_1$ des Riemens, unter β_1 die Breite, und δ_1 die Dicke desselben verstanden, und nehmen $S_1 - S_2$ gleich K, so ist:
$$K\, r - S_2\, \frac{4}{\pi}\, \psi\, \beta_1\, \delta_1 - Q\, b - \mu_1\, (S_1 + S_2)\, r_1 = 0.$$

Bestimmen wir K dagegen durch die Kraft P am Arm $CA = a$ wirksam, wenn der Halbmesser der treibenden Scheibe mit R und der Zapfenhalbmesser wieder mit r_1 bezeichnet wird, so ist:

$$KR - Pa - S_1 \frac{4}{\pi} \psi \beta_1 \delta_1 - \mu_1 (S_1 + S_2) r_1 = 0.$$

Benutzen wir außerdem noch die in voriger Nummer angegebenen Beziehungen

$$S_1 = K \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1}, \; S_2 = K \frac{1}{e^{\mu \alpha} - 1}$$

und

$$S_1 + S_2 = 2\,S = K \frac{e^{\mu \alpha} + 1}{e^{\mu \alpha} - 1},$$

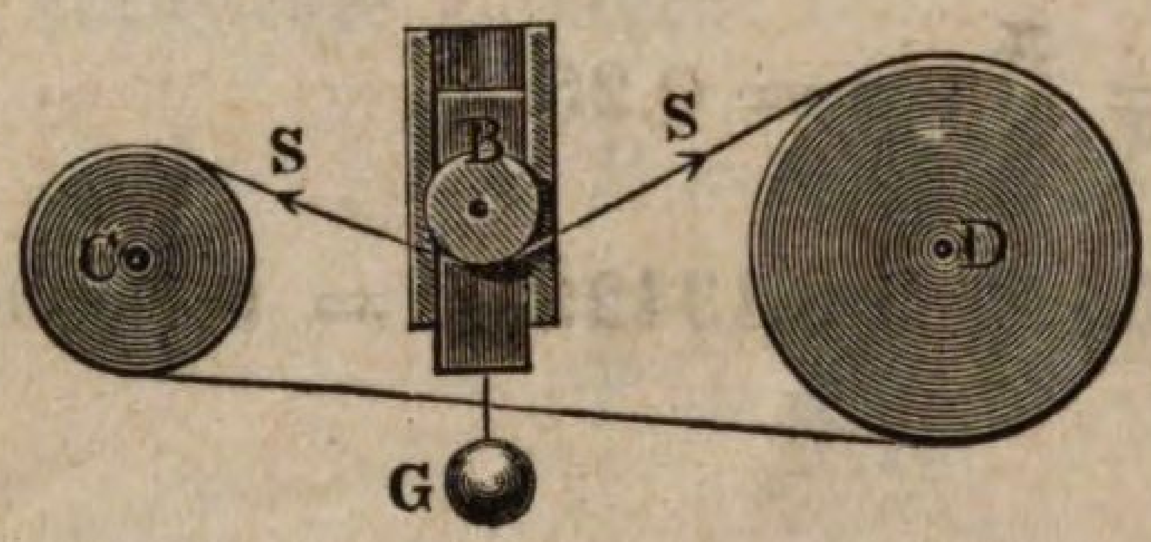
so läßt sich jede der angegebenen Gleichgewichtsbedingungen zur genaueren Berechnung von K benutzen.

Sehen wir bei der Bestimmung von K von allen Nebenhindernissen ab, so ist

$$K = P \frac{a}{R} = Q \frac{b}{r}.$$

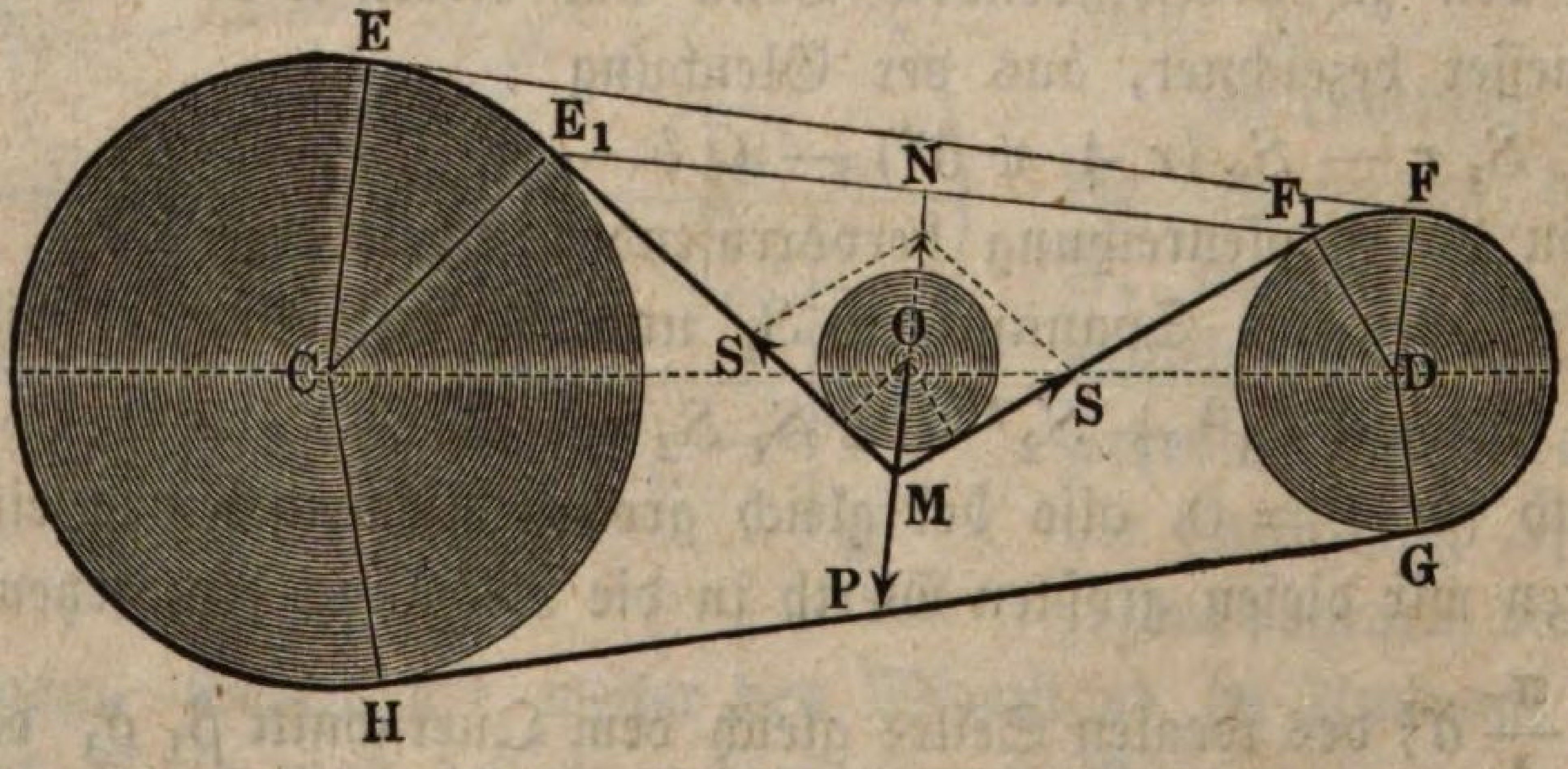
Die Spannung der Riemen bringt man gewöhnlich durch sogenannte Spannrollen B (Fig. 265) hervor. Diese sind Rollen mit beweglichen Lagern, die einen Druck gegen ein freies Stück des Riemens ausüben und auf die Weise die natürliche Spannung vermehren. Der Druck auf die Achse der Rolle wird durch angehängte Gewichte G oder durch einen Hebel, der mit Gewichten in Verbindung gesetzt ist, hervorgebracht. Die Spannrolle muß stets so angebracht werden, daß der Berührungsbogen der Riemen vergrößert werde.

Fig. 265.



Es wirke die Spannrolle gegen das ziehende Riemenende, das die Spannung S hat, so ist der Theorie der losen Rolle gemäß, wenn wir Winkel $E_1 M F_1 = 2\gamma$ setzen (Fig. 266),

Fig. 266.



$$2\,S \cos \gamma = P,$$

wenn P den durch die Rolle ausgeübten Druck bezeichnet.

Setzen wir statt S den oben gefundenen Werth, wobei jedoch statt $\mu\,\alpha$, $\mu\,(\alpha + \beta)$ zu setzen ist, wenn der Berührungsbogen durch die Spannrolle um den Winkel $F D F_1 = \beta$ vergrößert wird, so entsteht:

$$S = K \frac{e^{\mu(\alpha+\beta)}}{e^{\mu(\alpha+\beta)} - 1}$$

und

$$P = 2\,K \frac{e^{\mu(\alpha+\beta)}}{e^{\mu(\alpha+\beta)} - 1} \cos\gamma.$$

Schneiden sich die Linien $E F$, $E_1 F_1$ und $H G$ in demselben Punkte der Centrale, so ist, wenn wir die Halbmesser der Scheiben mit R und r, und den normalen Abstand $C D$ ihrer Achsen mit d bezeichnen:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma\right) = \frac{R - r}{d} \sin\gamma.$$

Durch Benutzung dieser Gleichung mit der obigen kann man, wenn γ gegeben ist, β, dann die Spannung S und endlich auch die durch die Spannrolle hervorgerufene Spannkraft P berechnen. Wie groß ist P, wenn

$K = 150$ Kilogr.; $R = 0{,}654^m$; $r = 0{,}131^m$; $d = 2{,}197^m$, $\gamma = 60^\circ$; $\mu = 0{,}25$.

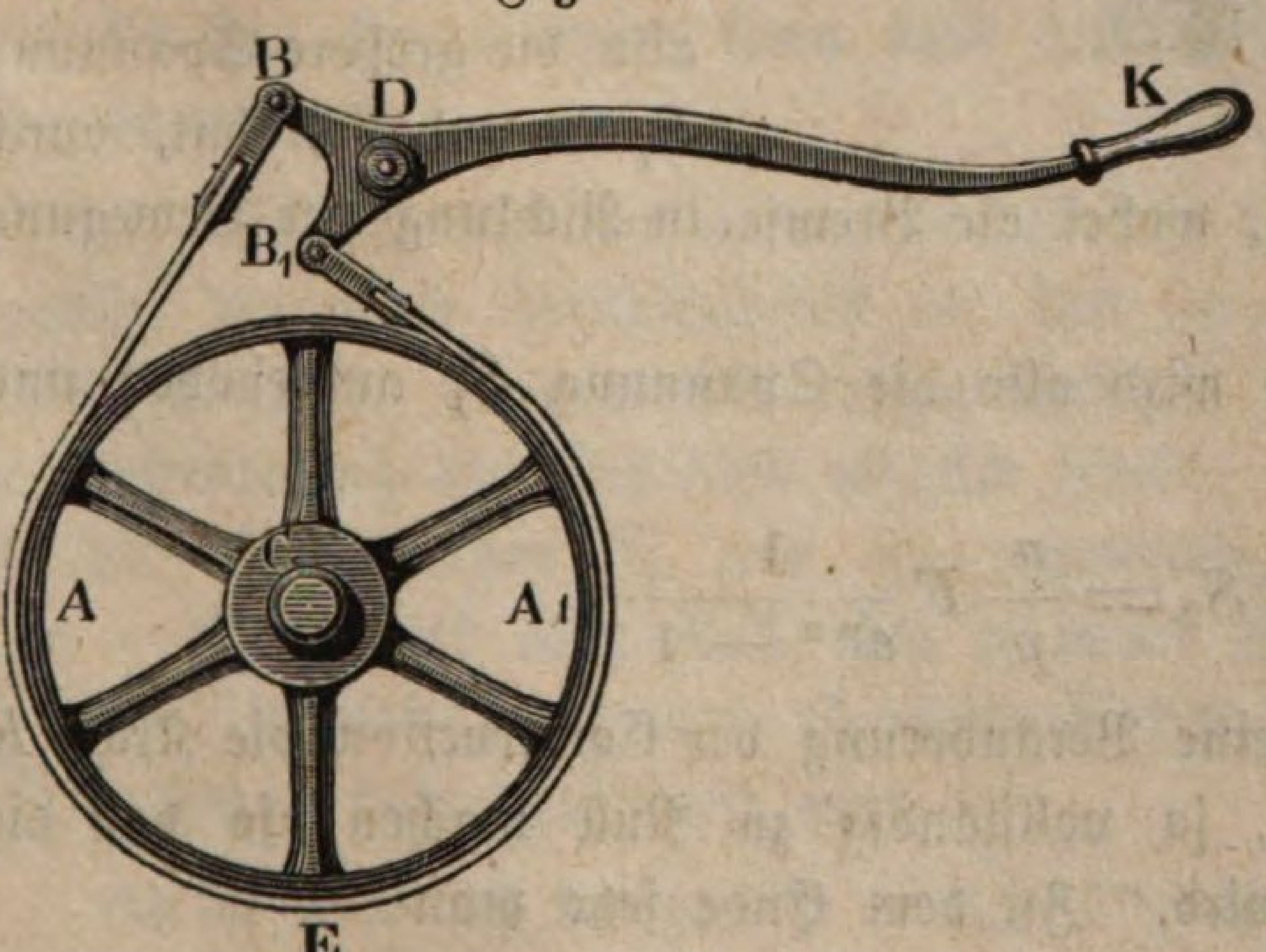
Es ist $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{R - r}{d} = \frac{0{,}523}{2{,}197}$ und $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta + \gamma\right) = \frac{0{,}523}{2{,}197} \sin 60$.

Aus der ersten Gleichung findet sich $\alpha = 152^\circ\,27'\,24 = 0{,}847\,\pi$, aus der zweiten, mit Benutzung des Werthes von α, $\beta = 31^\circ\,52'\,28'' = 0{,}177\,\pi$. Weiter ist $\log e^{\mu(\alpha+\beta)} = 0{,}25 \,.\, 1{,}024\,\pi \log e = 0{,}34928$, daher $e^{\mu(\alpha+\beta)} = 2{,}235$.

$$S = 150 \frac{2{,}235}{1{,}235} = 271{,}46 \text{ Kilogr. und } P = 2\,S \cos 60 = S.$$

51. Die Berechnung des Bandbremses beruht auf demselben Principe. Die Bremsen werden gewöhnlich mit der Hand in Bewegung gesetzt und am einfachsten dadurch hergestellt, daß man gegen den Kranz einer Scheibe $A A$ (Fig. 267) mit Hülfe eines Hebels $B B_1 D K$ ein schmiedeeisernes Band andrückt. Dasselbe erzeugt an dem Umfange der abgedrehten gußeisernen Scheibe Reibung, die so groß gemacht werden muß, daß sie der Last das Gleichgewicht hält.

Fig. 267.



Setzen wir bei einer Bandbremse den Druck in dem Umfange der Scheibe gleich F,

die Spannung des ziehenden Bandendes S_1, die des gezogenen S_2, so ist für den Gleichgewichtszustand, wenn K die Kraft am Arme p bezeichnet und S_1 und S_2 am Arme m wirken,

$$Kp - m(S_1 + S_2) = 0,$$

wenn man beide Spannungen durch die Kraft am Hebel erzeugen muß.

Nachdem die oben gefundenen Werthe von S_1 und S_2 substituirt sind, entsteht

$$K = \frac{m}{p} \frac{e^{\mu\alpha} + 1}{e^{\mu\alpha} - 1} F.$$

Sind die Arme BD und BD_1 der Spannungen S_1 und S_2 verschieden gleich m und n, so ist

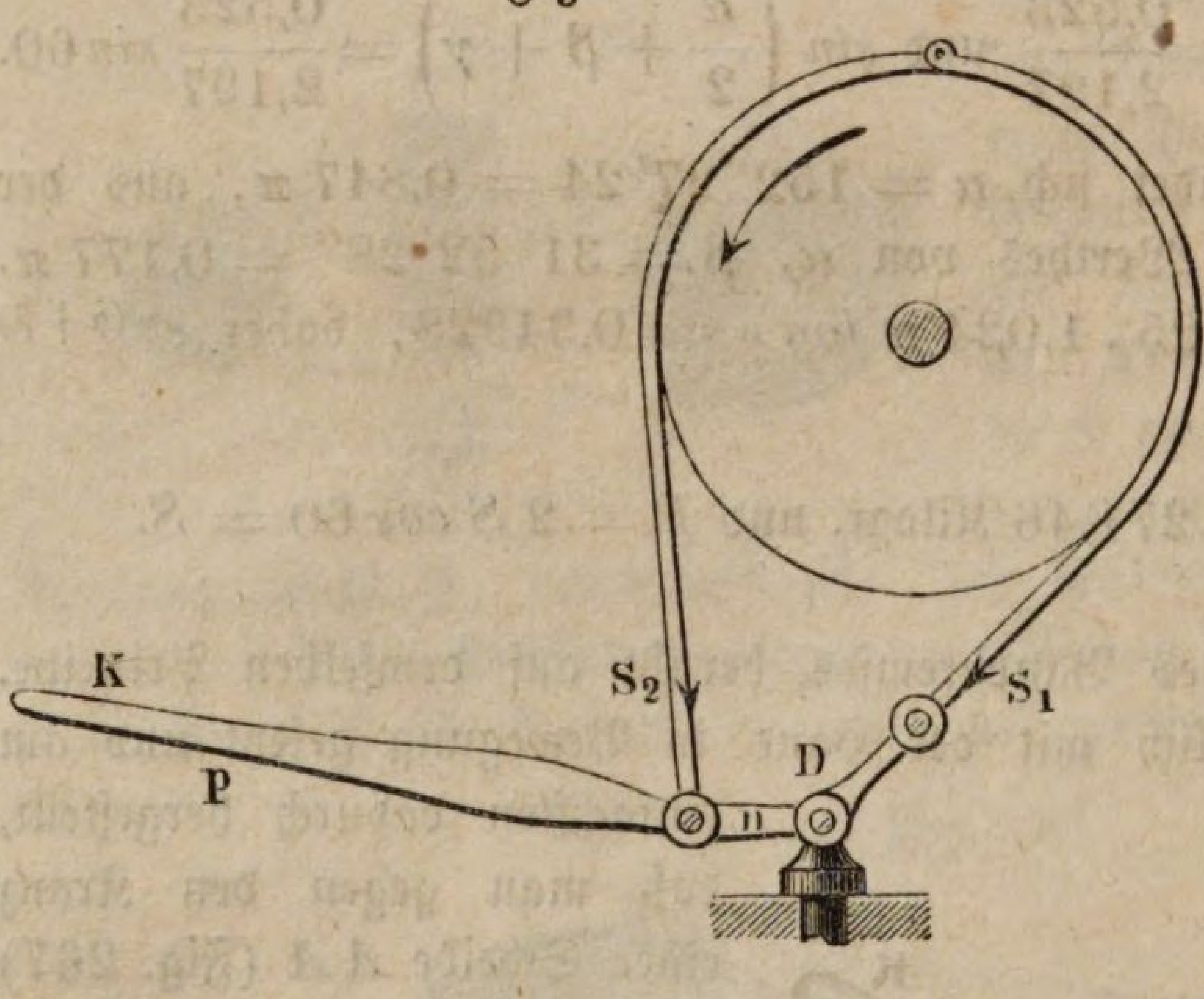
$$Kp = S_1 m + S_2 n,$$

oder

$$Kp = F \frac{m e^{\mu\alpha} + n}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Soll die Bremse so construirt werden, daß der vom Arbeiter auszuübende Druck K ein Minimum werde, so muß man bei gegebenem p auf Verringerung der Summe der Momente $S_1 m + S_2 n$ Bedacht nehmen. Da die Spannungen S_1 und S_2 durch F und α als gegeben angesehen werden müssen, so sind behufs Verringerung von K die Arme m und n zu verkleinern, oder der Drehpunkt des Hebels ist so anzuordnen, daß einer der Arme zu Null werde. In Figur 268 ist die gebräuchliche Construction der Bandbremse angegeben, bei der die Richtung des ziehenden Bremsbandes, das also die größere Spannung S_1 auszuhalten hat, durch den Drehpunkt des Hebels geht, wobei die Bremse in Richtung der Bewegung angezogen werden muß.

Fig. 268.



Für eine derartige Bremse wird also die Spannung S_1 aufgehoben und es ist:

$$K = \frac{n}{p} S_2 = \frac{n}{p} F \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1}.$$

Es läßt sich jedoch durch eine Veränderung der Construction die Kraft K noch um viel mehr verringern, ja vollständig zu Null machen, so daß die Bremse zu einer selbstthätigen wird. Zu dem Ende setze man

$$S_1 m + S_2 n = 0,$$

d. h. die Momente der beiden Spannungen müssen entgegengesetztes Zeichen haben.

Aus der Gleichung folgt bei dieser Annahme:

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu \alpha} = \frac{n}{m},$$

d. h. die absoluten Werthe der Spannungen verhalten sich umgekehrt wie ihre Arme. Die Figuren 269, 270 zeigen für diese Bedingungen eine zweifache Construction, welche unter dem Namen Differentialbremse bekannt ist.

Fig. 269.

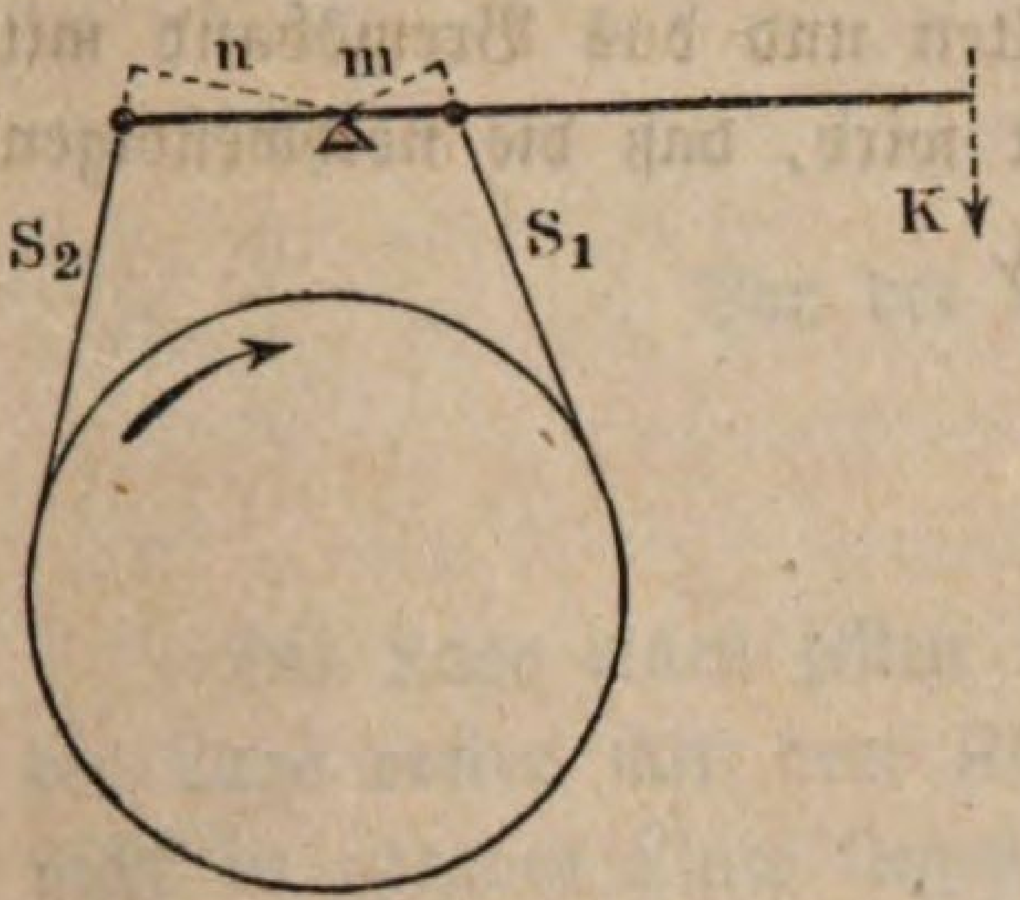
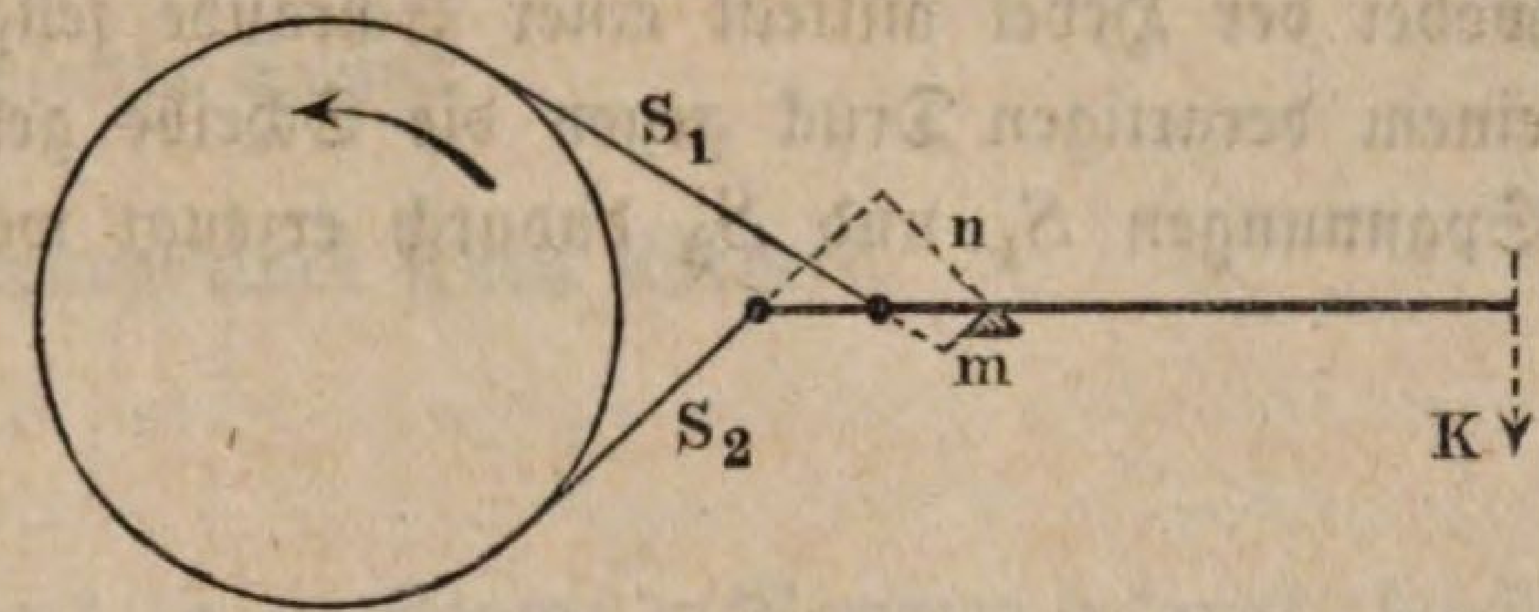


Fig. 270.



In Fig. 269 sind die Spannungen S_1 und S_2 gleich gerichtet, die Arme liegen aber zu verschiedenen Seiten des Drehpunktes, in Fig. 270 dagegen liegen die Arme auf derselben Seite des Drehpunktes, dagegen haben die Spannungen S_1 und S_2 entgegengesetzte Richtung. Diese letztere Anordnung ist von Robert Napier erfunden.

Die hauptsächlichsten Vortheile dieser neuen Construction sind:

1) Der vom Arbeiter beim Bremsen auszuübende Druck K kann ganz entbehrt werden, wenn man ihn durch das Gewicht des Bremshebels selbst ersetzt. Die Bremse wirkt dabei selbstthätig, und zur Auslösung muß der Hebel angehoben werden.

2) Die Bremsscheibe kann stets auf der Welle der Windetrommel angebracht werden.

3) Die Sperrklinken werden entbehrlich, da durch die Selbstthätigkeit der Bremse, die durch Heruntergehen der Last hervorgerufene Drehung der Welle verhindert wird, während die entgegengesetzte Drehung derselben und dadurch die Aufwickelung des Lastseiles möglich bleibt. Im letzteren Falle vertauschen sich die Spannungen S_1 und S_2 gegenseitig, die Differenz der Momente $S_1 n - S_2 m$ wird nicht Null, hat vielmehr einen bedeutend größeren Werth als Kp, so daß durch das Gewicht K des Bremshebels die Drehung in diesem Sinne nicht verhindert wird.

Es sei $K = 15$ Kilogr.; $p = 0{,}942^m$; $m = n = 0{,}078^m$; $\alpha = 1{,}4\,\pi$; $\mu = 0{,}18$. Dann ist $e^{\mu \alpha} = 2{,}21$ und

$F = 68{,}3$ Kilogr., wenn beide Spannungen S_1 und S_2 durch K hervorgerufen werden müssen;

$F = 219{,}2$ Kilogr., wenn die Spannung S_1 durch den Drehpunkt des Hebels gerichtet ist.

Es sei unter denselben Verhältnissen $F = 225$ Kilogr., dann ist in Minimo

$K = 49{,}4$ Kilogr. zur Erzeugung beider Spannungen,

$K = 15{,}4$ Kilogr. zur Erzeugung von S_2.

Für die Anordnung als Differentialbremse ist:

$$n = e^{\mu \alpha} m = 2{,}21\, m,$$

wobei der Hebel mittelst einer Schraube festgehalten und das Bremsband mit einem derartigen Druck gegen die Scheibe gepreßt wird, daß die nothwendigen Spannungen S_1 und S_2 dadurch erzeugt werden.

Viertes Capitel.

Von der Bewegung eines festen Körpers.

Die Lage eines festen Körpers ist im Raume vollkommen bekannt, sobald 51
die Lage dreier mit dem Körper fest verbundener Punkte A, B, C, welche nicht in gerader Linie liegen, gegeben ist, denn die Gestalt eines Körpers ist durch die gegenseitige Entfernung der drei Punkte, sowie durch die Abstände aller übrigen Punkte von diesen bestimmt. Aus der Bewegung dieser drei Punkte kann man hiernach auf die Bewegung des Körpers schließen. Bei der Bewegung eines Körpers beschreibt jeder seiner Punkte eine bestimmte Bahn, die als ein Polygon von unendlich kleinen Seiten angesehen werden kann, wobei wir uns vorstellen können, daß alle Punkte sich immer gleichzeitig in einem Eckpunkte des zugehörigen Polygons befinden, sodaß alle Punkte gleichzeitig die einzelnen Seiten ihres Polygons durchlaufen. Jede dieser aufeinander folgenden Bewegungen, zu der ein Zeitmoment nothwendig ist, heißt eine Elementarbewegung des Körpers.

Bewegen sich die drei Punkte A, B, C des Körpers in der Weise, daß 52
die Dreiecksseiten einander stets parallel bleiben, so werden sich auch die Verbindungslinien der übrigen Punkte mit A, B, C parallel mit sich selbst bewegen, und die Verbindungslinie irgend zweier Punkte des Körpers wird bei dieser Bewegung der ursprünglichen Richtung parallel bleiben. Eine derartige Bewegung heißt eine fortschreitende (Translation). Sind die beiden Punkte M und N bei einer Translation, nach einem Zeitmoment in die Lage M' und N' gekommen, so ist hiernach $MN \nparallel M'N'$, und da der Körper fest sein soll, so muß auch $MN = M'N'$ sein. Die Figur $MM'NN'$ ist deshalb ein Parallelogramm, da die unendlich kleinen Wege MM' und NN' als gerade Linien angesehen werden dürfen. Die unendlich kleinen Wege MM' und NN' sind also parallel und gleich, und da sie den Geschwindigkeiten der Punkte M und N bei der vorausgesetzten Translation proportional sein müssen, so folgt daraus, daß hier alle Punkte des Körpers in demselben Zeitpunkte dieselbe Geschwindigkeit haben, welche auch der Richtung nach

übereinstimmt und deshalb die Geschwindigkeit des Körpers genannt wird. Hiernach ist die fortschreitende Bewegung eines Körpers vollkommen bekannt, sobald die eines seiner Punkte gefunden ist, wobei die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung in den aufeinanderfolgenden Zeitpunkten constant oder veränderlich sein kann.

Behaupten zwei der drei Punkte A, B, C, z. B. A und B, bei der Bewegung des Körpers ihre ursprüngliche Lage, so werden auch alle Punkte der Verbindungslinie AB ihren Ort behaupten, während alle übrigen Körperpunkte sich um diese Linie herumbewegen, also Kreislinien beschreiben, deren Ebenen normal zu AB stehen, in welcher Linie zugleich die Mittelpunkte dieser Kreislinien liegen. Eine derartige Bewegung des Körpers heißt eine Drehbewegung (Rotation) um eine feste Achse AB. Es mögen die beiden beliebig gewählten Punkte M und N des Körpers bei der Rotation um AB in dem nächsten Zeitmomente nach M' und N' gekommen sein, so haben die zu den Punkten gehörigen Radien, wenn wir die Mittelpunkte der beschriebenen Kreisbogen mit P und Q bezeichnen, die Winkel MPM' und NQN' beschrieben. In der Kreisebene des Punktes N ziehe man QV parallel PM und bezeichne die nach der vorausgesetzten Drehung angenommene Lage von QV mit QV', so muß auch QV' mit PM' parallel, daher der Winkel VQV' gleich dem Winkel MPM' sein. Es kann aber auch der Winkel VQN bei der Drehung seine Größe nicht geändert haben, muß also mit dem Winkel $V'QN'$ übereinstimmen. Subtrahirt man von den beiden letzten Winkeln das ihnen gemeinschaftliche Stück $V'QN$, so erhält man $VQV' = NQN'$, also auch $= MPM'$.

Hieraus ergiebt sich daher, daß je zwei beliebig gewählte oder alle Punkte eines in Rotation begriffenen Körpers während derselben Zeit, gleiche Winkel um die Achse beschreiben, deren Größe der Drehwinkel der Rotation genannt wird. Sind diese Drehwinkel in gleichen Zeiten gleich groß, so heißt die Rotation gleichförmig, im entgegengesetzten Falle ungleichförmig. Bei der gleichförmigen Rotation haben nur diejenigen Punkte dieselbe Geschwindigkeit, welche sich in derselben Entfernung von der Drehachse befinden. Die Geschwindigkeit in der Entfernung 1 von der Drehachse, d. i. also der in der Zeiteinheit beschriebene Drehwinkel in Bogenmaß ausgedrückt, heißt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, welche wir mit ω bezeichnen werden. Die Punkte, welche sich in der Entfernung r von der Drehachse befinden, haben hiernach bei der gleichförmigen Rotation die Geschwindigkeit $r\omega$. Anstatt der Winkelgeschwindigkeit benutzt man in der Praxis zur Bestimmung der schnelleren oder langsameren Drehbewegung die Anzahl der in einer Minute von dem Körper gemachten Umdrehungen. Die Beziehung zwischen u und ω ist durch Formel 26 gegeben:

$$u = 9{,}5493\,\omega$$

$$\omega = 0{,}1047\,u.$$

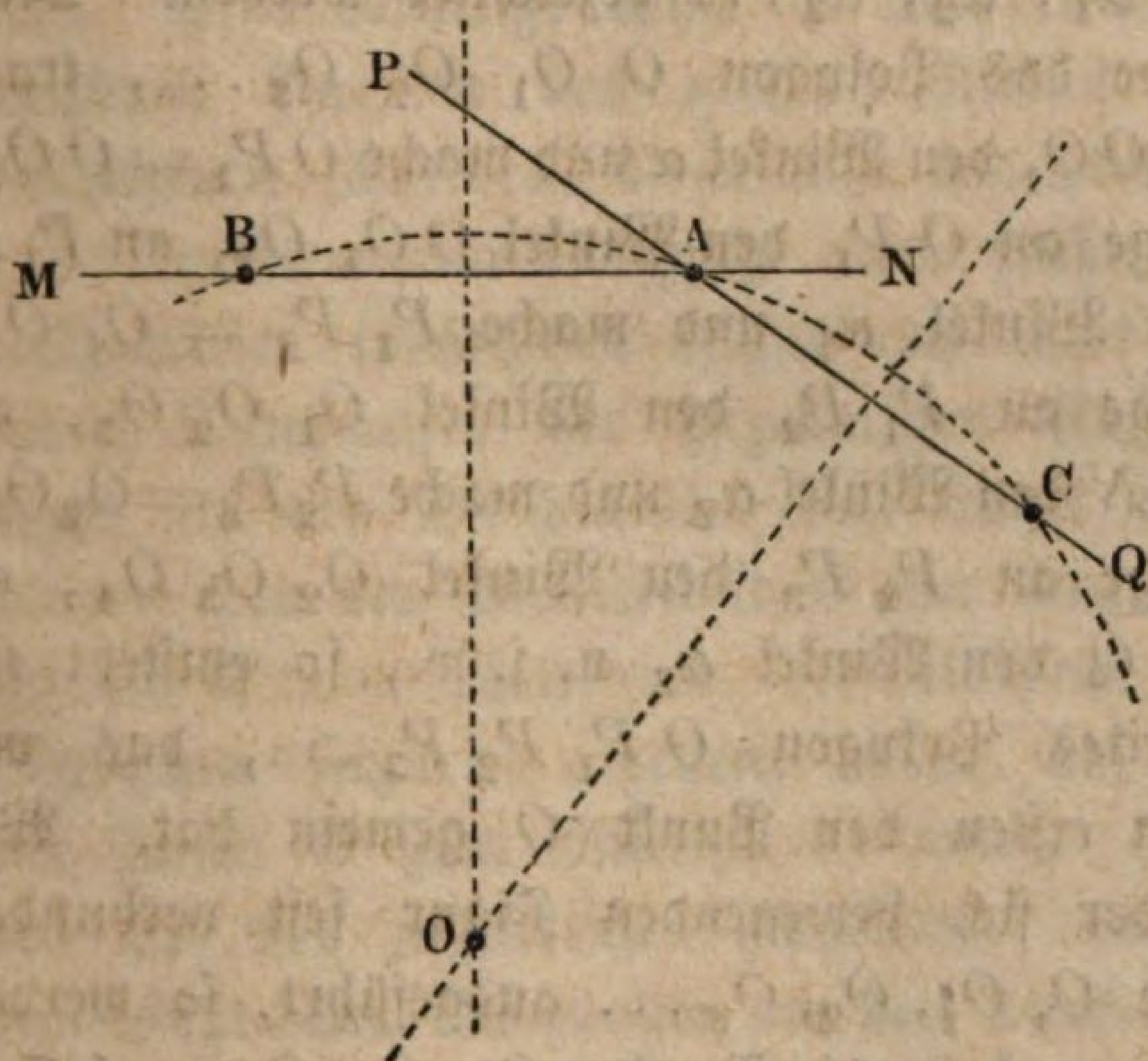
Bei der ungleichförmigen Rotation kann nur von der Winkelgeschwindigkeit zu einer bestimmten Zeit t gesprochen werden und verstehen wir darunter,

analog dem Früheren, die Winkelgeschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Drehbewegung, in welche die vorgelegte Rotation übergehen würde, wenn die Ursache der Ungleichförmigkeit plötzlich aufgehoben würde. Bei einer derartigen Drehbewegung ist demnach wie früher die Geschwindigkeitsänderung in Betracht zu ziehen, und werden wir diese, wie die Winkelgeschwindigkeit, für die Entfernung 1 von der Drehachse angeben. Dieselbe soll mit ι bezeichnet und bei gleichmäßig veränderter Rotation Winkelbeschleunigung des Körpers genannt werden. Bei der ungleichmäßig veränderten Drehbewegung können wir von der Winkelbeschleunigung zu einer bestimmten Zeit t sprechen, und müssen darunter die Winkelbeschleunigung derjenigen gleichmäßig veränderten Rotation verstehen, in welche die ungleichmäßig veränderte übergehen würde, wenn die Ursache der Ungleichmäßigkeit plötzlich in Wegfall käme. Die Beschleunigung der Punkte in der Entfernung r von der Drehachse ist hiernach gleich $r\,\iota$.

Die beiden bis jetzt in Betracht gezogenen einfachen Bewegungen eines Körpers, die Translation und die Rotation um eine feste Achse, lassen sich unmittelbar aus den oben angenommenen Elementarbewegungen des Körpers bestehend denken, da die bei einer unendlich kleinen Drehung von den Punkten beschriebenen Kreisbogen auch als gerade Linien angesehen werden dürfen.

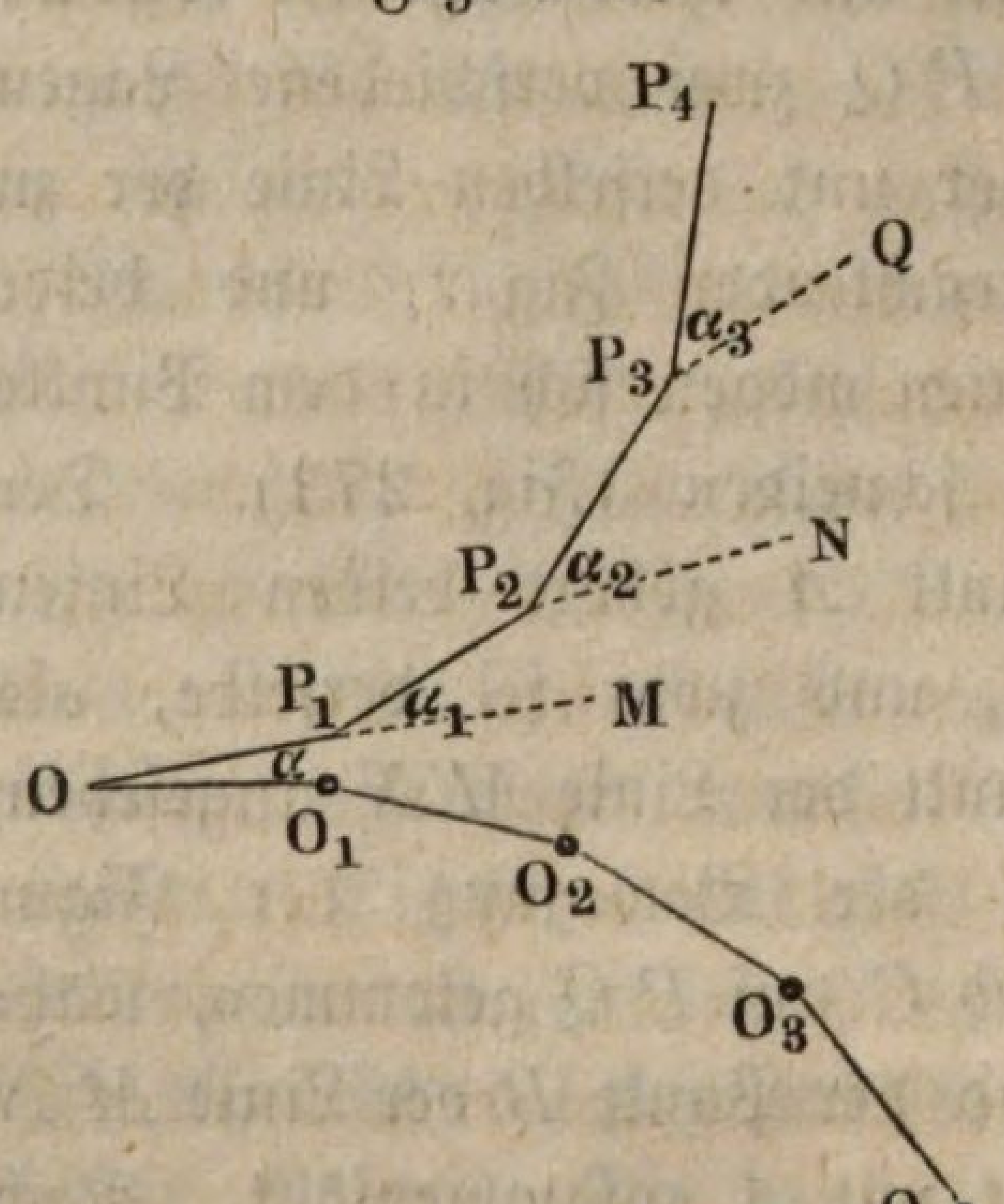
Zur Vergleichung anderer complicirterer Bewegungen eines Körpers mit 53
der Elementarbewegung desselben beginnen wir mit der Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. Es ist jederzeit möglich die Figur durch Drehung derselben um einen in der Ebene liegenden Punkt aus ihrer Lage in irgend eine andere zu bringen. Es seien MN und PQ zwei verschiedene Lagen einer und derselben Linie der zu betrachtenden Figur, und beide Linien mögen sich in dem Punkte A schneiden (Fig. 271). Der Punkt A gehört beiden Linien an, und zwar sei derselbe, als Punkt der Linie MN angesehen, bei der Bewegung der Figur nach C auf PQ gekommen, während der Punkt B der Linie MN jetzt mit A zusammenfällt. Nach dieser Voraussetzung ist also $BA = AC$ und der Mittelpunkt O des durch die drei Punkte B, A, C gehenden Kreises ist als der Drehpunkt anzusehen, um den die Drehung der Figur ausgeführt werden muß, damit gleichzeitig B nach A und A nach C, die Linie MN also in die Lage von PQ gelangt. Da MN jede beliebige mit der Figur fest verbundene Linie vorstellt, so ist durch diese Drehung um O auch die ebene Figur selbst in ihre neue Lage übergegangen. Hatten die beiden verschiedenen

Fig. 271.



Lagen MN und PQ derselben Linie keinen Punkt mit einander gemein, waren sie also parallel oder fielen sie zusammen, so geht die Drehung um den Punkt O in eine Drehung um einen in der Unendlichkeit gelegenen Punkt über, d. h. die Rotation wird dabei zu einer Translation. Es ist bei der vorigen Untersuchung die Zeit, welche zur Ueberführung der Linie MN in die Lage PQ nothwendig ist, gar nicht in Betracht gezogen worden, so daß die Resultate für unendlich kleine Zeiten in Anwendung gebracht werden dürfen, während welcher die Figur jedesmal aus ihrer Lage in die nächstfolgende übergeführt wird. Für jede dieser unendlich kleinen Drehungen wird im Allgemeinen der Drehpunkt O seinen Ort in der Ebene wechseln, so daß der jedesmalige Drehpunkt nur für einen Zeitmoment benutzt werden darf und deshalb augenblickliches Centrum der Rotation (Momentancentrum) genannt wird. Diese unendlich kleinen Drehungen sind vollkommen identisch mit den Elementarbewegungen der Figur, so daß hiernach eine Figur aus ihrer Lage in irgend eine andere, in derselben Ebene gelegene, durch Elementarbewegungen übergeführt werden kann, welche durch unendlich kleine Drehungen um verschiedene Punkte der Ebene ersetzt werden können. Kennt man die Richtungen der Geschwindigkeiten zweier Punkte der Figur zu derselben Zeit t, so werden die Normalen zu den Geschwindigkeiten sich in dem augenblicklichen Centrum schneiden. Sind diese beiden Normalen parallel, so findet in diesem Augenblick Translation statt. Es seien (Fig. 272) $O, O_1, O_2, O_3 \ldots$ die aufeinander folgenden Drehungsmittelpunkte für die in der Ebene sich stetig bewegende Figur, und zwar mögen die Drehwinkel, den einzelnen Drehmittelpunkten entsprechend, mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ bezeichnet werden. Man bilde das Polygon $O\ O_1\ O_2\ O_3 \ldots$, trage an $O\,O_1$ den Winkel α und mache $O P_1 = O\,O_1$; trage an $O\,P_1$ den Winkel $O\,O_1\,O_2$, an $P_1 M$ den Winkel α_1 und mache $P_1\,P_2 = O_1\,O_2$; trage an $P_1\,P_2$ den Winkel $O_1\,O_2\,O_3$, an $P_2 N$ den Winkel α_2 und mache $P_2 P_3 = O_2 O_3$; trage an $P_2\,P_3$ den Winkel $O_2\,O_3\,O_4$, an $P_3\,Q$ den Winkel α_3 u. s. w., so entsteht ein zweites Polygon $O\,P_1\,P_2\,P_3 \ldots$, das mit dem ersten den Punkt O gemein hat.

Fig. 272.



Wir denken dies zweite Polygon mit der sich bewegenden Figur fest verbunden und die Drehungen um die Punkte $O, O_1, O_2, O_3 \ldots$ ausgeführt, so werden die Punkte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ nach und nach in die Punkte $O_1, O_2, O_3 \ldots$ fallen, d. h. bei der Bewegung der Figur rollt das Polygon $O\,P_1\,P_2\,P_3 \ldots$ auf dem Polygon $O\,O_1\,O_2\,O_3 \ldots$ und umgekehrt, wenn diese rollende Bewegung hervorgerufen, wird die ebene Figur die ihr in der Ebene vorgeschriebene Bewegung vollführen. Für eine stetige Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene hat man daher den geometrischen Ort der Momentancentra $O, O_1, O_2, O_3 \ldots$

zu bestimmen, dann den geometrischen Ort derjenigen Punkte $O, P_1, P_2, P_3 \ldots$ der Figur aufzusuchen, welche nach und nach mit diesen Drehmittelpunkten zusammenfallen; die Bewegung ist dann durch das Rollen des letzten Ortes auf dem ersten gegeben. Im Allgemeinen werden beide geometrischen Orte krumme Linien sein.

Sieht man die bisher bewegte ebene Figur F als den Querschnitt eines Körpers an, und macht man die Voraussetzung, daß diese Ebene F bei der Bewegung des Körpers jederzeit einer festen Ebene E im Raume parallel bleibe, so bewegen sich alle Punkte des Körpers in Linien, die dieser Ebene E parallel laufen, und die Bewegung des Körpers ist vollständig bestimmt durch die der Figur F. Die augenblicklichen Drehungsmittelpunkte werden zu Durchschnittspunkten der augenblicklichen Drehungsachsen (Momentanachse der Rotation), welche normal auf F und E stehen. Die Rollcurven $O\,O_1\,O_2\,O_3 \ldots$ und $O\,P_1\,P_2\,P_3 \ldots$ sind die Durchschnittslinien zwischen zwei zu F und E normal stehenden cylindrischen Flächen und dem Querschnitt F des Körpers. Hieraus ergiebt sich, daß diese besondere Bewegung des Körpers auf das Rollen einer mit dem Körper fest verbundenen cylindrischen Fläche auf eine andere unbewegliche cylindrische Fläche zurückgeführt ist.

Liegt die in Bewegung befindliche Figur F nicht in einer Ebene, sondern auf einer Kugelfläche vom Mittelpunkt O, so denken wir durch die sphärische Figur einen größten Kreis gelegt und diesen mit der Figur fest verbunden. Die Elementarbewegung dieses größten Kreises auf seiner Kugelfläche besteht in einer Drehung um eine Gerade, welche durch einen gewissen Punkt der Kugelfläche geht und auf der Ebene des größten Kreises normal steht. Eine derartige Achse ist aber Durchmesser der Kugel, da die in den einzelnen Punkten des größten Kreises errichteten Normalen sich in dem Mittelpunkt schneiden, dieser also das Momentancentrum ist. Es besteht demnach die Elementarbewegung eines größten Kreises, sowie die der damit festverbundenen sphärischen Figur auf ihrer Kugelfläche in einer Drehung um einen Durchmesser der zugehörigen Kugel. Betrachten wir die sphärische Figur als den Durchschnitt einer Kugel mit einem in Bewegung befindlichen Körper, der den Mittelpunkt O der Kugel als festen Punkt enthält, so wird sich die Elementarbewegung des Körpers aus den Elementarbewegungen der sphärischen Figuren ergeben, welche auf Kugelflächen liegen, die sämmtlich den Punkt O zum Mittelpunkt haben. Die sphärischen Figuren können sich nur auf der zugehörigen Kugelfläche verschieben, ihre Elementarbewegungen sind ersetzt durch Drehungen um den Durchmesser der Kugel, und es kann deshalb auch der ganze Körper mit dem festen Punkte O aus einer Lage in die nächstfolgende durch Drehung um eine durch O gehende Achse gebracht werden. Bei der stetigen Bewegung des Körpers gehen demnach die Momentanachsen der Drehung sämmtlich durch den festen Punkt O und bestimmen deshalb in ihrer Aufeinanderfolge den Mantel eines Kegels. Denkt man sich nun mit dem Körper eine Reihe von starren geraden Linien fest verbunden, welche bei

der Bewegung des Körpers nach und nach mit den Momentanachsen zusammenfallen, so bilden auch diese eine Kegelfläche, deren Spitze mit der aus den Momentanachsen gebildeten Kegelfläche zusammenfällt und es kann demnach die Bewegung eines Körpers, der einen festen Punkt enthält, so aufgefaßt werden, als werde sie durch das Abrollen einer mit dem Körper fest verbundenen Kegelfläche auf einer andern unbeweglichen Kegelfläche hervorgerufen. Die Spitze der beiden Kegel ist der feste Punkt; die jedesmalige Berührungslinie beider Kegelflächen ist die augenblickliche Drehachse.

55 Wir kommen jetzt zur ganz beliebigen Bewegung des Körpers, bei welcher die drei nicht in gerader Linie gelegenen Punkte A, B, C desselben nach der Bewegung an die Orte A', B', C' gekommen sein mögen.

Es ist jederzeit möglich, die Lage des Körpers durch eine Translation in der Weise zu verändern, daß dabei der Punkt A nach A' rückt. Dann beschreiben sämmtliche Punkte des Körpers Wege, welche dem Wege AA' gleich und parallel sind. Die beiden noch in Betracht zu ziehenden Punkte B und C mögen dabei nach B_0 und C_0 gekommen sein. Nach der Voraussetzung sollen sich aber die Punkte B und C in B' und C' befinden, sobald A nach A' gekommen; es muß sich deshalb mit dem Körper eine zweite Bewegung machen lassen, welche ohne die Lage von A' zu ändern, die Punkte B_0 und C_0 nach B' und C' bringt. Dies kann nur durch Rotation geschehen, und zwar muß die dazu gehörige Drehachse MN, da A' seinen Platz behaupten soll, durch diesen Punkt A' gehen. Es ist hierdurch bewiesen, daß jede beliebige Bewegung eines Körpers, bei welcher die Punkte A, B, C nach A', B', C' gelangen, ersetzt werden kann:

1) durch eine fortschreitende Bewegung von A nach A' und
2) durch eine Drehung um eine durch A' gehende Drehachse MN.

Denkt man durch A eine Drehachse parallel MN gelegt, führt um diese die betreffende Drehung aus und läßt dann die entsprechende Translation folgen, so müssen die Punkte A, B, C ebenfalls in ihre neue Lage A', B', C' gekommen sein. Andererseits läßt sich die Bewegung ebenso gut von dem Punkte B, von dem Punkte C oder von irgend einem andern beliebigen Punkte des Körpers aus beginnen, woraus sich ergiebt, daß die Ueberführung eines Körpers aus einer Lage in seine nachfolgende durch die beiden aufeinander folgenden Bewegungen auf sehr mannichfaltige Weise ausgeführt werden kann.

Die stetige Bewegung eines Körpers während der beliebigen Zeit t läßt sich hiernach bestehend denken aus der im Allgemeinen krummlinigen Translation $AA'A''A''' \ldots$ eines beliebigen Punktes A in Verbindung mit einer continuirlichen Drehung um Achsen, welche durch die aufeinander folgenden Punkte $A', A'', A''' \ldots$ gehen. Bei dieser Bewegung fallen mit den durch $A', A'', A''' \ldots$ gelegten Drehachsen $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots$ gewisse Linien $\beta', \beta'', \beta''' \ldots$ des Körpers zusammen, und da A bei seiner Bewegung allmälig in die Achsen $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots$ gelangt, so müssen diese Linien $\beta', \beta'', \beta''' \ldots$, um

mit den Achsen nach und nach zusammenfallen zu können, sämmtlich durch A gehen, also den Mantel eines Kegels bilden. Ziehen wir durch A', dem Punkte der Achse α', noch Parallelen mit den übrigen Drehachsen α'', α'''..., so bilden diese ebenfalls den Mantel eines Kegels, und ertheilen wir der Spitze dieses zweiten Kegels die Translation A', A'', A'''..., so fallen dessen Seiten nach und nach in die Richtung der Drehachsen, und in die der Seiten $\beta', \beta'', \beta'''$... des ersten Kegels. Rollt daher der erste Kegel auf diesem zweiten, und besitzt die Spitze des letzteren dabei die Translation A', A'', A'''..., so gelangt der Körper nach und nach in seine verschiedenen Lagen. Hieraus ergiebt sich das Gesetz:

I. Die Bewegung eines festen Körpers ist übereinstimmend mit dem Rollen eines dem Körper angehörigen Kegels auf einem anderen gleichfalls beweglichen, aber nicht dem Körper angehörigen Kegel, welcher eine Translation besitzt, die durch die Bahn der Spitze des ersten Kegels bestimmt ist.

Die oben angedeuteten, in mannigfaltiger Weise auszuführenden zusammengehörigen Translationen und Rotationen, um die Lage eines Körpers in die nächstfolgende umzuändern, sollen im Folgenden einer weiteren Untersuchung unterworfen werden.

Zieht man durch B eine mit MN parallele Linie PQ, so gelangt diese durch die Translation AA', unter Erhaltung ihrer mit MN parallelen Richtung, mit B nach B_0 und durch die nachfolgende Rotation um MN kommt B_0 nach B' und PQ geht dann ebenfalls durch B'. Da auch während der Rotation die Linie PQ ihre Richtung nicht verändert, so folgt daraus, daß die Linie auch durch die Translation BB' in diese Lage kommen und daß eine darauf folgende Rotation des Körpers um PQ als Drehachse, die Punkte A und C in ihre neuen Lagen A' und C' und dadurch auch den Körper in die neue Lage bringen würde. Hiernach sind alle den verschiedenen Translationen AA', BB', CC'... entsprechenden Drehachsen einer gemeinschaftlichen Richtung parallel. Nachdem die Translation AA' ausgeführt, muß der Körper nur noch um die Linie MN als Drehachse rotiren und sich dabei parallel einer zu MN normalen Ebene bewegen. Die sämmtlichen Punkte des Körpers sind also schon durch die Translation AA' in eine solche Lage gebracht, daß sie sich in denjenigen Ebenen, normal zur Drehachse, befinden, welche für sie, bei der neuen Lage des Körpers, ein geometrischer Ort ist. Dasselbe muß bei jeder anderen Translation BB', CC'... eintreten, da die betreffenden Drehachsen der Richtung nach übereinstimmen. Hieraus folgt, daß die verschieden möglichen Rotationen um die parallelen Drehachsen MN, PQ... sich nur um eine Translation, normal zur gemeinschaftlichen Drehachsenrichtung, von einander unterscheiden, daß sie dagegen in der Größe des Drehwinkels und in dem Sinne der Drehung mit einander übereinstimmen.

Ein zur Drehachse MN normal gelegter Schnitt E des Körpers bewegt sich bei der Translation AA' parallel mit sich selbst um eine Strecke, welche

der Projection von AA' auf die Drehachse MN gleich ist. Fangen wir die Bewegung des Körpers dagegen mit einer anderen Translation, z. B. mit BB' an, so muß der angenommene Schnitt E dadurch in dieselbe Lage gebracht worden sein, also dieselbe Strecke zurückgelegt haben. Dies gilt für jede beliebige andere Translation, woraus folgt, daß die Projectionen der verschiedenen Translationen AA', BB', CC'... auf die Drehachsenrichtung sämmtlich gleiche Größe erhalten.

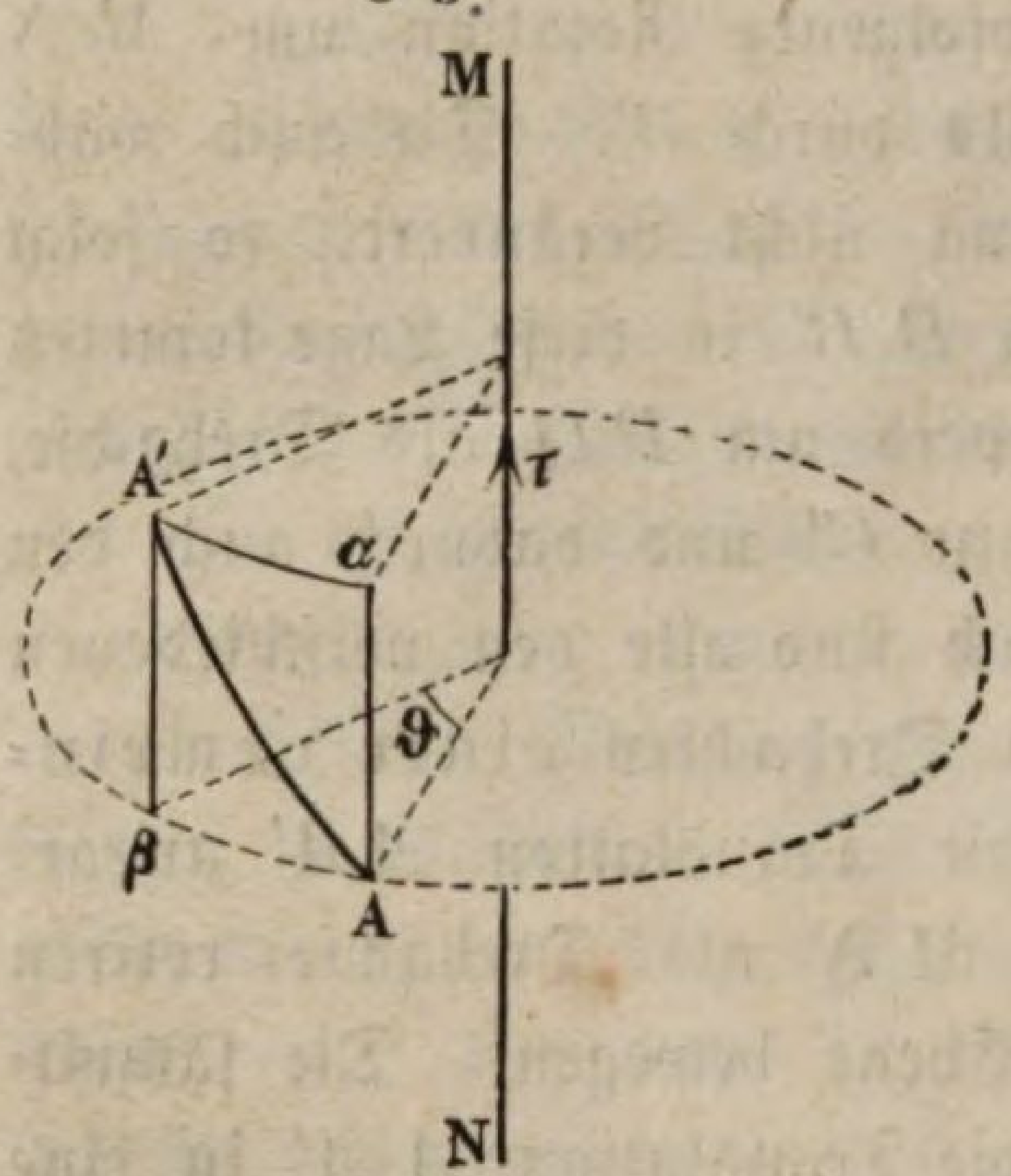
Unter den unendlich vielen Bewegungen von zusammengehörigen Translationen und Rotationen, durch die ein Körper aus seiner gerade vorhandenen Lage in die nächstfolgende übergeführt werden kann, giebt es nun nach den vorstehenden Auseinandersetzungen eine ganz bestimmte Bewegung, welche so beschaffen ist, daß die fortschreitende Bewegung parallel der Rotationsachse erfolgt und gleich ist der Projection von AA', BB', CC' ... auf die letztere. Man kann hiernach den Körper aus der Lage A, B, C in die Lage A', B', C' bringen:

1) durch eine fortschreitende und

2) durch eine darauf folgende drehende Bewegung, deren Achse dieselbe Richtung, wie die fortschreitende Bewegung hat.

Es sei Fig. 273 A einer der Punkte des Körpers, der in Bezug auf die augenblickliche Drehachse MN eine Translation τ und eine Rotation mit dem Drehwinkel ϑ, besitzt. In Folge dieser zweifachen Inanspruchnahme des Punktes A legt derselbe zuerst vermöge der fortschreitenden Bewegung den Weg $A\alpha$ parallel der Drehachse MN zurück und beschreibt dann um dieselbe, in einer zur Achse normalen Ebene einen Kreisbogen vom Mittelpunktswinkel ϑ, wodurch der Punkt A in seine darauf folgende Lage A' gelangt. Dasselbe Resultat läßt sich erzielen, wenn wir den Punkt zuerst durch die Rotation den Bogen $A\beta$ und darauf durch die Translation den Weg $\beta A'$ zurücklegen lassen. Beide Bewegungen sind zueinander normal gerichtet, stimmen deshalb nicht mit der vorausgesetzten Elementarbewegung des Punktes überein, die vielmehr eine einzige gerade Linie sein soll. Denken wir jedoch den Punkt A, wie es in der That ist, mit beiden Bewegungen zugleich behaftet, so durchläuft der Punkt A in unmittelbarer Folge den Weg AA', welcher als geradlinig betrachtet werden darf und nun unmittelbar die betreffende Elementarbewegung des Punktes A liefert. Die Linie AA' ist eine Schraubenlinie und es bewegen sich deshalb die einzelnen Punkte eines Körpers, bei dem Uebergang aus einer Lage in die nächstfolgende in Schraubenlinien, welche sämmtlich die augenblickliche Drehachse gemeinschaftlich und gleiche Ganghöhe haben. Da aber um dieselbe, bei Beschreibung der Schraubenlinien, nicht bloß eine

Fig. 273.



Drehung, sondern auch ein Fortschieben der Punkte in Richtung dieser Achse stattfindet, so nennt man dieselbe die augenblickliche Achse der Drehung und Verschiebung (Momentanachse der Rotation und Translation, Centralachse der Bewegung).

Bei dem Uebergang des Körpers aus einer Lage in die nächstfolgende beschreiben, wie oben nachgewiesen, die einzelnen Punkte Schraubenlinien, die derselben Centralachse der Bewegung angehören; hiervon machen jedoch diejenigen Punkte eine Ausnahme, welche zu dieser Zeit zufällig in der Centralachse selbst liegen, die in diesem Zeitmomente bloß eine fortschreitende Bewegung besitzen. Bei der continuirlichen Bewegung des Körpers während einer beliebigen Zeit t beschreiben nach dem Vorstehenden die einzelnen Punkte Schraubenlinien, deren Achsen sich der Lage nach von Moment zu Moment ändern können. Zwei aufeinander folgende Centralachsen der Bewegung sind im Allgemeinen windschiefe Linien, sodaß die sämmtlichen Centralachsen der Bewegung eine windschiefe Fläche bilden, um deren Seiten die Punkte des Körpers, bei seiner Bewegung, unendlich kleine Schraubenbewegungen vollführen. Bezeichnen wir diese Centralachsen mit $\alpha', \alpha'', \alpha'''\ldots$, sowie diejenigen geraden Linien des Körpers, welche in den einzelnen Zeitmomenten in die betreffende Centralachse fallen, um welche die Schraubenbewegung erfolgt, mit $\beta', \beta'', \beta'''\ldots$, so werden auch diese Linien in ihrer Aufeinanderfolge eine zweite windschiefe Fläche bestimmen. Diese beiden windschiefen Flächen haben während der Bewegung die zusammenfallenden Seiten α' und β', α'' und β'', α''' und β''' gemein, und da durch die Schraubenbewegung um α', β'' in die Achse α'' gelangt, wobei β' die Achse α' erst dann verläßt, wenn das Zusammenfallen von β'' und α'' eingetreten ist, so haben in diesem Moment beide Flächen zwei aufeinander folgende Erzeugungslinien, also auch das dazwischen liegende Flächenelement miteinander gemein, d. h. die beiden windschiefen Flächen berühren sich in den zusammenfallenden Linien $\alpha'\,\beta'$, $\alpha''\,\beta''$, $\alpha'''\,\beta'''\ldots$, wobei β' längs α', β'' längs α'', β''' längs α'''.. in dem betreffenden Augenblick eine fortschreitende Bewegung besitzt. Hieraus ergiebt sich als zweites Gesetz für die beliebige Bewegung eines Körpers:

II. Die Bewegung eines festen Körpers ist übereinstimmend mit dem Gleiten und Rollen einer dem Körper angehörigen windschiefen Fläche auf einer zweiten bestimmten unbeweglichen windschiefen Fläche des Raumes.

Diese windschiefen Flächen werden zu Kegelflächen, wenn der Körper seine Bewegung um einen festen Punkt ausführt (§. 54), dagegen gehen diese Flächen in Cylinderflächen über bei der Bewegung eines Körpers parallel einer festen Ebene (§. 53).

Nachdem in den vorigen Paragraphen die verschiedenartigen Bewegungen 56
eines Körpers in rein geometrischer Beziehung entwickelt, gehen wir jetzt zur Ableitung der Gesetze über, denen die an dem Körper wirksamen Kräfte dabei Folge leisten müssen. Die einzelnen Punkte eines Körpers mögen die Massen $m_1, m_2, m_3\ldots$ haben, und den Kräften $P_1, P_2, P_3\ldots$, die nach beliebigen

Richtungen wirken, zu Angriffspunkten dienen. Die Kräfte können auf die einzelnen Punkte nicht in der Weise wirken, als wenn dieselben vollkommen frei wären, es werden die Bewegungen der einzelnen Punkte vielmehr in einer gewissen Abhängigkeit von einander stehen müssen. Hiernach haben die Kräfte bei einem festen System von materiellen Punkten eine doppelte Aufgabe, einmal die Abhängigkeit der einzelnen Punkte von einander aufzuheben, d. h. die inneren Kräfte zu vernichten, und dann die Bewegung eines jeden Punktes so einzurichten, als ob derselbe vollkommen frei wäre.

Die Kräfte, welche bei der erfolgten Bewegung des Körpers den frei gedachten Massenelementen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ die beziehlichen Bewegungen ertheilen, wollen wir mit V_1, V_2, $V_3 \ldots$ bezeichnen.

Man denke an m_1 zwei Kräfte, jede gleich V_1, angebracht, die sich einander aufheben, die also nach entgegengesetzter Richtung wirken, dabei aber eine solche Lage haben, daß die eine derselben die erfolgte Bewegung der Masse m_1 hervorruft. In diesem Falle wird die andere der gleichen Kräfte, im Verein mit der ursprünglichen Kraft P_1, die mit m_1 in Beziehung stehenden inneren Kräfte vernichten.

In ähnlicher Weise verfahre man mit jedem Massenelement, so erhält man anstatt der gegebenen Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ zwei Gruppen von Kräften, ohne daß der ursprünglich gegebene Zustand geändert worden wäre. Die erste Gruppe, aus den Kräften $+ V_1, + V_2, + V_3, + V_4 \ldots$ bestehend, bewirkt die Bewegung des Systems, hat also die Trägheit der einzelnen materiellen Punkte zu überwinden. Die Kräfte heißen deshalb bewegende Kräfte. Die zweite Gruppe besteht aus den gegebenen Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ und den entgegengesetzten bewegenden Kräften, $- V_1$, $- V_2, - V_3 \ldots$, die wir Gegenkräfte nennen wollen. Diese Gruppe muß die inneren Kräfte vernichten und muß deshalb unter sich im Gleichgewicht sein, da die inneren Kräfte sich selbst das Gleichgewicht halten, so lange das System ein festes bleibt, was wir hierbei immer voraussetzen.

Für die obige Anordnung sind daher die gegebenen Kräfte P_1, $P_2, P_3 \ldots$, und die Gegenkräfte $- V_1, - V_2, - V_3 \ldots$ unter sich im Gleichgewicht. Dies Gesetz heißt das Princip von d'Alembert.

Die bewegenden Kräfte $+ V_1, + V_2, + V_3 \ldots$ kommen vollkommen zur Wirkung, sie lassen sich daher in jedem Moment nach §. 38 vereinigen, wodurch man eine Resultate R_1 und ein Paar vom Momente $Q_1\, q_1$ erhält.

Die Resultante R_1 bewirkt die fortschreitende, das Paar $Q_1\, q_1$ dagegen die drehende Bewegung, welche beide in einem freien Systeme im Allgemeinen zugleich hervorgerufen werden können.

Die Gegenkräfte geben in absoluter Hinsicht natürlich dieselbe Resultante R_1 und dasselbe resultirende Paar $Q_1\, q_1$ wie die bewegenden Kräfte, durch entgegengesetzte Zeichen werden sich beide Resultate allein von einander unterscheiden. Bezeichnen wir noch die Resultante und das resultirende Paar der

gegebenen Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ mit R und $Q\,q$, so spricht sich das Princip von d'Alembert durch folgende Gleichungen aus:

$$\left.\begin{array}{r} R - R_1 = 0 \\ Q\,q - Q_1\,q_1 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (120)$$

worin R durch seine Componenten X, Y, Z in den Coordinatenachsen, und $Q\,q$ durch die Paare $L\,l, M\,m, N\,n$ in den YZ-, XZ-, XY-Ebenen gelegen, ersetzt werden können, während die Werthe für R_1 und $Q_1\,q_1$ aus der wirklich stattfindenden Bewegung der einzelnen Punkte abgeleitet werden müssen.

Gesetzt es sei bei der in Betracht zu ziehenden Bewegung, in dem 57
Augenblick, eine Vereinigung von $Q\,q$ und R zu einer Gesammtresultante R möglich, so legen die einzelnen Punkte in diesem Zeitmoment gleiche und parallele Wege zurück.

Die bewegenden Kräfte $+ V_1, + V_2, + V_3 \ldots$, welche die Trägheit der einzelnen Punkte überwinden, ebenso wie die durch die Trägheit hervorgerufenen Widerstände $- V_1, - V_2, - V_3 \ldots$ sind hiernach als parallel aufzufassen und durch die Summe der einzelnen Widerstände zu ersetzen. Es ist demnach für diesen Fall $R_1 = \Sigma\, V_1$, welche Mittelkraft in dem Schwerpunkt des Körpers ihren Angriffspunkt hat. In Folge der gleichen und parallel zurückgelegten Wege sämmtlicher Punkte ist für diese eine gemeinschaftliche Geschwindigkeitsänderung j in Rechnung zu bringen. Der Widerstand, den ein materieller Punkt von der Masse m_1 der geradlinigen Bewegung entgegensetzt, oder die bewegende Kraft für diese Bewegung, ist bei der Acceleration j gleich $m_1\,j$, daher ist der Gesammtwiderstand, den der Körper der Bewegung in diesem Augenblick entgegenstellt $j\,(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) = j \,.\, \Sigma\, m_1$. Setzen wir noch statt der Summe der Massen der einzelnen Punkte, die Gesammtmasse M des Körpers, so ist für diesen Fall:

$$R = M\,j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

oder lösen wir R in die drei Componenten X, Y, Z auf und ersetzen j durch die Geschwindigkeitsänderungen j_x, j_y, j_z in den drei Achsen, so erhalten wir als Bewegungsgleichungen für den Körper:

$$\left.\begin{array}{r} X = M\,j_x \\ Y = M\,j_y \\ Z = M\,j_z \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (122)$$

Hiernach bewegt sich der Schwerpunkt eines Körpers in jedem Moment so, als ob die ganze Masse des Körpers hier vereinigt und die auf Bewegung wirkenden Kräfte parallel ihrer Richtung an den Schwerpunkt versetzt wären.

Dieses Gesetz zeigt, daß wenn wir von den Dimensionen eines Körpers absehen wollen, um ihn bei der Bewegung durch einen materiellen Punkt zu ersetzen, dazu der Schwerpunkt des Körpers gewählt werden muß, und daß die in dem zweiten Abschnitt über die Bewegung eines materiellen Punktes

entwickelten Gesetze ohne Weiteres auf die Bewegung des Schwerpunktes eines Körpers übertragen werden können.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Gesetze über den Antrieb der Kraft und die Beziehung zwischen der geleisteten Arbeit und der lebendigen Kraft. Das erstere bezieht sich auf die geradlinige Bewegung eines Punktes, kann also auf die Bewegung der Projection des Schwerpunktes eines Körpers auf eine feste Achse, z. B. die X-Achse, in Anwendung gebracht werden. Wir haben demnach analog F. 32:

$$\Sigma X \tau = M v_x - M c_x \quad \text{. . . . . (123)}$$

d. h. während einer beliebigen Zeit t ist der Totalzuwachs der auf irgend eine Achse projicirten Bewegungsgröße des Körpers gleich der Summe der Antriebe der äußeren, auf jene Achse projicirten Kräfte, während derselben Zeit.

Das Gesetz von der Arbeit und der lebendigen Kraft ist ganz allgemein auf die Bewegung des Körpers übertragbar, da der Weg des Angriffspunktes der Kraft, bei Berechnung der Arbeitgröße, jederzeit in Richtung der Kraft genommen werden muß. Wir können daher hier die Formel 58 unmittelbar benutzen und haben nur die Masse m des Punktes durch die Masse M des Körpers zu versetzen:

$$L = \Sigma R \triangle r = \Sigma \{ X \triangle x + Y \triangle y + Z \triangle z \} = \tfrac{1}{2} M (v^2 - c^2) \quad \text{. . (124)}$$

Die im Obigen durch die Formeln 121 bis 124 ausgesprochenen Gesetze lassen sich unmittelbar auf die geradlinige Bewegung des Körpers übertragen, für welche also die Resultante R ihre anfängliche Richtung behauptet, und durch den Schwerpunkt des Körpers gehen muß. Je nachdem R dabei constant oder veränderlich ist, wird die von dem Körper eingeschlagene Bewegung eine gleichmäßig oder ungleichmäßig veränderte sein.

Wird die Resultante R der äußeren Kräfte zu Null, so bleibt der Schwerpunkt des Körpers entweder unbeweglich oder er verharrt in einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung, deren Geschwindigkeit mit der zuletzt erlangten Endgeschwindigkeit übereinstimmt.

58 Die den Körper angreifenden äußeren Kräfte mögen sich zweitens in jedem Moment auf das Kräftepaar $Q q$ reduciren, die Resultante R also jederzeit Null sein. In diesem Falle kann der Körper keine fortschreitende Bewegung haben, sondern derselbe erfährt eine Drehung um eine Achse, welche auf der Ebene des Paares $Q q$ normal steht. Diese Achse kann während der continuirlichen Bewegung des Körpers ihre Lage beibehalten, die Bewegung erfolgt dann um eine und dieselbe Linie, ist also identisch mit der um eine feste Achse, oder die in den einzelnen Zeitmomenten zur Benutzung kommenden Drehachsen gehen sämmtlich durch denselben Punkt, dann erfolgt die Drehung um diesen Punkt, der als fest angesehen werden kann.

Drehung um eine feste Achse.

Wir nehmen als feste Achse die Z-Achse an, so werden die um die X- und Y-Achse auftretenden Drehbestrebungen $L l$ und $M m$ jederzeit zu

Null und Qq stimmt daher mit $Nn = \Sigma P_1 (x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1)$ überein. Zur Berechnung von $Q_1 q_1$ denken wir die in jedem Punkte des Körpers auftretenden Trägheitswiderstände, welche in Ebenen normal zur Drehachse liegen, in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine die Richtung der Tangente an den Kreis hat, welchen der betreffende Punkt beschreibt, während die andere in der Verlängerung des Radius dieses Kreises wirkt. Die Letztere hindert die beabsichtigte Drehbewegung nicht, da ihr Moment in Bezug auf die Achse Null ist, und es sind deshalb allein die Tangentialcomponenten der Trägheitswiderstände in den einzelnen Punkten bei der Drehbewegung zu berücksichtigen. Der materielle Punkt von der Masse m_1 habe von der Drehachse die Entfernung r_1, so ist unter ι die Winkelbeschleunigung verstanden, der tangentiale Widerstand gleich $m_1 j_t = m_1 r_1 \iota$, und dessen Moment in Bezug auf die Drehachse gleich $\iota m_1 r_1^2$. Die hier auftretenden Momente der tangentialen Widerstände liegen sämmtlich in Ebenen, normal zur Z-Achse, lassen sich demnach durch algebraische Addition vereinigen, wobei zu berücksichtigen, daß für denselben Zeitaugenblick sämmtliche Punkte dieselbe Winkelbeschleunigung ι haben. Es ist hiernach:

$$Q_1 q_1 = \iota (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)$$
$$= \iota \Sigma m_1 r_1^2.$$

Der Ausdruck $\Sigma m_1 r_1^2$ heißt das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehachse und mag in der Folge durch T bezeichnet werden. Als Bewegungsgleichung des Körpers um die Z-Achse erhalten wir daher, wenn wir berücksichtigen, daß $Q_1 q_1$ nach dem d'Alembert'schen Principe gleich Qq gesetzt werden muß:

$$\left.\begin{array}{ll} & Qq = Nn = \iota T \\ \text{oder} & \iota = \dfrac{Nn}{T} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

d. h. die Winkelbeschleunigung eines Körpers wird erhalten, wenn man das statische Moment der auf Bewegung wirksamen äußeren Kräfte durch das Trägheitsmoment des Körpers dividirt.

Die von dem Körper befolgte Drehungsart hängt von dem Werthe des Kräftepaares Nn ab. Ist Nn constant, so ist auch ι constant und die Drehung ist eine gleichmäßig veränderte, im andern Falle ist dieselbe ungleichmäßig verändert. Für $Nn = 0$ wird $\iota = 0$, und der Körper muß sich dann gleichförmig um die Drehachse bewegen.

Besitzt der Körper in dem Augenblick die Winkelgeschwindigkeit ω, so ist die von dem Massentheilchen m_1 in der Entfernung r_1 von der Drehachse aufgenommene lebendige Kraft gleich $\frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2$, welche zugleich die Arbeitsgröße ist, welche das Massentheilchen abzugeben vermag, oder diejenige, welche nothwendig war, um demselben die lebendige Kraft zu ertheilen. Die ganze

von dem Körper aufgenommene lebendige Kraft, oder die auf denselben übertragene Arbeitgröße L ist daher:

$$L = \tfrac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 + \tfrac{1}{2} m_3 (r_3 \omega)^2 + \dots$$
$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 \Sigma m_1 r_1^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 T,$$

und ebenso ergiebt sich der Zuwachs an Arbeitgröße, um die Winkelgeschwindigkeit allmälig von ε auf ω zu bringen, zu:

$$L = \tfrac{1}{2} T (\omega^2 - \varepsilon^2) \quad \dots\dots\dots \quad (126)$$

Die Trägheitsmomente sind für die drehende Bewegung eines Körpers, wie sich aus dem Vorstehenden ergiebt, von der größten Wichtigkeit, und es mögen deshalb einige Gesetze über dieselben hier gleich angeführt werden. Hat man das Trägheitsmoment T eines Körpers für eine bestimmte Achse, z. B. die Z-Achse, berechnet und bestimmt man eine Linie e so, daß

$$T = M e^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (127)$$

worin M die ganze Masse des Körpers bedeuten soll, so nennt man die Linie e den Trägheitshalbmesser des Körpers für die Z-Achse. Denkt man sich einen schweren Punkt von der Masse M in der Entfernung e von der Drehachse, so ist das Trägheitsmoment desselben gleich dem des Körpers und es ist dadurch die drehende Bewegung eines Körpers, ebenso wie die geradlinige, auf die eines Punktes von der Masse M des Körpers zurückgeführt. Die Formeln 125 und 126 nehmen nach Einführung von $M e^2$ für T die Form an:

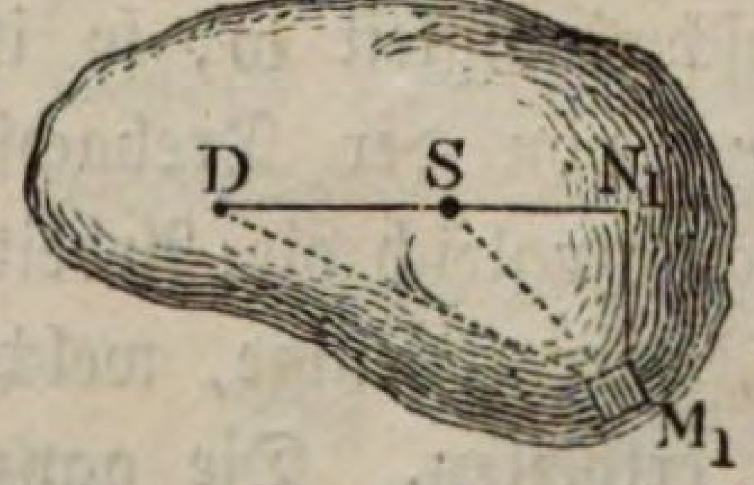
$$\iota = \frac{N n}{M e^2},$$
$$L = \tfrac{1}{2} M e^2 \omega^2,$$
$$L = \tfrac{1}{2} M e^2 (\omega^2 - \varepsilon^2),$$

wodurch sie mit den Formeln 52 und 59 für die Bewegung eines materiellen Punktes vollkommen übereinstimmen.

Durch Formel 127, welche das Princip von der Reduction träger Massen heißt, ist man zugleich im Stande, die um die Drehachse vertheilte Masse des Körpers in einer beliebigen Entfernung e_1 von der Drehachse zu concentriren, und man erhält die Größe dieser Masse M_1 in dem Ausdruck $\frac{T}{e_1^2}$.

Es sei T das Trägheitsmoment eines Körpers für eine durch den Schwerpunkt S (Fig. 274) gehende Achse, T_1 das Trägheitsmoment für eine Achse, die in der Entfernung d von der ersten Achse, dieser parallel liegt. Für diesen Fall ist:

Fig. 274.



$$T_1 = T + d^2 M \quad \dots\dots \quad (128)$$

unter M die Masse des Körpers verstanden.

Die durch beide parallele Achsen gelegte Ebene sei die XZ-Ebene, S sei der Durchgang der ersten

Achse, D der der zweiten Achse, so daß

$$SD = d$$

ist. Setzen wir $M_1 S$ gleich r_1 und $M_1 D$ gleich ϱ_1, so sind die Trägheitsmomente des Massenelementes M_1, für die durch S gehende Achse, $M_1 r_1^2$, und für die in D, $M_1 \varrho_1^2$. Für $M_1 N_1 = y_1$ und $N_1 S = x_1$ ist:

$$\varrho_1^2 = y_1^2 + (x_1 + d)^2$$
$$\varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + d^2 + 2 d x_1$$
$$\varrho_1^2 = r_1^2 + d^2 + 2 d x_1,$$

und durch Multiplication mit M_1:

$$M_1 \varrho_1^2 = M_1 r_1^2 + d^2 M_1 + 2 d M_1 x_1.$$

Auf gleiche Weise erhalten wir für sämmtliche Massenelemente ähnliche Relationen zwischen den Trägheitsmomenten. Die entstandenen Gleichungen addiren wir, so erhält man:

$$\Sigma M_1 \varrho_1^2 = \Sigma M_1 r_1^2 + d^2 \Sigma M_1 + 2 d \Sigma M_1 x_1.$$

Es ist

$$\Sigma M_1 \varrho_1^2 = T_1$$
$$\Sigma M_1 r_1^2 = T$$
$$\Sigma M_1 = M$$

und $\Sigma M_1 x$ gleich 0, da die YZ-Ebene eine Schwerebene ist.

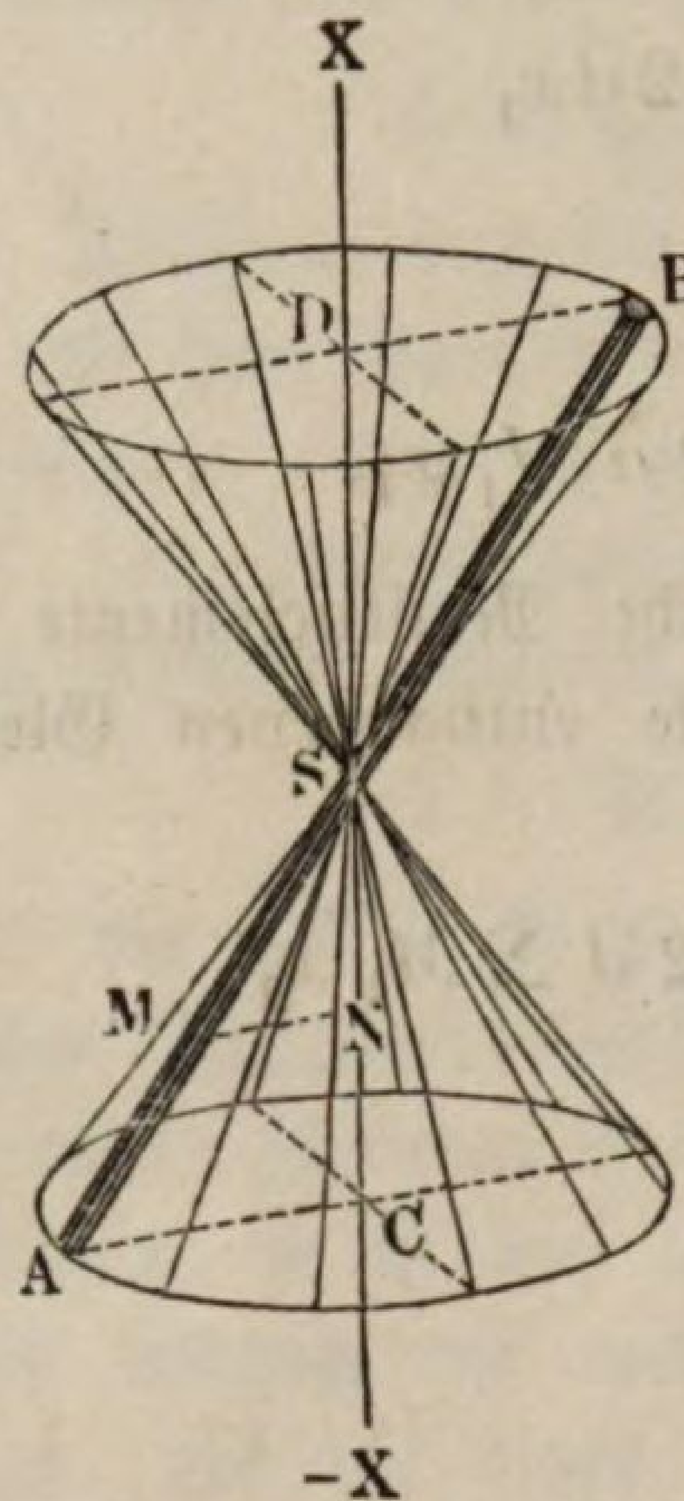
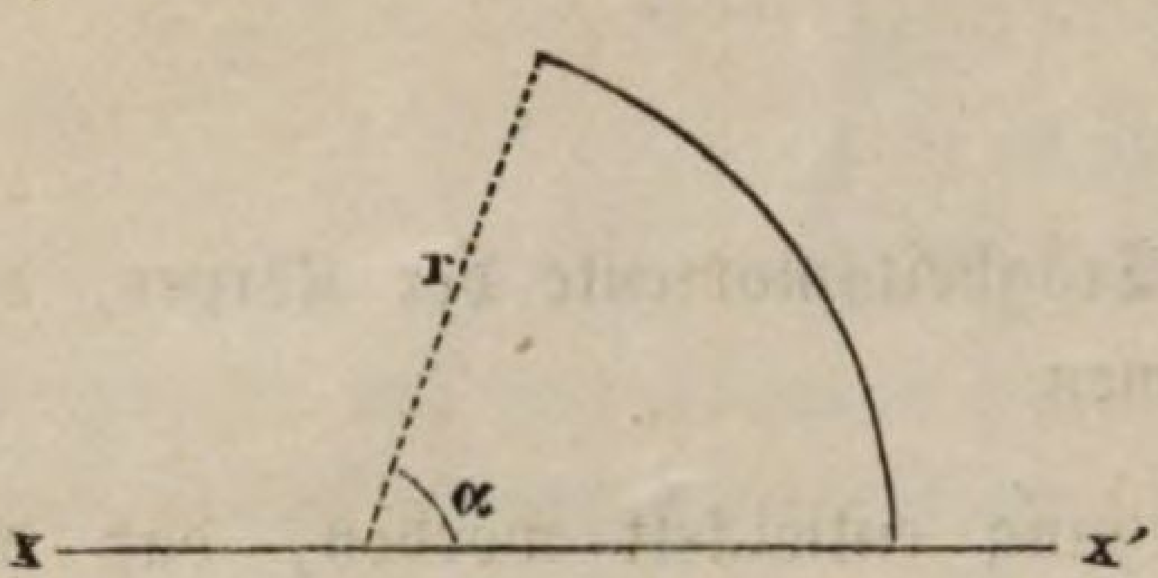
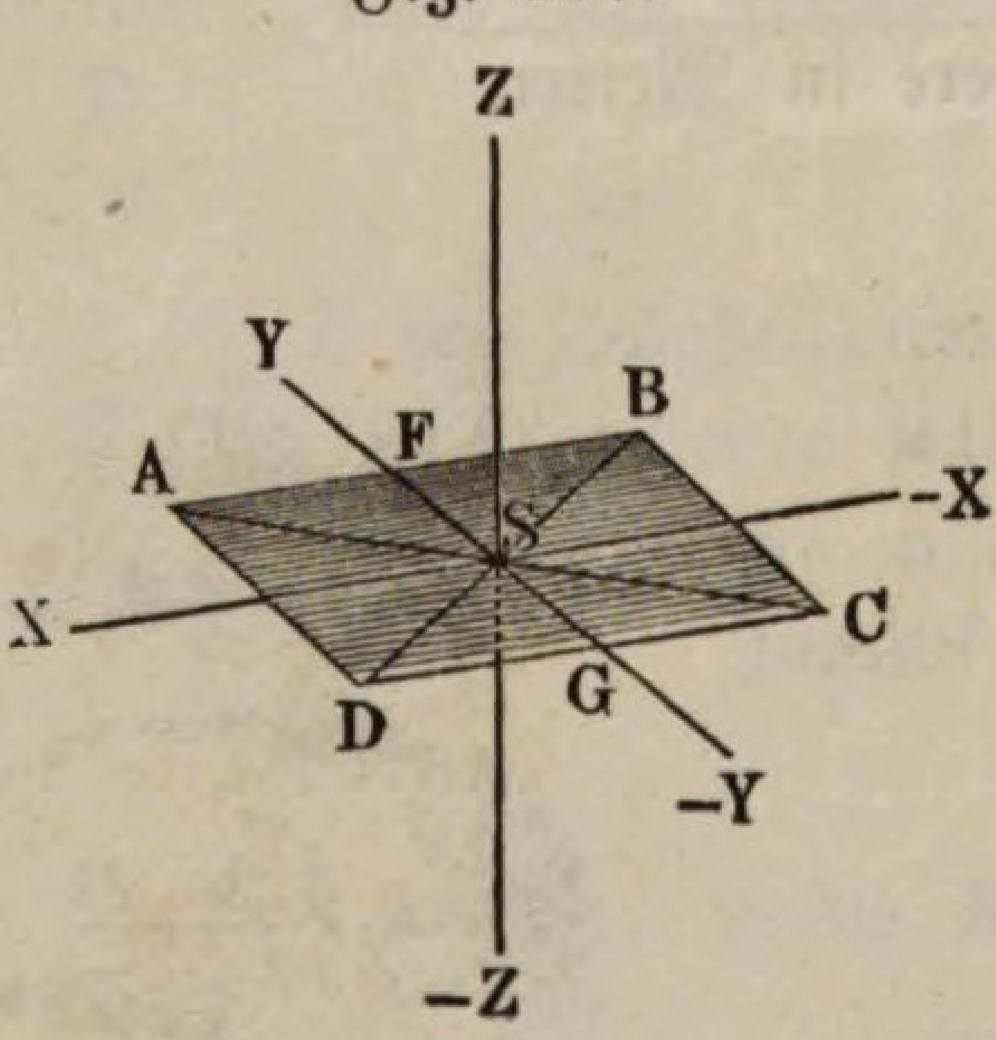
Wir erhalten demnach das verlangte Gesetz, das besonders wichtig ist bei der Bestimmung der Trägheitsmomente:

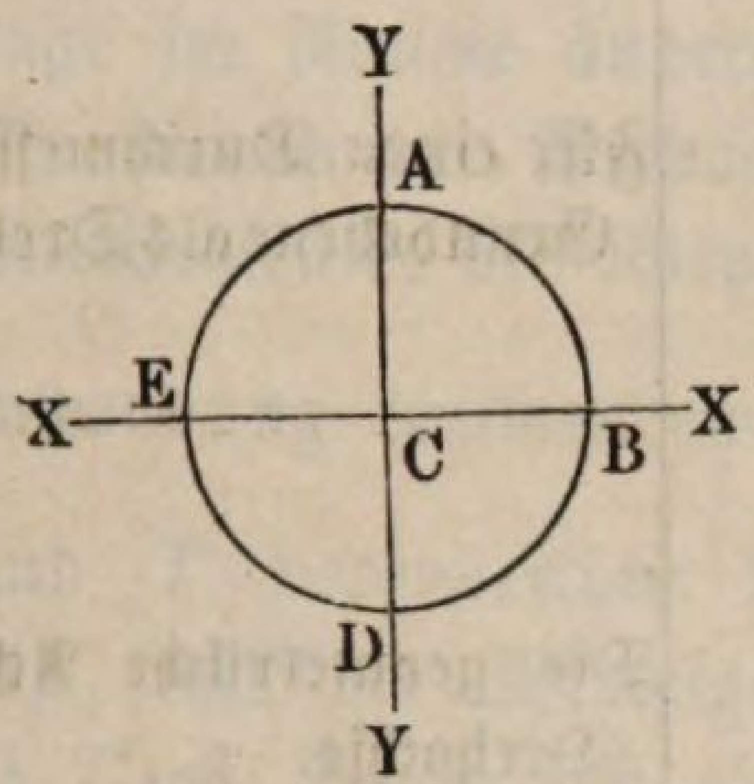
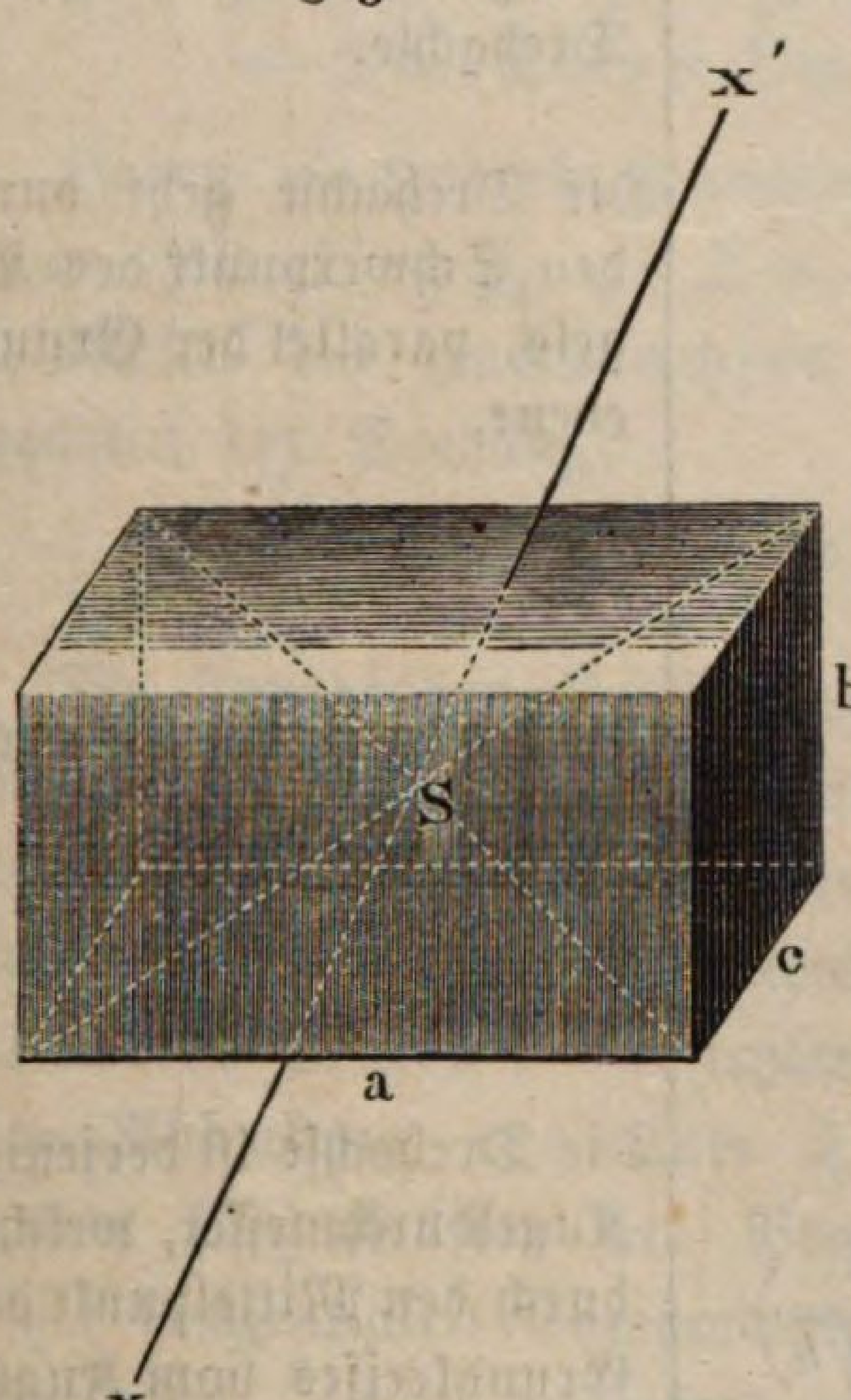
$$T_1 = T + d^2 M.$$

In folgender Tabelle finden sich die Trägheitsmomente der Körper, die in der Praxis häufig zur Anwendung kommen.

Die Ausdrücke sind für die Voraussetzung entwickelt worden, daß die Körper durchgehends dieselbe Dichtigkeit haben. Für M ist in den Anwendungen bekanntermaßen zu setzen:

$$\frac{G}{g} = \frac{\text{Gewicht in Kilogrammen}}{\text{Beschleunigung der Schwere in Metern}}.$$

Bezeichnung des Körpers.	Trägheitsmoment T für die Drehachse XX'.	Bemerkungen.
Fig. 275. 	$\frac{1}{12} M (l \sin \alpha)^2$	Eine Stange (Fig. 275) mit sehr kleinem constantem Querschnitte. Die Achse XX' geht durch die Mitte. Winkel BSx gleich α.
Fig. 276. 	$\frac{1}{2} M \frac{r^2}{\alpha} (\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\, \alpha)$	Ein Kreisbogen (Fig. 276) vom Mittelpunktswinkel α, die Drehachse ist ein durch den einen Endpunkt gelegter Durchmesser. Für den ganzen Kreisumfang ist $T = \frac{1}{2} M r^2$.
Fig. 277. 		Ein rechteckiges Blatt (Fig. 277) von geringer constanter Dicke, mit den Seiten $AB = a$ und $BC = b$. Die Drehachse gehe durch den Schwerpunkt S.
	$T = \frac{1}{3} M \left(\frac{b}{2}\right)^2$	1) Parallel der Kante AB.
	$T = \frac{1}{3} M \left(\frac{a}{2}\right)^2$	2) Parallel der Kante BC.
	$T = \frac{1}{3} M \frac{a^2 + b^2}{4}$	3) Normal zur Ebene $ABCD$.

Bezeichnung des Körpers.	Trägheitsmoment T für die Drehaxe XX'.	Bemerkungen.
Fig. 278. 	$\frac{1}{4} M r^2$	Ein kreisförmiges Blatt (Fig. 278) von geringer constanter Dicke. Ein Durchmesser ist Drehachse.
Fig. 279. 	$\frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$	Ein normales Parallelepipedum (Fig. 279) mit rechteckigen Grundebenen. Die Drehachse geht durch den Schwerpunkt S, parallel der Kante c.
	$\frac{1}{12} M (a^2 + c^2)$	Für eine durch S gehende Achse, parallel d. Kante b.
	$\frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$	Für eine durch S gehende Achse, parallel d. Kante a.
Ein normales Prisma, dessen Grundebene eine beliebige regelmäßige Figur ist.	$\frac{1}{3} M (\frac{1}{2} r_1{}^2 + r_2{}^2)$	Die Drehachse ist die geometrische Achse; r_1 Halbmesser des umschriebenen, r_2 Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Bezeichnung des Körpers.	Trägheitsmoment T für die Drehachse XX'.	Bemerkungen.
Ein normaler Cylinder mit kreisförmiger Basis, vom Halbmesser r und der Länge l.	$\frac{1}{2} M r^2$	Die geometrische Achse ist Drehachse.
	$\frac{1}{12} M (3 r^2 + 4 l^2)$	Für einen Durchmesser der Grundebene als Drehachse.
Ein normaler hohler Cylinder von der Länge l; die Halbmesser der Grundebene seien r_1 und r_2.	$\frac{1}{2} M (r_1{}^2 + r_2{}^2)$	Die geometrische Achse ist Drehachse.
Ein normaler Kegel mit kreisförmiger Basis. Der Halbmesser der Grundebene sei r, die Höhe h.	$0{,}3 M r^2$	Die geometrische Achse ist Drehachse.
	$0{,}15 M (r^2 + \frac{1}{4} h^2)$	Die Drehachse geht durch den Schwerpunkt des Kegels, parallel der Grundebene.
Eine Kugel vom Halbmesser r.	$0{,}4 M r^2$	Die Drehachse ist ein Durchmesser der Kugel.
Ein Kugelabschnitt von der Höhe h, Kugelhalbmesser r.	$\frac{2}{3} M h \left(r - \frac{5}{12} h + \frac{1}{90} \frac{h^2}{r - \frac{1}{3} h}\right)$	Die Drehachse ist derjenige Kugeldurchmesser, welcher durch den Mittelpunkt des Grundkreises vom Kugelabschnitte geht.
	$\frac{1}{3} M h \left(r + \frac{13}{12} h - \frac{4}{45} \frac{h^2}{r - \frac{1}{3} h}\right)$	Die Drehachse ist eine im höchsten Punkte des Kugelabschnittes zu der vorigen Drehachse nach beliebiger Richtung construirte Normale.

Drehung um einen festen Punkt.

Bei der Bewegung des Körpers um eine feste Achse war die Drehung in den einzelnen Zeitmomenten allein von dem Werthe Nn des betreffenden Kräftepaares abhängig, bei der Drehung um einen festen Punkt O ändert sich im Allgemeinen mit dem Werthe Qq des bewegenden Kräftepaares auch zugleich die Lage der betreffenden Paarebene. Die Drehung des Körpers erfolgt demnach um Achsen, welche durch O gehen, aber in jedem Augenblick ihre Lage im Raume ändern, um sogenannte Momentanachsen der Rotation. Eine Aenderung der Drehachse hat aber auch zugleich eine Veränderung des Trägheitsmomentes des Körpers zur Folge, so daß in der für jeden Zeitmoment zur Anwendung kommenden Bewegungsgleichung $\iota = \frac{Qq}{T}$, im Allgemeinen Qq und T veränderliche Werthe repräsentiren. Die dem Körper bei der Drehung, mit der Winkelgeschwindigkeit ω, inne wohnende lebendige Kraft $L = \frac{1}{2} T \omega^2$ ändert sich ebenfalls mit ω und T zugleich. Bezeichnet man mit T_x, T_y, T_z die Trägheitsmomente des Körpers für drei durch O gehende Coordinatenachsen und bildet die augenblickliche Drehaxe des Paares Qq mit denselben die Winkel λ, μ, ν, so ergiebt sich auf leichte Weise:

$$T = T_x \cos\lambda^2 + T_y \cos\mu^2 + T_z \cos\nu^2 - 2\cos\mu\cos\nu\,\Sigma m_1 y_1 z_1$$
$$- 2\cos\lambda\cos\nu\,\Sigma m_1 x_1 z_1 - 2\cos\lambda\cos\mu\,\Sigma m_1 x_1 y_1.$$

Haben die Coordinatenachsen zu dem Körper die besondere Lage, daß zu gleicher Zeit $\Sigma m_1 y_1 z_1$, $\Sigma m_1 x_1 z_1$, $\Sigma m_1 x_1 y_1$ zu Null wird, so heißen diese Achsen die Hauptachsen des Körpers (§. 60) und es ist in diesem Augenblick der Drehung:

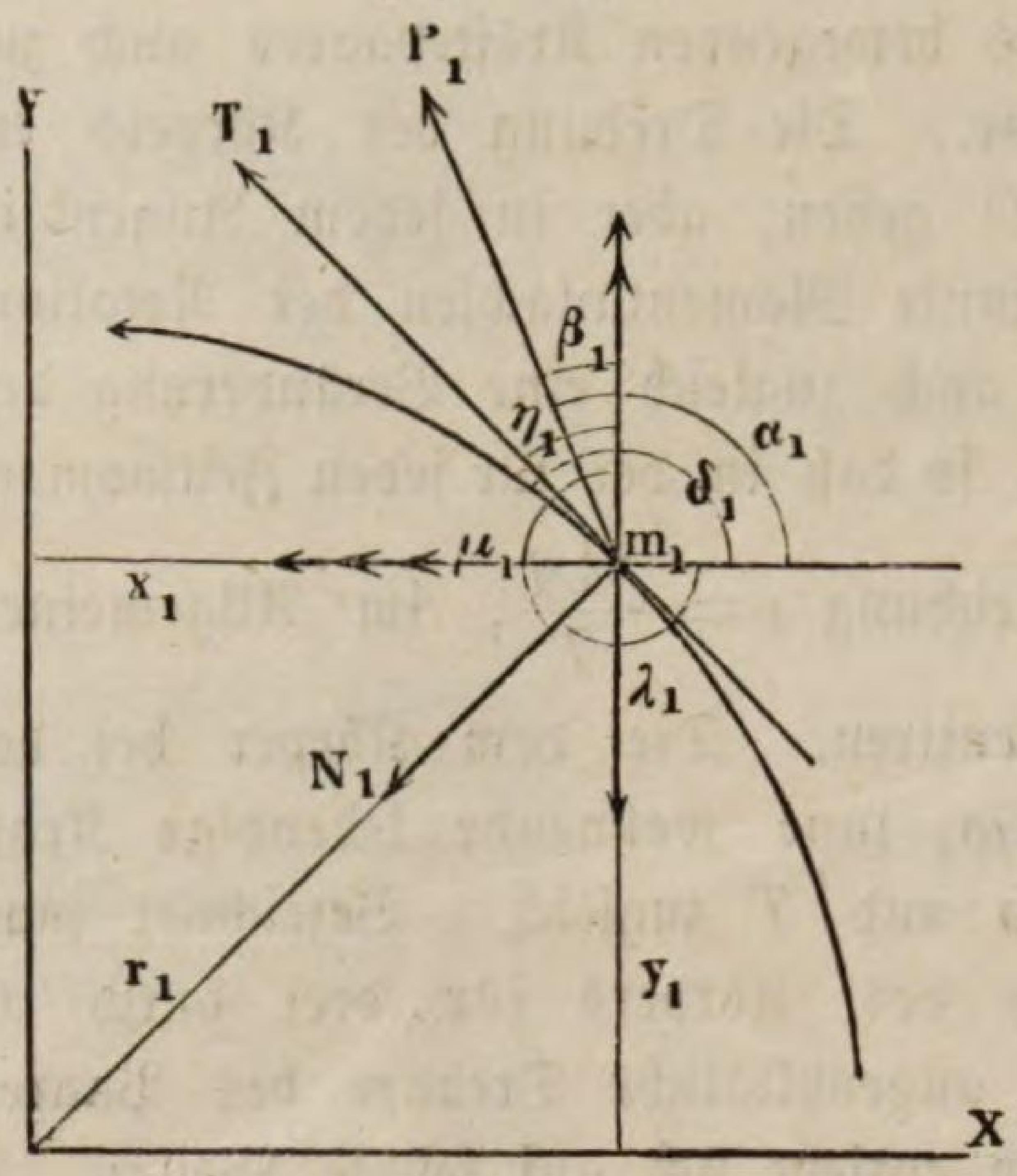
$$T = T_x \cos\lambda^2 + T_y \cos\mu^2 + T_z \cos\nu^2.$$

Die bewegenden Kräfte liegen bei der Drehung um eine feste Achse, wie 59
schon oben angegeben, in Ebenen normal zur Achse und bestehen aus den Tangentialkräften und den Ablenkungs- oder Centripetalkräften. Die ersteren dienen zur Erhaltung, resp. Aenderung der Geschwindigkeiten in den einzelnen Punkten des Körpers, die letzteren haben dagegen die Aufgabe, die jedesmalige Ablenkung aus einer Tangente in die nächstfolgende zu vermitteln. Von den Gegenkräften der Bewegung sind bei den vorigen Untersuchungen nur die tangentialen Componenten in Betracht gezogen worden, die Normalcomponenten, radial auswärts wirkend, sind die Reactionen der Centripetalkräfte, die sogenannten Centrifugalkräfte, welche keinen Einfluß auf die eigentliche Bewegung haben und deshalb bis jetzt vernachlässigt wurden. Bei der gegenseitigen Zerstörung der gegebenen Kräfte durch die Gegenkräfte der Bewegung hat die feste Achse während der Bewegung einen Druck auszuhalten, zu dessen Bestimmung diese Centrifugalkräfte mit in Rechnung zu bringen sind. Dieser Druck ist zur Drehachse normal zu denken und besteht aus zwei Componenten, welche in Richtung der X- und Y-Achse wirksam sind.

Zur Bestimmung der Größe dieser Druckkräfte sei für einen materiellen

Punkt von der Masse m_1 (Fig. 280) die ursprünglich angebrachte Kraft P_1, welche die Winkel α_1, β_1, γ_1 mit den Achsen bildet. Die Tangentialkraft sei T_1, mit den Achsen die Winkel δ_1 und η_1 bildend, und die Centripetalkraft sei N_1, deren Richtung durch die Winkel λ_1 und μ_1 bestimmt sein mag. Für die beiden letzteren Kräfte genügen die Winkel mit der X- und Y-Achse, da sie sämmtlich in Ebenen normal zur Drehachse liegen. Der Punkt habe die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und befinde sich in der Entfernung r_1 von der Drehachse. Man bilde für P_1 die drei Componenten, wobei $P_1 \cos \gamma_1$ außer Betracht fällt, da das feste System von Punkten sich in Richtung der Z-Achse nicht verschieben kann, und zerlege T_1 und N_1 nach Richtung der X und Y-Achse.

Fig. 280.



Die Componenten der Kräfte, die sich gegenseitig aufheben, also Druck erzeugen, sind für diese Annahmen:

in Richtung der X-Achse:

$$P_1 \cos \alpha_1 - (T_1 \cos \delta_1 + N_1 \cos \lambda_1)$$
$$P_1 \cos \alpha_1 + T_1 \cos (2R - \delta_1) + N_1 \cos (2R - \lambda_1)$$
$$P_1 \cos \alpha_1 + T_1 \frac{y_1}{r_1} + N_1 \frac{x_1}{r_1},$$

in Richtung der Y-Achse.

$$P_1 \cos \beta_1 - (T_1 \cos \eta_1 + N_1 \cos \mu_1)$$
$$P_1 \cos \beta_1 - T_1 \cos \eta_1 + N_1 \cos (2R - \mu_1)$$
$$P_1 \cos \beta_1 - T_1 \frac{x_1}{r_1} + N_1 \frac{y_1}{r_1}.$$

Nehmen wir an, daß die Winkelgeschwindigkeit in dem Momente gleich ω, und die Acceleration der drehenden Bewegung in der Entfernung 1 von der Drehachse gleich ι sei, so können wir statt T_1 und N_1 folgende Werthe einführen:

$$T_1 = m_1 r_1 \iota$$
$$N_1 = m_1 r_1 \omega^2.$$

Die Componenten erhalten durch diese Substitution die Form:

in Richtung der X-Achse:

$$P_1 \cos \alpha_1 + m_1 y_1 \iota + m_1 x_1 \omega^2,$$

in Richtung der Y-Achse:

$$P_1 \cos \beta_1 - m_1 x_1 \iota + m_1 y_1 \omega^2.$$

Verfahren wir in gleicher Weise mit den sich das Gleichgewicht haltenden Kräften an sämmtlichen materiellen Punkten, so erhalten wir in der algebraischen Summe dieser Ausdrücke die zur Z-Achse normalen Drucke D_1 und D_2, welche parallel der X- und Y-Achse wirken:

in Richtung der X-Achse:

$$D_1 = \Sigma (P_1 \cos \alpha_1 + m_1 y_1 \iota + m_1 x_1 \omega^2),$$

in Richtung der Y-Achse:

$$D_2 = \Sigma (P_1 \cos \beta_1 - m_1 x_1 \iota + m_1 y_1 \omega^2).$$

Die Abstände z' und z'' ihrer Angriffspunkte auf der Z-Achse vom Coordinaten-Anfangspunkt finden sich in der Summe der Momente, dividirt durch die Summe der Kräfte:

$$z' = \frac{\Sigma (P_1 z_1 \cos \alpha_1 + m_1 y_1 z_1 \iota + m_1 x_1 z_1 \omega^2)}{\Sigma (P_1 \cos \alpha_1 + m_1 y_1 \iota + m_1 x_1 \omega^2)} \Bigg\} \text{ für den Druck parallel der } X\text{-Achse.}$$

$$z'' = \frac{\Sigma (P_1 z_1 \cos \beta_1 - m_1 x_1 z_1 \iota + m_1 y_1 z_1 \omega^2)}{\Sigma (P_1 \cos \beta_1 - m_1 x_1 \iota + m_1 y_1 \omega^2)} \Bigg\} \text{ für den Druck parallel der } Y\text{-Achse.}$$

Ist für den Körper, der sich um die feste Z-Achse dreht, das Moment 60
Nn der gegebenen Kräfte gleich Null, so wird nach §. 125 die Winkelbeschleunigung ι zu Null und der Körper befindet sich in gleichförmiger Drehung um die Achse. Die dabei vorhandene Winkelgeschwindigkeit sei ω. Dasselbe wird auch eintreten, wenn an dem Körper überhaupt keine Kräfte wirksam sind, und die Drehung als eine Folge früherer Ursachen angesehen werden muß. Die dem Körper bei der Winkelgeschwindigkeit ω inne wohnende lebendige Kraft, welche derselbe als Arbeit abzugeben vermag, ist nach §. 126 $L = \frac{1}{2} T \omega^2$.

Zur Berechnung des Drucks, den die feste Achse bei dieser gleichförmigen Drehung auszuhalten hat, sind hiernach in den zu Ende des vorigen Paragraphen entwickelten Formeln $P_1, P_2 \ldots = 0$ und $\iota = 0$ zu setzen, da zugleich mit den gegebenen Kräften, auch die tangentialen Widerstände verschwinden und nur die Centrifugalkräfte als Druck erzeugend, übrig bleiben. Es ist hiernach:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \omega^2 \Sigma m_1 x_1 \\ z' &= \frac{\Sigma m_1 x_1 z_1}{\Sigma m_1 x_1} \end{aligned}\right\} \text{ für den Druck parallel der } X\text{-Achse,}$$

$$\left.\begin{aligned} D_2 &= \omega^2 \Sigma m_1 y_1 \\ z'' &= \frac{\Sigma m_1 y_1 z_1}{\Sigma m_1 y_1} \end{aligned}\right\} \text{ für den Druck parallel der } Y\text{-Achse.}$$

Diese beiden Normaldrücke, die allein von den Centrifugalkräften herrühren, lassen sich zu einer Resultante vereinigen, wenn z' gleich z'' ist. In diesem Falle erhalten wir den Druck normal zur Z-Achse, von den Centrifugalkräften hervorgerufen, oder die Centrifugalkraft F des ganzen Körpers, gleich

$$F = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \omega^2 \sqrt{(\Sigma m_1 x_1)^2 + (\Sigma m_1 y_1)^2}.$$

Nennen wir die Coordinaten des Schwerpunktes x und y und M die Masse des Körpers, so ist:

$$M\,x = \Sigma\, m_1\, x_1 \text{ und } M\,y = \Sigma\, m_1\, y_1,$$

daher:

$$F = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F = M\,r\,\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (129)$$

unter r die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse verstanden. Wir haben hiernach in den Fällen, wo sich eine resultirende Centrifugalkraft für den ganzen Körper ergiebt, die Masse desselben im Schwerpunkt vereinigt zu denken und können dann den für einen materiellen Punkt gefundenen Werth in Rechnung bringen. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß der Schwerpunkt des Systems nicht in Richtung der resultirenden Fliehkraft liegen muß.

Haben z' und z'' verschiedene Größen, so lassen sich die Drucke D_1 und D_2 zwar nicht zu einer Mittelkraft vereinigen, man kann jedoch beide parallel ihrer Richtung an den Schwerpunkt des Körpers verlegen, wodurch sich eine resultirende Centrifugalkraft gleich $\omega^2\,M\,r$ im Schwerpunkte wirkend ergiebt und ein Kräftepaar, dessen Paarebene durch die Drehachse geht und von der resultirenden Centrifugalkraft geschnitten wird. Für die Praxis ist diese Vereinigung nicht nothwendig, da es sich hier nur um den Druck auf die Umdrehungsachse (Welle oder deren Zapfen) handelt.

Im Allgemeinen üben also die Centrifugalkräfte eines sich um eine feste Achse drehenden Körpers Druck auf dieselbe aus, es läßt sich jedoch die Achse so durch den Körper legen, daß diese erzeugten Drucke verschwinden.

Hierzu ist nothwendig:

$$1)\ D_1 = 0 \text{ und } D_2 = 0,$$

d. h.

$$\Sigma\, m_1\, x_1 = 0 \text{ und } \Sigma\, m_1\, y_1 = 0.$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, muß die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Körpers gehen.

$$2)\ D_1\, z' = 0$$

(da $\omega^2\, \Sigma\, m_1\, x_1$ in der XZ-Ebene liegen und parallel der X-Achse sind)

$$D_2\, z'' = 0$$

(da $\omega^2\, \Sigma\, m_1\, y_1$ in der YZ-Ebene liegen und parallel der Y-Achse sind), d. h. aber

$$\Sigma\, m_1\, x_1\, z_1 = 0$$

und

$$\Sigma\, m_1\, y_1\, z_1 = 0.$$

Zur Erfüllung dieser Bedingung muß die Drehachse zu den Elementen des Körpers eine bestimmte Lage haben, die von der Form des Körpers abhängig ist.

Hiernach wird ein Körper, der vollkommen frei ist, auf den keine äußeren Kräfte einwirken, der aber angefangen hat, sich um eine durch den Schwerpunkt gehende Linie zu drehen, für welche

$$\Sigma m_1 x_1 z_1 = 0 \text{ und } \Sigma m_1 y_1 z_1 = 0$$

ist, immer dieselbe drehende Bewegung durch sich selbst erhalten, ohne daß die Achse irgend einen Druck auszuhalten hat.

Jede für die obigen Bedingungen bestimmte Drehungsachse heißt eine freie Achse.

Es giebt in jedem Körper drei auf einander rechtwinklig stehende Linien, die durch den Schwerpunkt gehen und freie Achsen sind, da das, für die Z-Achse als Drehachse, Nachgewiesene sich ebenso auf die X- und Y-Achse übertragen läßt.

Geht die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Körpers und ist

$$z' = z'',$$

so giebt es, wie wir gesehen, eine resultirende Centrifugalkraft.

Diese kann aufgehoben werden, wenn man den Angriffspunkt derselben fest macht. Hieraus folgt, daß eine Drehachse mit der Eigenschaft $z' = z''$ zu einer freien gemacht werden kann, wenn man einen ihrer Punkte fest macht. Außerdem läßt sich mit Hülfe höherer Mathematik nachweisen, daß sich durch jeden beliebigen Punkt des Körpers drei auf einander rechtwinklig stehende Linien ziehen lassen, die, als Drehachsen benutzt, der zweiten obigen Bedingung genügen. In diesem Falle ist:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m_1 x_1 z_1 = 0\\ \Sigma m_1 y_1 z_1 = 0\end{array}\right\} \text{ für die } Z\text{-Achse als Drehachse,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m_1 x_1 y_1 = 0\\ \Sigma m_1 z_1 y_1 = 0\end{array}\right\} \text{ für die } Y\text{-Achse als Drehachse,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma m_1 y_1 x_1 = 0\\ \Sigma m_1 z_1 x_1 = 0\end{array}\right\} \text{ für die } X\text{-Achse als Drehachse,}$$

d. h. aber

$$\Sigma m_1 x_1 z_1 = \Sigma m_1 y_1 z_1 = \Sigma m_1 x_1 y_1 = 0.$$

Wird dieser beliebig gewählte Punkt festgehalten, so werden die Componenten nach Richtung der drei Achsen durch den festen Punkt aufgehoben und die durch ihn, nach obigen Bedingungen, gelegten Drehachsen, haben mit den freien Achsen gleiche Eigenschaften. Man nennt dieselben

Hauptachsen.

Hiernach erhalten wir das Gesetz:

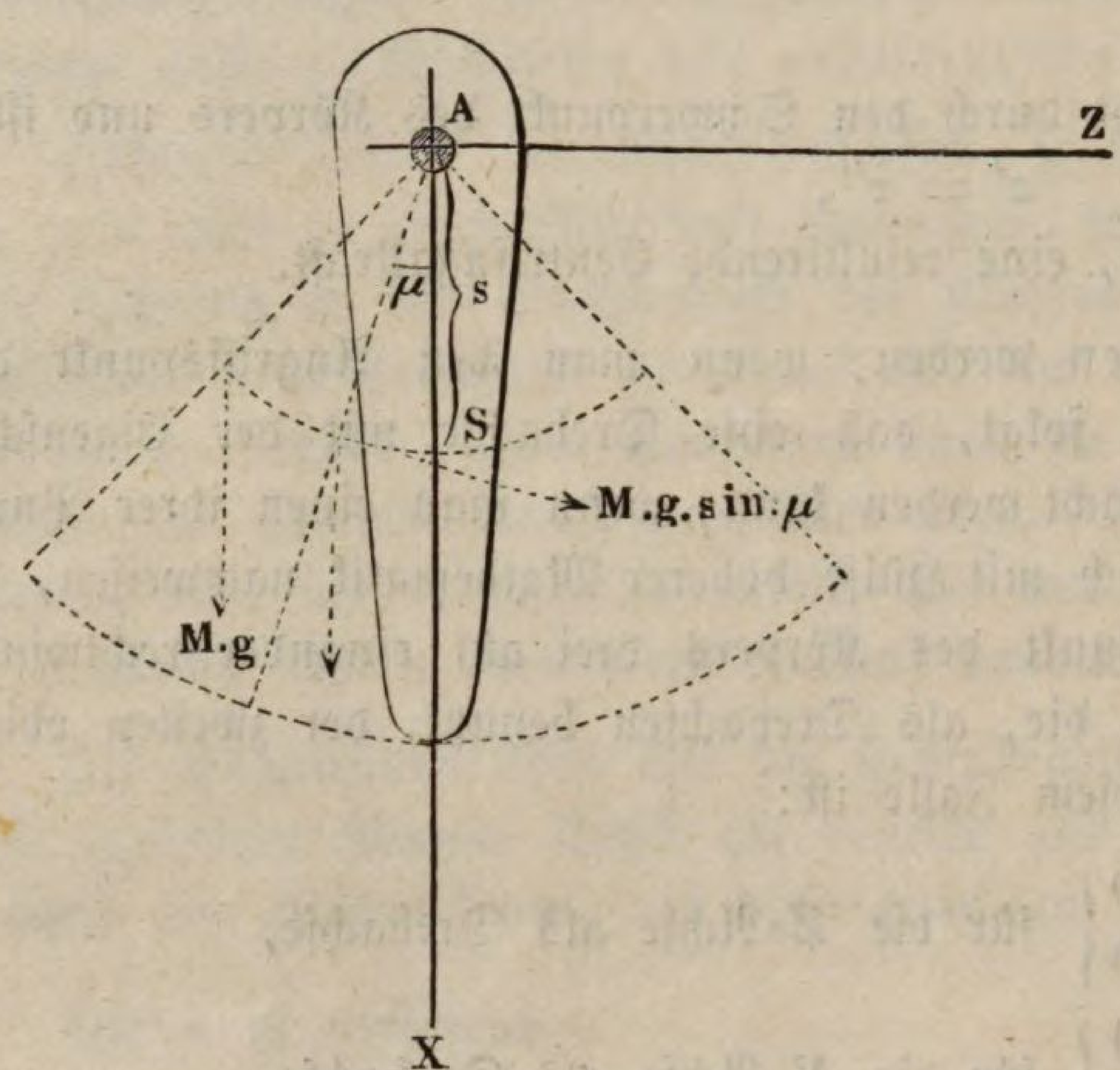
Läßt man ein System um eine der Hauptachsen drehen, so findet aus den Centrifugalkräften nur Druck auf den Punkt der Drehachse statt, durch den die Hauptachsen gehen. Ist dieser Punkt Schwerpunkt des Systems, so ist auch dieser aus den Centrifugalkräften herrührende Druck Null.

Für die Praxis ist es deshalb von Wichtigkeit, die Drehachse bei drehenden Körpern so anzuordnen, daß sie für dieselben eine freie Achse sei. Bei Umdrehungskörpern ist die geometrische Achse eine freie, woraus sich die Nothwendigkeit des genauen Centrirens von Rädern und Scheiben genugsam ergiebt.

61 Als Anwendung der ungleichförmigen Drehung eines Körpers um eine feste Achse betrachten wir das physische oder zusammengesetzte Pendel, d. i. ein Körper, der um eine horizontale Achse schwingt.

Die Drehungsachse des Körpers gehe durch A (Fig. 281), sie ist horizontal angenommen und die Y-Achse des bewegten Systems. Durch den Schwerpunkt S des Körpers sei eine Verticalebene gelegt, so daß AS in der verticalen X-Achse liegt. Wir wollen die Bewegung des physischen Pendels auf die des mathematischen von der Länge l zurückführen §. 31, 2. Bei dem Ausschlagwinkel μ ist für das letztere die Acceleration ι' in der Entfernung 1 von der Drehachse:

Fig. 281



$$\iota' = \frac{1}{l}\, g \sin \mu.$$

Für einen Körper von der Masse M, der sich um eine feste Achse dreht, ist die Acceleration ι'' in der Entfernung 1 von der Drehachse nach F. 125:

$$\iota'' = \frac{\Sigma P p}{T_1}.$$

$\Sigma P p$ ist die Summe der statischen Momente der Kräfte, die auf Drehung wirken, hier also die Tangentialkräfte. Dieselben sind für einen bestimmten Ausschlag parallel, weshalb ihre Resultante, gleich der Summe der Kräfte, im Schwerpunkte S wirksam gedacht werden muß.

Setzen wir $AS = s$ und bestimmen $\Sigma P p$ für den Ausschlagwinkel μ, so ist

$$\Sigma P p = M s g \sin \mu;$$

T_1 ist das Trägheitsmoment für die Drehachse.

Hiernach erhalten wir für den angenommenen Ausschlagwinkel:

$$\iota'' = \frac{M s}{T_1}\, g \sin \mu.$$

Soll das physische Pendel mit dem mathematischen von der Länge l dieselbe Schwingungsdauer haben, so müssen beide an jedem Punkte ihrer Bahn dieselbe Acceleration besitzen; es muß also für jeden Ausschlagwinkel

$$\iota' = \iota''$$

oder

$$\frac{1}{l} g \sin \mu = \frac{Ms}{T_1} g \sin \mu$$

sein.

Hieraus erhält man die Länge l des mathematischen Pendels, das mit dem physischen gleiche Schwingungsdauer hat:

$$l = \frac{T_1}{Ms} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \quad \ldots\ldots \quad (130)$$

In einem Körper, der um eine horizontale Achse schwingt, nennt man den Punkt, in welchem man die Masse des ganzen Körpers vereinigt denken kann, ohne die Art und Weise und die Zeitdauer der Schwingungen dadurch zu ändern, Schwingungsmittelpunkt. Alle Punkte, die in der XY-Ebene, in der Entfernung l von der Y-Achse liegen, haben die eben erwähnte Eigenschaft, jedoch wird gewöhnlich der Punkt mit Schwingungsmittelpunkt bezeichnet, der sich mit dem Schwerpunkte S auf derselben Linie findet. Setzt man in der gefundenen Zeitdauer t eines mathematischen Pendels statt l den Werth $\frac{T_1}{Ms}$, so erhält man die Schwingungszeit eines physischen Pendels, da die Bewegung desselben dann auf die eines materiellen Punktes, in der Entfernung l, zurückgeführt ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{T_1}{Msg}} = 1{,}003 \sqrt{\frac{T_1}{Ms}}.$$

Es läßt sich t durch Beobachtung ermitteln, weshalb die Formel zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines, um eine horizontale Achse schwingenden Körpers, benutzt werden kann:

$$T_1 = \left(\frac{t}{1{,}003}\right)^2 Ms.$$

Ist T das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt S des Körpers gehende, mit der Y-Achse parallele Achse, so haben wir n. F. 128:

$$T_1 = T + Ms^2.$$

Führen wir weiter den Trägheitshalbmesser e ein, setzen also n. F. 127 statt T, Me^2, so ist:

$$T_1 = M(e^2 + s^2)$$

und

$$l = \frac{e^2 + s^2}{s}.$$

Wir machen den Schwingungsmittelpunkt C des Körpers zum Aufhängepunkt (Fig. 282) und suchen die Entfernung l_1 des neuen Schwingungsmittelpunktes.

Es sei K der frühere Aufhängepunkt, dann ist $CK = l$ und $KS = s$. Wir haben für den neuen Aufhängepunkt C, n. F. 130:

$$l' = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}},$$

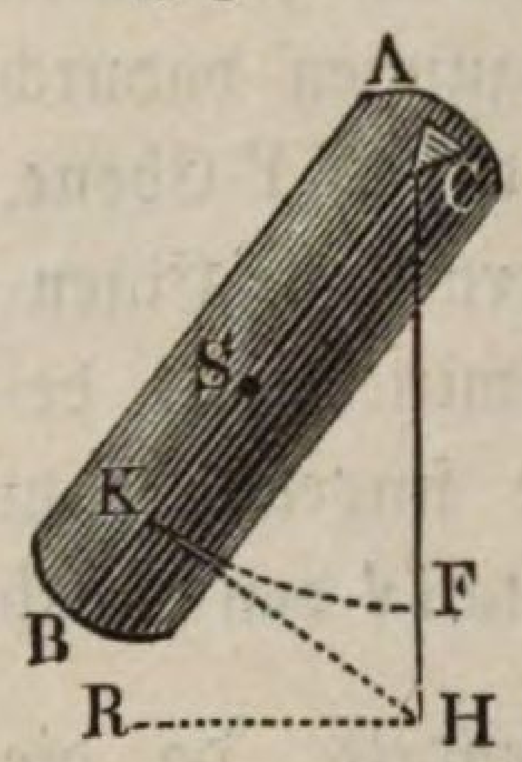
$$\text{Trägheitsmoment} = T + M(l-s)^2 = M[e^2 + (l-s)^2],$$

$$\text{statisches Moment} = M(l-s),$$

daher:
$$l' = \frac{e^2 + (l-s)^2}{l-s}.$$

Für l den Werth $\frac{e^2 + s^2}{s}$ gesetzt, so ist:

Fig. 282.



$$l - s = \frac{e^2}{s}$$

und

$$l' = \frac{e^2 + \left(\frac{e^2}{s}\right)^2}{\frac{e^2}{s}},$$

$$l' = \frac{e^2 + s^2}{s} = l,$$

d. h. **der Aufhängepunkt K und der Schwingungsmittelpunkt C eines physischen Pendels sind wechselseitig**, der eine kann mit dem anderen vertauscht werden, ohne die Schwingungszeit zu ändern. Diese Eigenschaft ist benutzt zur Construction des **Reversionspendels** AB (Fig. 283), dessen Schneiden C und K eine unveränderliche Entfernung haben. Von den beiden Gewichten P und Q ist das kleinere P mittelst einer feinen Schraube verstellbar. Hierdurch ist es möglich, P genau an den Ort zu bringen, daß C und K wechselseitig als Aufhängepunkt benutzt werden können, ohne die Schwingungszeit des Pendels dadurch zu ändern. Das Reversionspendel ist besonders zur Bestimmung der Länge der Secundenpendel für die verschiedenen Orte der Erde geeignet. Nachdem das Gewicht P gehörig eingestellt worden, ist für C als Aufhängepunkt, K Schwingungsmittelpunkt und $CK = l$ die Länge des einfachen Pendels, das mit dem vorliegenden dieselbe Schwingungsdauer hat. Ist t die Schwingungszeit des Reversionspendels und l_1 die Länge des Secundenpendels für denselben Ort, so haben wir:

Fig. 283.



$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ und } 1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}.$$

Hieraus folgt die Länge l_1 des Secundenpendels:

$$l_1 = \frac{l}{t^2}.$$

Es bleibt noch der allgemeinste Fall der Bewegung eines vollkommen 62
freien Körpers zu untersuchen übrig, wenn dieselbe in jedem Augenblicke als Folge einer Einzelkraft R und eines Kräftepaares $Q\,q$ angesehen werden muß, eine Vereinigung zwischen R und $Q\,q$ sich also als unmöglich erweist. In diesem Falle kann man die Bewegung des Körpers in jedem Augenblicke aus einer fortschreitenden und aus einer drehenden zusammengesetzt denken. Man kann nämlich einen beliebigen Punkt in dem Körper annehmen und demselben in jedem Augenblicke eine Bewegung geben, in Folge welcher jeder Punkt eine unendlich kleine gerade Linie beschreibt, die derjenigen gleich und parallel ist, welche der betrachtete Punkt während dieses Zeitraumes beschreiben muß; darauf kann man diesen Punkt als fest annehmen und den Körper sich um denselben in der Weise drehen lassen, bis jeder Punkt in die Lage gekommen ist, welche er am Ende dieses Zeitmomentes erhalten soll. Dieser Punkt, unveränderlich fest mit dem Körper verbunden gedacht, kann beliebig gewählt werden und zugleich als Coordinatenanfangspunkt dienen.

Sollen aber sämmtliche Punkte während des Zeitmomentes gleiche und parallele Wege zurücklegen, so müssen auch die in den einzelnen Punkten auftretenden Trägheitswiderstände als parallel angesehen werden, deren Summe, der resultirende Trägheitswiderstand, im Schwerpunkt des Systems wirksam zu denken ist. Es ist demnach nothwendig, die bewegende Kraft ebenfalls den Schwerpunkt angreifen zu lassen, da andernfalls neben der fortschreitenden Bewegung noch eine Drehung um den Schwerpunkt eintreten würde. Aus diesem Grunde wählen wir bei der vollkommen freien Bewegung des Körpers, den Schwerpunkt als festen Punkt und die durch denselben gehenden Coordinatenachsen denken wir während der Bewegung in paralleler Lage erhalten. Für die einen Moment dauernde geradlinige Bewegung des Körpers dient hiernach als Bewegungsgleichung $j = \frac{R}{M}$ und für die in derselben Zeit stattfindende Drehbewegung um den Schwerpunkt haben wir $\iota = \frac{Q\,q}{T}$. Aus diesen Formeln müssen bei dieser doppelten Bewegung, für die aufeinander folgenden Zeitmomente, die resultirenden Accelerationen und daraus die Geschwindigkeiten bestimmt werden.

Die Bewegungen, welche die verschiedenen Punkte eines frei beweglichen festen Systems in jedem Augenblicke annehmen, sind hiernach als resultirend aus denen zu betrachten, welche sich auf zwei gesonderte Bewegungen beziehen:

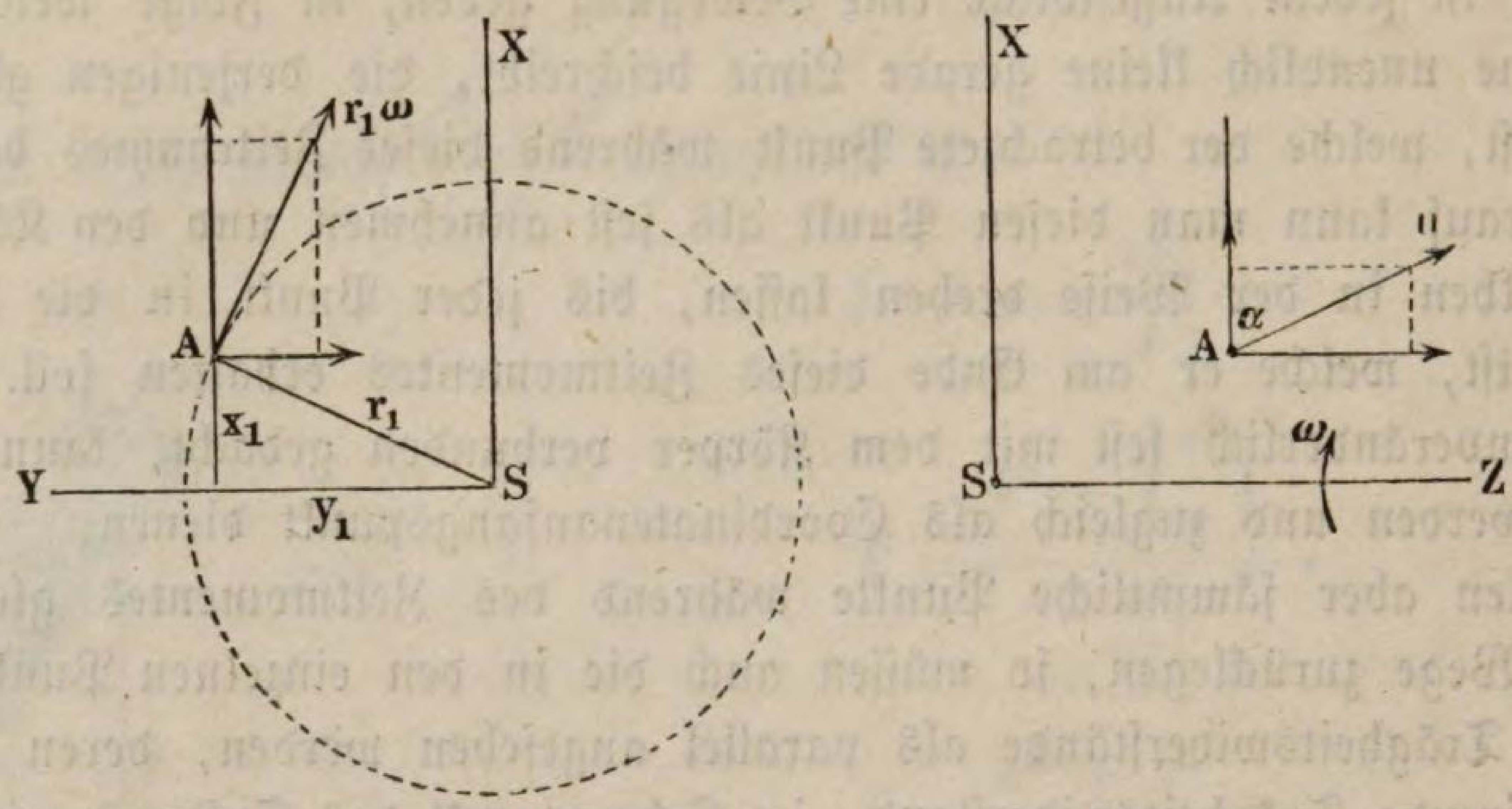
1) Eine fortschreitende, welche durch die angreifenden, mit sich selbst parallel an den Schwerpunkt versetzten Kräfte, erzeugt wird.

2) Eine drehende, welche durch dasselbe System der gegebenen Kräfte hervorgebracht wird, wenn man den Schwerpunkt festgehalten denkt.

Die resultirende Geschwindigkeit für einen beliebigen Punkt des Körpers von der Masse m_1 sei gleich v, so ist die hier aufgesammelte lebendige Kraft $\frac{1}{2} m_1 v^2$, und die des ganzen Körpers in demselben Augenblicke $L = \Sigma \frac{1}{2} m_1 v^2$.

Es sei, in nebenstehender Fig. 284, S der Schwerpunkt des Körpers und der Punkt A von der Masse m_1 und den Coordinaten x_1, y_1, z_1 besitze eine

Fig. 284.



fortschreitende Bewegung von der Geschwindigkeit u und die Winkelgeschwindigkeit ω. Als augenblickliche Drehachse wählen wir die Z-Achse und nehmen die X-Achse dergestalt, daß die Richtung von u der Ebene ZX parallel gerichtet sei, dann dient zur Berechnung der resultirenden Geschwindigkeit v_1, Formel 21:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Bezeichnen wir noch die Entfernung der Masse m_1 von S mit r_1 und den Winkel, den die Richtung von u mit der X-Achse bildet, mit α, so ist:

$$v_x = u \cos \alpha + r_1 \omega \frac{y_1}{r_1}$$

$$v_y = r_1 \omega \frac{x_1}{r_1}$$

$$v_z = u \sin \alpha$$

und $v^2 = (u \cos \alpha)^2 + (\omega y_1)^2 + 2 u \omega y_1 \cos \alpha + (\omega x_1)^2 + (u \sin \alpha)^2$
$= u^2 + (r_1 \omega)^2 + 2 u \cos \alpha . \omega y_1$.

Bei Benutzung dieses Werthes erhalten wir die lebendige Kraft des Körpers in diesem Angenblicke:

$$L = \Sigma \tfrac{1}{2} m_1 u^2 + \Sigma \tfrac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \Sigma u \cos \alpha . m_1 \omega y_1.$$

Für diesen Moment der Bewegung ist u, ω und α constant, und da die Drehachse durch den Schwerpunkt geht, so ist $\Sigma m_1 y_1 = 0$ und deshalb:

$$L = \tfrac{1}{2} u^2 \Sigma m_1 + \tfrac{1}{2} \omega^2 \Sigma m_1 r_1^2.$$

Für Σm_1 setzen wir die Masse M des Körpers, und $\Sigma m_1 r_1^2$ ist das Trägheitsmoment T desselben für die Drehachse, weshalb wir schließlich erhalten:

$$L = \tfrac{1}{2} M u^2 + \tfrac{1}{2} T \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

d. h. die totale lebendige Kraft der zusammengesetzten Bewegung ist in jedem Momente gleich der Summe der lebendigen Kräfte der beiden Bewegungen, aus welchen die zusammengesetzte Bewegung besteht.

Uebungen.

1. Ein Körper vom Gewicht G wird auf die Höhe h gehoben und kommt daselbst mit der Geschwindigkeit v an. Wie groß ist die dazu nothwendige Arbeitgröße?

$$L = G h + \tfrac{1}{2} \frac{G}{g} v^2.$$

Setzt man $\frac{v^2}{2g}$ gleich h_1, so ist $L = G(h + h_1)$. Der mittlere Druck P, welcher gegen den Körper ausgeübt werden muß, damit er in verticaler Richtung auf die Höhe h gehoben werde und dort mit der Geschwindigkeit v ankomme, ist $P = G\left(1 + \frac{h_1}{h}\right)$.

2. Es sollen 100 Kilogramm mittelst einer Winde auf 20 Meter Höhe bei einer Geschwindigkeit von 1^m gehoben werden.

Es ist $h_1 = 0{,}05^m$, daher gegen 20^m zu vernachlässigen, und

$$L = 2000^{km}.$$

3. Man soll 360 Kubikdecimeter Wasser in jeder Minute mittelst einer Spritze auf 40^m Höhe bringen, und die Höhe der Mündung des Gußrohrs über dem Wasserspiegel im Spritzenkasten betrage 1^m. Wie groß ist die dazu nothwendige Arbeitstärke?

Es ist hier $h = 1^m$ gegen $h_1 = 40^m$ verschwindend klein, und deshalb

$$L = 360 \cdot 40^{km} \text{ und}$$

$$L^{=} = 240 \underline{\underline{km}}.$$

4. Zum Betriebe einer Sägemühle wurden fünf Pferdestärken gebraucht. Es waren zwölf Sägeblätter in Bewegung, die in einer Minute 80 Hübe von 706^{mm} Länge machten. Die Mühle liefert in zwölf Stunden 700^m Schnittlänge, bei der durchschnittlichen Stärke der Sägeblöcke von 471^{mm}. Wie groß ist die von der Reibung verbrauchte Arbeitstärke, wenn der Reibungswiderstand in den Führungen 35 Kilogramm beträgt? Welche mittlere Arbeitgröße gehört zum Zerschneiden eines Quadratcentimeters Schnittfläche? Mit welcher Geschwindigkeit arbeiten die Sägen? Wie groß ist der beim Schneiden des Holzes zu überwindende Druck?

Arbeitstärke der Reibung $= \frac{35 . 80 . 0{,}706}{60} = 32{,}95^{\underline{km}}$.

Disponible Arbeitstärke $= 5 . 75 - 32{,}95 = 342^{\underline{km}}$.

Auf Nebenarbeiten wird $\frac{1}{6}$ der Zeit verwendet, daher zehn Stunden Arbeitszeit, in welcher $329{,}7 \square^{m}$ Schnittfläche ausgeführt werden, dies liefert in jeder Minute $5495 \square^{cm}$.

Mittlere Arbeitgröße zum Zerschneiden von $1 \square^{cm} = \frac{342 . 60}{5495} = 3{,}73^{km}$.

Eine Säge liefert pro Minute $= \frac{5495}{12} = 458 \square^{cm}$ Schnittfläche.

Die Schnittlänge daher pro Minute $= \frac{45800}{471} = 97^{mm}$.

Eindringen der Säge pro Hub $= \frac{97}{80} = 1{,}2^{mm}$.

Geschwindigkeit der Sägen $= \frac{80 . 0{,}706}{60} = 0{,}941^{m}$.

Constanter Widerstand für eine Säge $= \frac{342}{12 . 0{,}941} = 30{,}3$ Kilogr.

5. Es sei m_1 die Masse eines Geschützes nebst Gestelle, m_2 die Masse der Kugel, P die Explosionskraft der Kugel, die in irgend einem Zeitmoment die Kugel nach vorwärts und das Geschütz nach rückwärts drückt, v_1 und v_2 die betreffenden Geschwindigkeiten, welche P in der unendlich kleinen Zeit τ den Massen m_1 und m_2 ertheilt. Es sind die Bewegungsverhältnisse bei dem Schuß zu untersuchen.

$P \tau = m_1 v_1$ und auch $= m_2 v_2$, daher

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die von der Kraft P an beide Massen übertragene Arbeitgröße ist:

$$L = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Bezeichnet man mit l die Länge des Geschützes, so ist der mittlere Druck, den das Pulvergas gegen die Kugel ausübt:

$$D = \frac{\tfrac{1}{2} m_2 v_2^2}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die Zeit t, welche die Kugel gebraucht, um das Geschütz zu verlassen, unter Voraussetzung des mittleren Drucks ist:

$$t = \frac{m_2 v_2}{D} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

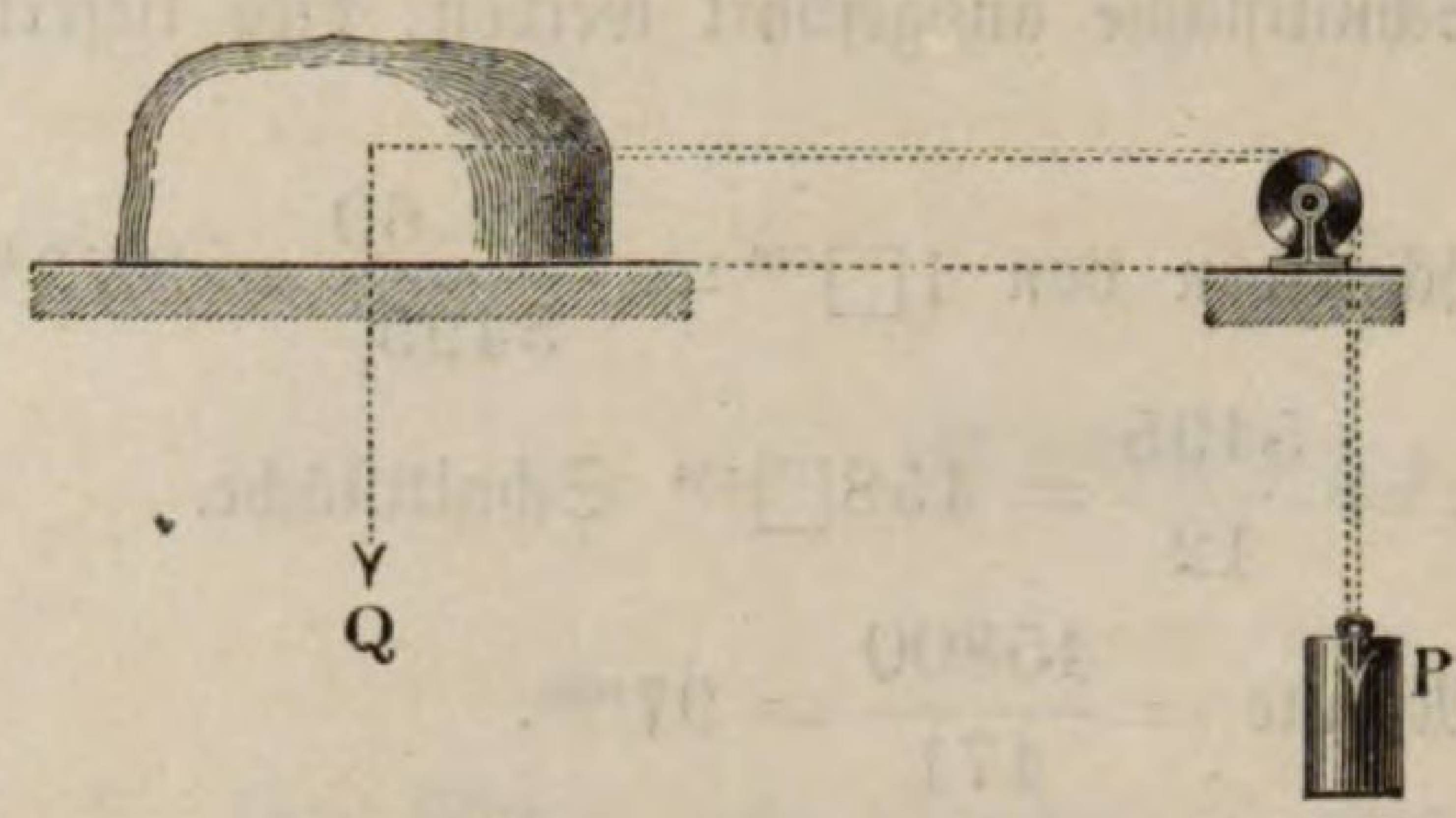
Gebraucht man zu einem Schuß incl. Reinigung, Ladung und Stellung des Geschützes n Secunden, so ist die mittlere Arbeitstärke in Pferdestärken N ausgedrückt:

$$N = \frac{L}{n . 75} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Für gewöhnliche Verhältnisse ist $m_1 = 300\, m_2$, und $n = 300$ Secunden.

6. Auf einer horizontalen Ebene liege ein Körper vom Gewicht Q (Fig. 285). Durch ein Seil, das über eine feste Rolle geführt wird, ist ein Gewicht P mit dem Körper verbunden, so daß derselbe dadurch in Bewegung gesetzt wird. Es sind die Bewegungsgesetze zu entwickeln. Wenn von der Reibung, der Steifigkeit des Seiles und dem Massenwiderstande der Rolle abgesehen wird, so ist die Acceleration j der Bewegung gleich

Fig. 285.



$$j = g\frac{P}{P+Q}.$$

Wird die Reibung auf der horizontalen Ebene berücksichtigt, so ist für den Reibungscoefficienten μ

$$j = g\frac{P-\mu Q}{P+Q}.$$

Ist V das Gewicht der Rolle, r_1 der Halbmesser derselben, r_2 der Halbmesser des Zapfens, und μ_1 der Reibungscoefficient für die Zapfenreibung, so haben wir:

$$j = g\frac{P-\left(\mu Q + \mu_1 \frac{r_2}{r_1}\sqrt{(P+V)^2+(\mu Q)^2}\right)}{P+Q}.$$

Berücksichtigen wir endlich den Massenwiderstand der Rolle sowie die Steifigkeit des Seiles. Zu dem Ende sei δ der Durchmesser des Seiles, ψ der Coefficient für die Steifigkeit nach §. 50, T das Trägheitsmoment der Rolle für die Drehachse. Für diese Voraussetzungen ist die zu bewegende Masse:

$$\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}+\frac{T}{r_1^{\,2}},$$

oder:

$$= \frac{P}{g}+\frac{Q}{g}+\frac{\frac{1}{2}Vr_1^{\,2}}{g r_1^{\,2}}$$

$$= \frac{P+Q+\frac{1}{2}V}{g}.$$

Die Acceleration j ist daher:

$$j = g\frac{P-\left(\mu Q\frac{r_1+\psi\delta^2}{r_1}+\mu_1\frac{r_2}{r_1}\sqrt{(P+V)^2+(\mu Q)^2}\right)}{P+Q+\frac{1}{2}V}.$$

Aus der Acceleration j findet man auf bekannte Weise die Endgeschwindigkeit v. nach t Secunden sowie den durchlaufenen Weg.

7. Wird anstatt des Gewichtes P eine mechanische Kraft benutzt, um den Körper in Bewegung zu versetzen, so ist die Acceleration der Bewegung:

$$j = \frac{P - \mu Q}{Q} g.$$

Hört die Kraft P plötzlich auf zu wirken, so wird die Reibung die erlangte Geschwindigkeit in jedem Moment vermindern, den Körper endlich in Ruhe versetzen. Die Acceleration der verzögerten Bewegung ist in diesem Falle

$$j = \frac{\mu Q}{Q} g$$

$$j = \mu g.$$

Hatte der Körper eine Geschwindigkeit von v^m erlangt, so findet man den durchlaufenen Weg s sowie die Zeitdauer t der Bewegung aus den bekannten Formeln

$$s = \frac{v^2}{2 \mu g} \text{ und } t = \frac{v}{\mu g}.$$

Zu denselben Resultaten gelangt man auf folgende Weise:

Der Körper hatte bei der Geschwindigkeit v eine Arbeitgröße in sich aufgenommen, die sich durch seine lebendige Kraft $\frac{1}{2} m v^2$ ausdrückt:

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2.$$

Diese Arbeit wird durch die Reibung nach und nach vernichtet, so daß die Arbeitgröße der Reibung gleich der obigen lebendigen Kraft sein muß. Legt der Körper einen Weg von s^m zurück, so ist hiernach:

$$\mu Q s = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2$$

$$s = \frac{v^2}{2 \mu g}.$$

Hieraus werden die übrigen Werthe t und j auf die gewöhnliche Weise gefunden.

8. Eine Locomotive besitzt in dem Augenblicke, wo der Dampf abgesperrt wird, eine Geschwindigkeit von $11{,}3^m$. Welchen Weg legt dieselbe zurück, wenn $\mu = 0{,}004$ gesetzt wird, welche Zeit gebraucht die Maschine dazu?

$s = 1628^m$ und $t = 288$ Secunden.

9. Ein Eisenbahnzug von 250 Tonnen bewegt sich auf einer horizontalen Eisenbahn mit $9{,}5^m$ Geschwindigkeit. Rechnet man hierbei die zur Ueberwindung der Reibung nothwendige Kraft zu 3 Kilogramm auf die Tonne Gewicht, so fragt es sich, welche Arbeitgröße muß die Locomotive entwickeln, um den Zug 2 Meilen weit mit der angegebenen Geschwindigkeit fortzuschaffen?

1 Tonne = 20 Centner = 1000 Kilogramm.

1 Meile = 7500^m.

$L = F s = 11250000^{km}$.

10. Eine Locomotive von 15 Tonnen Gewicht legt in einer Stunde 2,14 Meilen zurück. Welche Arbeitgröße muß sie entwickeln, um in der nächsten Stunde 5,54 Meilen zu machen?

$$L = \frac{1}{2} M (v_2^2 - v_1^2) = 86700^{km}.$$

11. Ein Körper von dem Gewichte Q auf einer geneigten Ebene, deren Neigungswinkel α sein mag, liegend, bewegt sich gleitend abwärts. Bezeichnen wir den Reibungscoefficienten mit μ, so ist die bewegende Kraft:

$$Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha,$$

die zu bewegende Masse $\frac{Q}{g}$, daher die Acceleration der Bewegung:

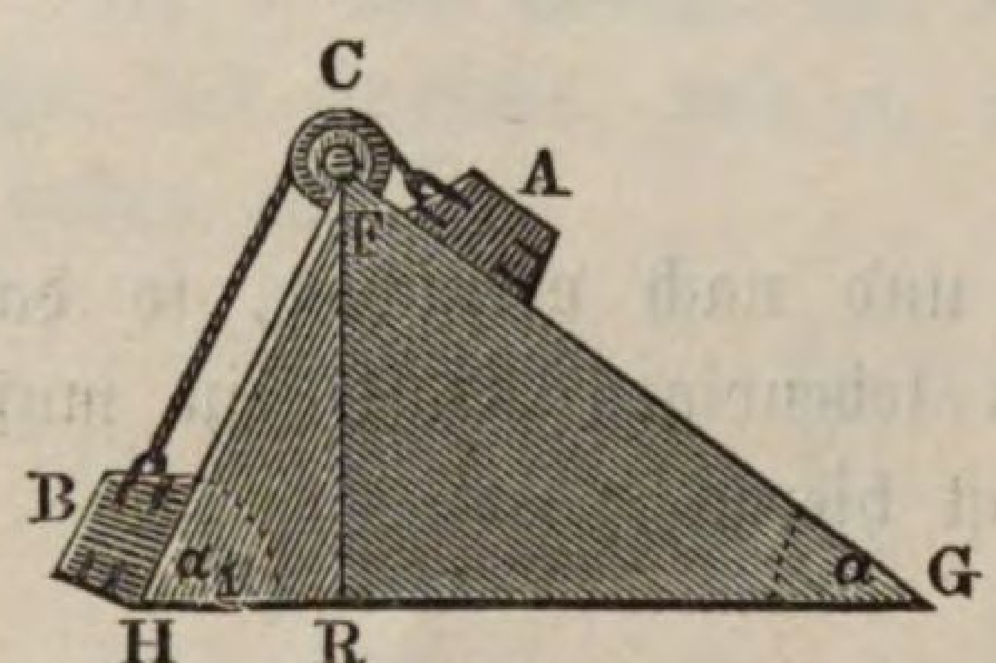
$$j = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Die Bewegung ist also eine gleichmäßig veränderliche; die nach t Secunden erlangte Endgeschwindigkeit v, sowie der zurückgelegte Weg s finden sich demnach aus den bekannten Formeln:

$$v = j\,t; \quad s = \frac{1}{2} j\,t^2.$$

12. Auf zwei schiefen Ebenen (Fig. 286) mit den Neigungswinkeln α und α_1 finden sich zwei Körper A und B von dem Gewichte P_1 und P_2. Dieselben sind durch ein Seil, das über eine feste Rolle C geführt ist, mit einander verbunden, und die Anordnung ist so getroffen, daß der eine Körper beim Herabgleiten den zweiten in die Höhe ziehen kann.

Fig. 286.



Das Seil setzen wir als unausdehnbar voraus, so daß die beiden Körper mit demselben eine feste Verbindung vorstellen. Nehmen wir an, daß P_1 sinkt, so besteht die bewegende Kraft aus der Resultante der bewegenden Kräfte von P_1 und P_2, wenn wir das Gewicht des Seiles vernachlässigen. Die Acceleration j der Bewegung findet sich:

$$j = \frac{P}{M},$$

wobei zu beachten, daß für eine eintretende Bewegung die Acceleration des Gewichtes P_1 gleich der entgegengesetzten des Gewichtes P_2 ist.

Der Coefficient der Reibung auf den Ebenen sei μ.

Für diese Annahmen ist:

$$j = g \frac{P_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - P_2 (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1)}{P_1 + P_2}$$

$$v = j\,t \text{ und } s = \frac{1}{2} j\,t^2.$$

Die Spannung S des Seiles geht aus der gegenseitigen Zerstörung der ursprünglichen Kräfte mit den Gegenkräften der Bewegung hervor, sie ist daher:

$$S = P_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \frac{P_1}{g} j$$

oder

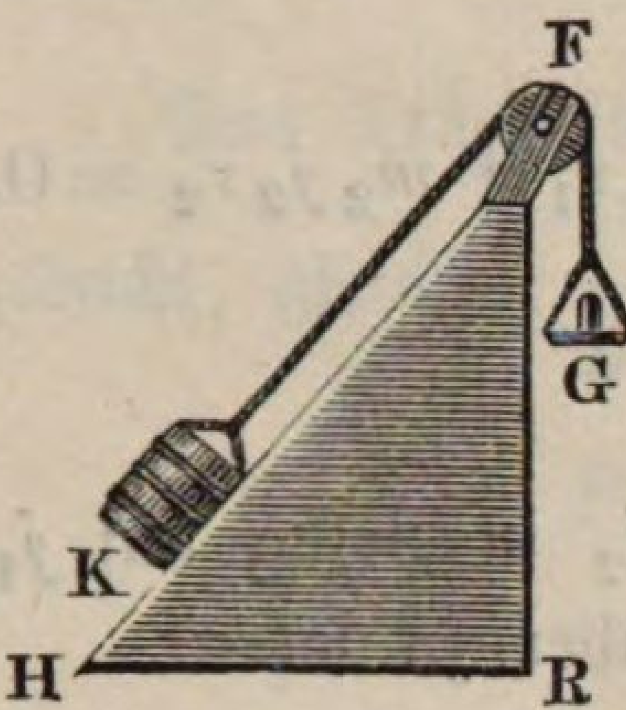
$$= P_2 (\sin\alpha_1 + \mu \cos\alpha_1) + \frac{P_2}{g} j$$

$$S = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} [\sin\alpha + \sin\alpha_1 - \mu (\cos\alpha - \cos\alpha_1)].$$

13. Wir lassen die eine der Ebenen in eine verticale (Fig. 287) übergehen, setzen also $\alpha = 90°$, so ist:

$$j = g \frac{P_1 - P_2(\sin\alpha_1 + \mu \cos\alpha_1)}{P_1 + P_2}$$

Fig. 287.



$$S = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (1 + \sin\alpha_1 + \mu \cos\alpha_1).$$

Wird die andere der Ebenen dabei horizontal, so ist $\alpha_1 = 0$ zu setzen. In diesem Falle erhalten wir:

$$j = g \frac{P_1 - \mu P_2}{P_1 + P_2}$$

$$S = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (1 + \mu).$$

Gehen beide Ebenen in verticale über, so erhalten wir Resultate, welche bei der Atwood'schen Fallmaschine Anwendung finden (Nr. 17).

$$j = g \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}$$

$$S = 2 \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

14. Die beiden Körper P_1 und P_2 mögen auf den beiden geneigten Ebenen durch zwei Seile gehalten werden, die sich um zwei feste Rollen von den Halbmessern r_1 und r_2 wickeln. Die Rollen sitzen auf einer Welle und die Seile sind den schiefen Ebenen parallel.

Wie groß sind die Accelerationen j_1 und j_2 bei einer stattfindenden Bewegung?

Wie groß sind die Spannungen S_1 und S_2 der Seile?

$$j_1 = g \frac{P_1 r_1^2 (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) - P_2 r_1 r_2 (\sin\alpha_1 + \mu \cos\alpha_1)}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2}$$

$$j_2 = \frac{r_2}{r_1} j_1$$

$$S_1 = \frac{P_1 P_2}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2} [r_2^2 (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) + r_1 r_2 (\sin\alpha_1 + \mu \cos\alpha_1)]$$

$$S_2 = \frac{r_1}{r_2} S_1.$$

Läßt man die beiden geneigten Ebenen in verticale übergehen, so erhalten wir die für das Rad an der Welle geltenden Werthe (Nr. 27).

15. Wir wollen Aufgabe 14 durch das d'Alembert'sche Princip lösen:

Bei jeder Bewegung sind die ursprünglichen Kräfte mit den Gegenkräften im Gleichgewicht.

Führen wir statt der Gewichte P_1 und P_2 die Massen m_1 und m_2 ein, so sind die Gegenkräfte, in Richtung der Seile wirksam, gleich

$$-m_1 j_1 \text{ und } -m_2 j_2.$$

Von den Gewichten P_1 und P_2 kommen die Componenten

$$m_1 g (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) \text{ und } m_2 g (\sin\alpha_1 + \mu \cos\alpha_1)$$

in Betracht.

Diese vier Kräfte müssen im Gleichgewicht sein, und zwar um die geometrische Achse der Rollen, d. h. die Summe der Momente für dieselbe muß gleich Null sein.

$$m_1 g (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) r_1 - m_2 g (\sin\alpha_1 + \mu\cos\alpha_1) r_2 - m_1 j_1 r_1 + m_2 j_2 r_2 = 0.$$

Es ist aber in absoluter Hinsicht:

$$j_1 : j_2 = r_1 : r_2.$$

Für den Fall, daß P_1 sinkt und P_2 steigt, ist aber j_2 in Bezug auf j_1 negativ zu nehmen, statt j_2 ist in der obigen Gleichung daher zu setzen:

$$j_2 = -j_1 \frac{r_2}{r_1}$$

$$m_1 g (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) r_1 - m_2 g (\sin\alpha_1 + \mu\cos\alpha_1) r_2 - j_1 \left(m_1 r_1 + m_2 \frac{r_2^2}{r_1}\right) = 0$$

$$j_1 = \frac{m_1 g (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) r_1^2 - m_2 g (\sin\alpha_1 + \mu\cos\alpha_1) r_1 r_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}.$$

In dem zu P_1 gehörigen Seile zerstören sich die Kräfte:

$$m_1 g (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \text{ und } m_1 j;$$

die Resultante ist daher gleich der Spannung S_1 des Seiles:

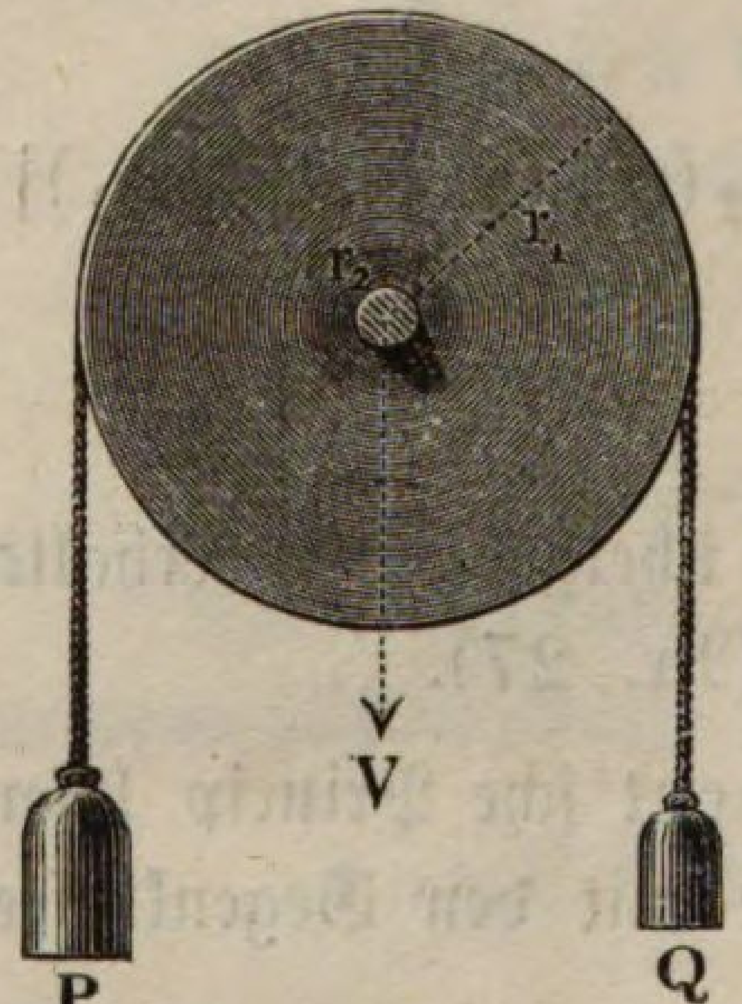
$$S_1 = m_1 g (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_1 j$$

$$S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2} [r_2^2 (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + r_1 r_2 (\sin\alpha_1 + \mu\cos\alpha_1)] g$$

$$j_2 = j_1 \frac{r_2}{r_1} \text{ und } S_2 = \frac{r_1}{r_2} S_1.$$

16. Ein Seil ist über eine feste Rolle (Fig. 288) gelegt und trägt an seinen Enden die Gewichte P und Q. Es sind die Bewegungsverhältnisse zu ermitteln für die Voraussetzung $P > Q$. Das Gewicht der Rolle sei V, der Halbmesser derselben r_1, der Halbmesser des Zapfens r_2, der Reibungscoefficient für die Zapfenreibung sei μ, der Durchmesser des Seiles δ.

Fig. 288.



Von allen Nebenhindernissen abstrahirt, ist die Acceleration j:

$$j = g \frac{P - Q}{P + Q}.$$

Bei Berücksichtigung der Zapfenreibung und der Steifigkeit des Seiles ist:

$$j = g \frac{P - \left(Q \frac{r_1 + \psi \delta^2}{r_1} + \mu \frac{r_2}{r_1}(P + Q + V)\right)}{P + Q}.$$

Wird auch noch auf den Massenwiderstand der Rolle Rücksicht genommen, so ist:

$$j = g \frac{P - \left(Q \frac{r_1 + \psi \delta^2}{r_1} + \mu \frac{r_2}{r_1}(P + Q + V)\right)}{P + Q + \frac{Tg}{{r_1}^2}}.$$

Das Trägheitsmoment T der Rolle ist, dieselbe als eine volle Scheibe gedacht, gleich $\frac{1}{2} \frac{V}{g} {r_1}^2$, die Acceleration ist daher für diese Annahme:

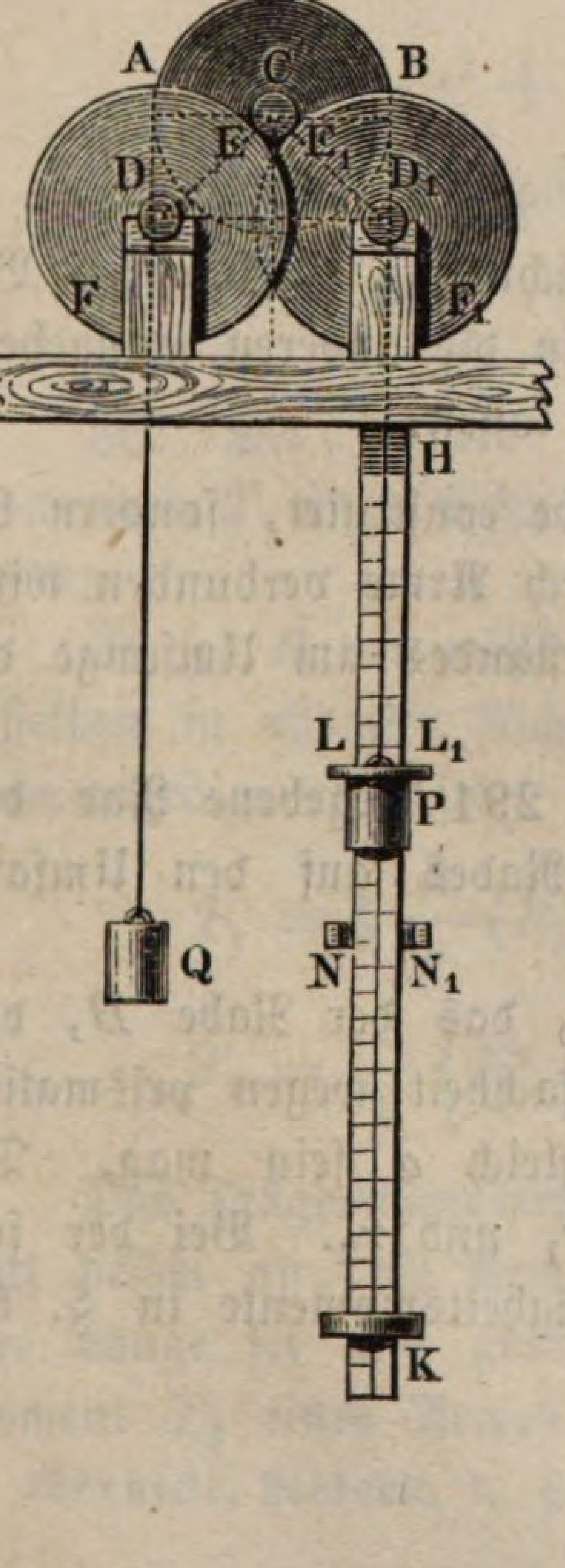
$$j = g \frac{P - \left(Q \frac{r_1 + \psi \delta^2}{r_1} + \mu \frac{r_2}{r_1}(P + Q + V)\right)}{P + Q + \frac{1}{2} V}.$$

Der durchlaufene Weg s und die Zeitdauer t der Bewegung ergeben sich auf bekannte Weise aus den Formeln:

$$s = \frac{v^2}{2j} \text{ und } t = \frac{v}{j}.$$

17. Der Apparat in 16. kann zur Bestimmung von g benutzt werden, wenn j durch Versuche gefunden ist. In dieser Anwendung nennt man das Instrument die Atwood'sche Fallmaschine (Fig. 289). Dieselbe ist gewöhnlich so gut gearbeitet, daß man Reibung, Steifigkeit des Seiles und Rollenmassenwiderstand vernachlässigen kann. Bei Anwendung derselben ist daher die Formel

Fig. 289.



$$j = g \frac{P - Q}{P + Q}$$

zu Grunde zu legen.

Der eine Körper Q, habe ein Gewicht von 0,8 Kilogramm, der andere, P, sei um 0,04 Kilogramm schwerer. Wie groß ist die Acceleration?

$$j = 0{,}24^m.$$

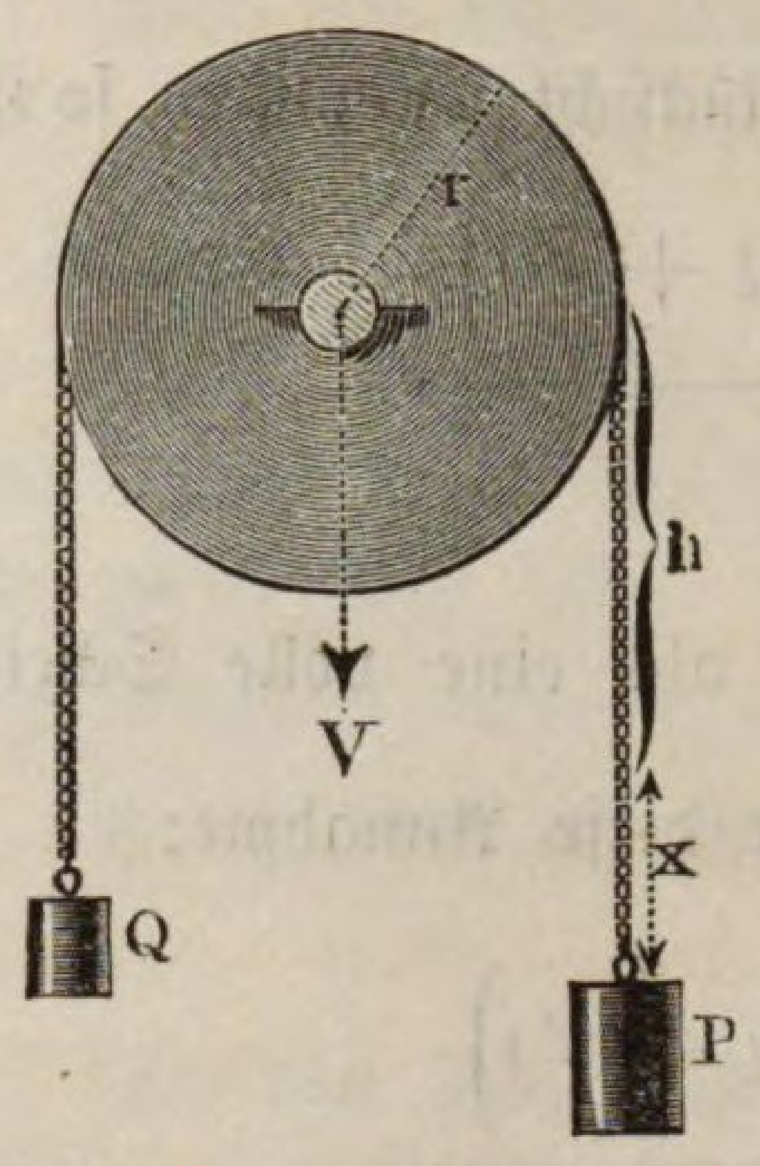
Der schwere Körper habe ein Gewicht von 2,5 Kilogramm, und die Acceleration während der Bewegung sei $0{,}13^m$. Wie schwer ist der leichtere Körper einzurichten?

$$Q = 2{,}434^k.$$

18. In den vorigen Aufgaben ist stets das Gewicht des Seiles vernachlässigt worden. Denken wir die Gewichte P und Q an einer

eisernen Kette (Fig. 290) hängend, die sich um die feste Rolle legt, so kommen zu der bewegenden Kraft in jedem Moment neue Kettenstücke als Ueberschuß hinzu, während das Gegengewicht sich in gleichem Maße verringert.

Fig. 290.



Der Halbmesser der Rolle sei r, die Kettenlänge sei $\pi r + l$, die Längeneinheit derselben habe ein Gewicht von a Kilogramm. Wir lassen die Nebenhindernisse außer Betracht, und nehmen das frei herunterhängende Kettenstück, an dem P wirksam ist, zu Anfang der Bewegung, von der Länge h an.

Es mag P während einer gewissen Zeit einen Weg gleich $\pm x$ zurücklegen, je nachdem P sinkt oder steigt.

Die bewegende Kraft ist in diesem Falle:

$$P + a(h \pm x) - (Q + [l - (h \pm x)]\,a) = P - Q - a\,l + 2\,a\,(h \pm x).$$

Die bewegte Masse ist, unter V das Gewicht der Rolle verstanden:

$$\frac{P + Q + a(l + \pi r) + \frac{1}{2} V}{g}.$$

Der Quotient aus der bewegenden Kraft und der bewegten Masse liefert die Acceleration der Bewegung. In dem Ausdrucke für die bewegende Kraft findet sich der von P zurückgelegte Weg $\pm x$, dessen Größe von der Zeitdauer der Bewegung abhängig ist. Die Acceleration ist daher veränderlich, ebenfalls von der Zeit abhängig:

$$j = \frac{P - Q - a\,l + 2\,a\,(h \pm x)}{P + Q + a(l + \pi r) + \frac{1}{2} V}\,g.$$

Hiernach haben wir es hier mit einer ungleichmäßig veränderten Bewegung zu thun, so daß sich mit unseren Hülfsmitteln die anderen maßgebenden Größen der Bewegung v, s, t nicht bestimmen lassen.

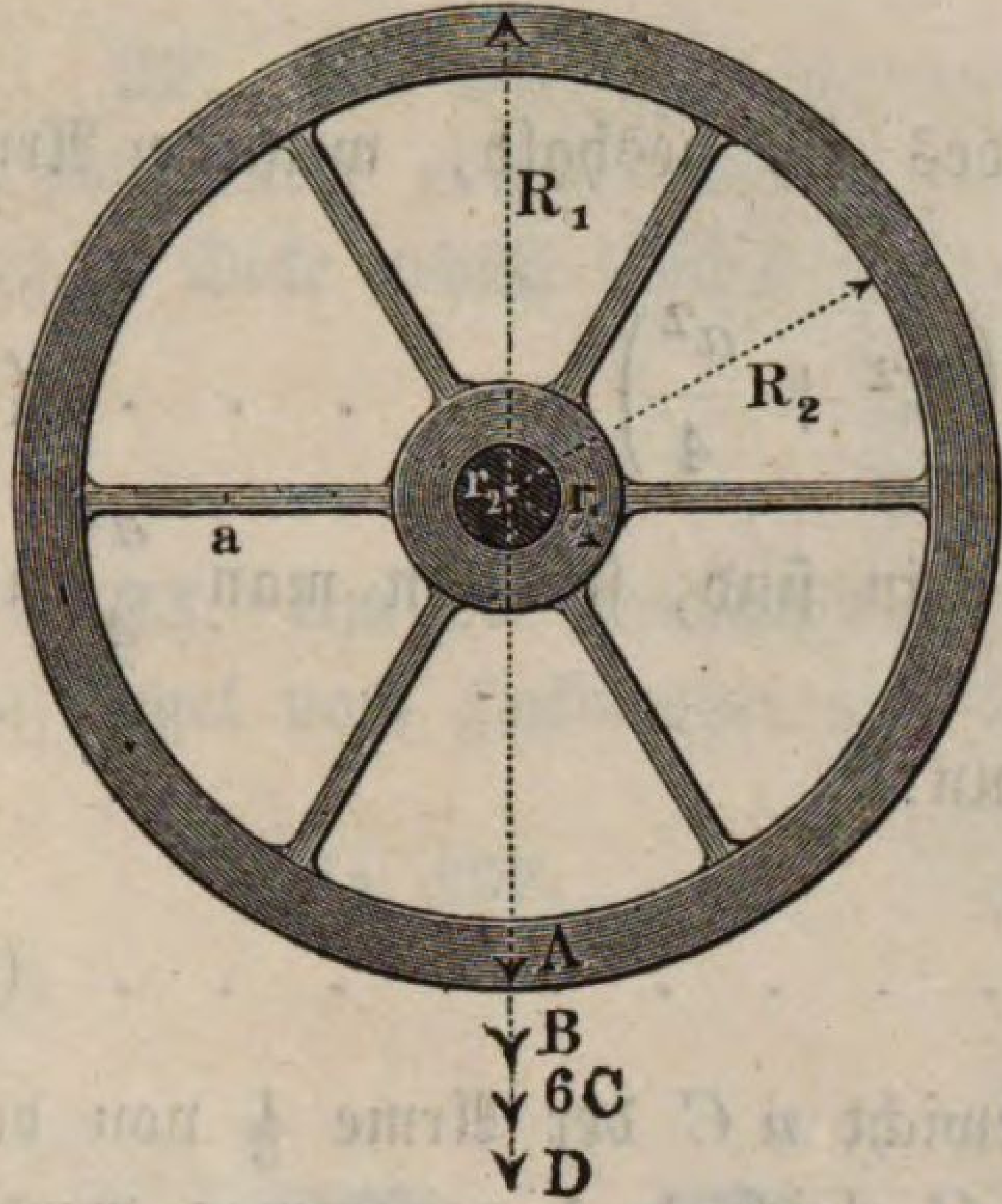
19. Ist die feste Rolle nicht als volle Scheibe construirt, sondern besteht sie aus einem Kranze, der mit der Nabe durch Arme verbunden wird, so ist darauf bei der Bestimmung des Massenwiderstandes am Umfange der Scheibe Rücksicht zu nehmen.

Beispielsweise wollen wir für das in Fig. 291 gegebene Rad das Trägheitsmoment bestimmen, und die Masse des Rades auf den Umfang reduciren.

Es sei das Gewicht des äußeren Kranzes A, das der Nabe B, das eines Armes C. Die Arme nehmen wir der Einfachheit wegen prismatisch von quadratischem Querschnitt an, dessen Seite gleich a sein mag. Die Halbmesser seien der Reihe nach gleich R_1, R_2, r_1 und r_2. Bei der folgenden Bestimmung legen wir die Tabelle der Trägheitsmomente in §. 58 zu Grunde.

Die Drehachse sehen wir als die Achse an, auf welche die Trägheitsmomente bezogen werden sollen. Für diesen Fall ist das Trägheitsmoment T des ganzen Rades gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Theile:

Fig. 291.



$$T = T_1 + T_2 + 6\,T_3$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{A}{g}\,(R_1{}^2 + R_2{}^2)$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{B}{g}\,(r_1{}^2 + r_2{}^2).$$

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines Armes ist ersichtlich, daß derselbe um eine Achse schwingt, die parallel einer Kante a ist. Die Länge eines Arms ist $R_2 - r_1$, für T_3 erhalten wir daher:

$$T_3 = \tfrac{1}{12}\,\frac{C}{g}\,[a^2 + (R_2 - r_1)^2] + \frac{C}{g}\left(\frac{R_2 + r_1}{2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{12}\,\frac{C}{g}\,[a^2 + (R_2 - r_1)^2 + 3\,(R_2 + r_1)^2].$$

Hiernach ist das Trägheitsmoment des Rades

$$T = \frac{1}{2\,g}\Big[A\,(R_1{}^2 + R_2{}^2) + B\,(r_1{}^2 + r_2{}^2)$$
$$+ C\,[a^2 + (R_2 - r_1)^2 + 3\,(R_2 + r_1)^2]\Big].$$

Die auf den Umfang reducirte Masse aber ist gleich:

$$\frac{T}{R_1{}^2}.$$

20. Der in der vorigen Aufgabe entwickelte Werth des Trägheitsmomentes T eines Schwungrades soll zur praktischen Verwendung vereinfacht werden.

Es sei R der mittlere Halbmesser des Schwungringes und b die Breite desselben in radialer Richtung, dann ist bei Voraussetzung eines rechteckigen Schwungringquerschnitts:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{A}{g}\,(R_1{}^2 + R_2{}^2) = \tfrac{1}{2}\,\frac{A}{g}\left[\left(R + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{b}{2}\right)^2\right]$$

$$T_1 = \frac{A}{g}\left(R^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Das Trägheitsmoment T_2 der Nabe vernachlässigen wir ganz und nehmen statt dessen an, die Arme reichten bis zum Mittelpunkte des Schwungrades, ihre Länge sei also gleich R. Für diese Voraussetzung ist das Trägheitsmoment T_3 eines Armes:

$$T_3 = \tfrac{1}{12}\frac{C}{g}(a^2 + R^2) + \frac{C}{g}\left(\frac{R}{2}\right)^2 \text{ oder:}$$

$$T_3 = \tfrac{1}{3}\frac{C}{g}\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right).$$

Das Trägheitsmoment des Schwungrades ist deshalb, wenn n Arme vorhanden,

$$T = \frac{A}{g}\left(R^2 + \frac{b^2}{4}\right) + \tfrac{1}{3}\frac{nC}{g}\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Da b und a gegen R verhältnißmäßig klein sind, so kann man $\frac{a^2}{4}$ und $\frac{b^2}{4}$ gegen R^2 vernachlässigen, und es ist dann:

$$T = \frac{R^2}{g}(A + \tfrac{1}{3} n C) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

In den gewöhnlichen Fällen ist das Gewicht $n\,C$ der Arme $\frac{1}{3}$ von dem Gewicht A des Schwungringes, weshalb $\frac{1}{3}\,n\,C$ gleich $\frac{1}{9}\,A$ genommen werden kann. Wir setzen der Sicherheit wegen $\frac{1}{3}\,n\,C$ gleich 0,1 A und erhalten schließlich das Trägheitsmoment T des Schwungrades:

$$T = 1{,}1\,\frac{A}{g}R^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

worin A das Gewicht des Schwungringes bedeutet.

21. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Schwungrades, für welches $A = 5000^k$, $B = 500^k$, $C = 250^k$, $R_1 = 3{,}45^m$, $R_2 = 3{,}3^m$, $r_1 = 0{,}104^m$, $r_2 = 0{,}052^m$. Es sind sechs Arme vorhanden, deren Querschnitt ein Rechteck von der Breite $0{,}078^m$ und der Höhe $0{,}104^m$ sein mag.

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\frac{A}{g}(R_1{}^2 + R_2{}^2) = \frac{56981{,}25}{g}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\frac{B}{g}(r_1{}^2 + r_2{}^2) = \frac{3{,}38}{g}$$

$$T_3 = \tfrac{1}{12}\frac{nC}{g}\left(a^2 + (R_2 - r_1)^2\right) + \frac{nC}{g}\left(\frac{R_2 + r_1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1278{,}15}{g} + \frac{4345{,}2}{g} = \frac{5623{,}35}{g}$$

$$T = \frac{62607{,}98}{g} = 6382.$$

Bei Benutzung der in der vorigen Aufgabe entwickelten Formeln erhält man:

$$T = \frac{56981{,}25}{g} + \frac{5696{,}66}{g} = \frac{62677{,}91}{g} = 6389 \quad . \; . \quad (1)$$

$$T = \frac{62648{,}44}{g} = 6386 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$T = \frac{62648{,}44}{g} = 6386 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

und die auf den mittleren Radius R reducirte Masse

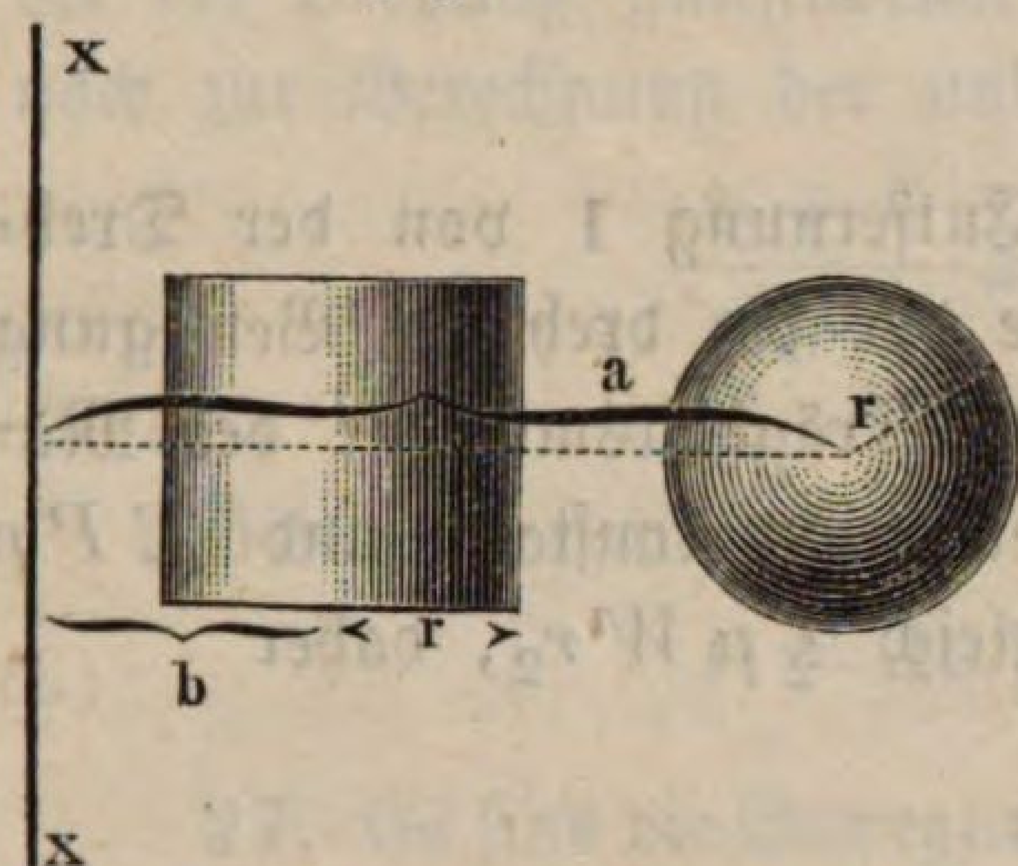
$$M = \frac{T}{R^2} = 560{,}6.$$

22. Ein Schwungring mit den Halbmessern a_1 und b_1 und der Dicke c_1 soll durch einen anderen ersetzt werden von den Halbmessern a_2 und b_2. Welche Dicke erhält derselbe?

$$\frac{a_1^4 - b_1^4}{a_2^4 - b_2^4} \cdot c_1.$$

23. Um die Drehachse $x\,x$ (Fig. 292) drehe sich in der Entfernung a die Kugel vom Halbmesser r. Diese soll durch einen normalen Cylinder mit kreisförmiger Basis ersetzt werden, so daß die Bewegungsverhältnisse nicht geändert werden.

Fig. 292.



Der Cylinder soll in einer Entfernung b von der Drehachse angebracht werden und eine solche Lage erhalten, daß seine geometrische Achse parallel der Achse $x\,x$ ist. Der Halbmesser der Basis mag dieselbe Größe r behalten. Die Höhe x des Cylinders ist für diese Bestimmung:

$$x = \tfrac{8}{15}\, r \cdot \frac{2\, r^2 + 5\, a^2}{r^2 + 2\, b^2}.$$

24. Auf einer stehenden Welle vom Halbmesser r_1 und der Länge l befindet sich normal zur Achse der Welle eine volle kreisförmige Scheibe vom Halbmesser R. Die Maschine ist durch eine Kraft in rotirende Bewegung versetzt worden und hat die Winkelgeschwindigkeit ω erhalten. Wird die bewegende Kraft plötzlich außer Thätigkeit gesetzt, so wird sich die Bewegung verlangsamen und die Maschine endlich stillstehen.

a) In welcher Zeit erfolgt dasselbe?

b) Wie viel Umdrehungen geschehen in dieser Zeit?

Die aufgenommene Arbeitgröße ist:

$$\tfrac{1}{2}\, \omega^2\, T.$$

Die verzögernde Kraft ist die Reibung am unteren Zapfen. Ist der Halbmesser des unteren Zapfens r_2, so ist das Moment der Reibung, wenn μ den Reibungscoefficienten und W das Gewicht der Maschine bezeichnet, n. §. 47 A, 2, b gleich

(1) $$\tfrac{1}{2}\, \mu\, W\, r_2.$$

Hieraus ergiebt sich die Größe der Reibung am Zapfenumfange gleich

(2) $$\tfrac{1}{2}\, \mu\, W.$$

Während der noch fortdauernden Bewegung mag ein Punkt des Zapfenumfanges den Weg s zurücklegen, so ist die Arbeitgröße der Reibung:

(3) $$\tfrac{1}{2}\, \mu\, W s.$$

Diese muß die vorhandene Arbeitgröße verbrauchen, daher haben wir:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega^2\,T = \tfrac{1}{2}\,\mu\,W\,s$$

$$s = \frac{\omega^2}{\mu\,W}\,T.$$

Andererseits ist, wenn j die Acceleration der verzögerten Bewegung am Umfange des Zapfens bezeichnet:

$$s = \frac{r_2^2\,\omega^2}{2\,j}$$

$$\frac{r_2^2\,\omega^2}{2\,j} = \frac{\omega^2}{\mu\,W}\,T$$

$$j = \tfrac{1}{2}\,\frac{r_2^2\,\mu\,W}{T}.$$

Zu dem Werthe von j gelangt man unmittelbar n. F. 125:

$$\iota = \frac{\Sigma\,P\,p}{T},$$

worin ι die veränderliche Acceleration in der Entfernung 1 von der Drehachse, $\Sigma\,P\,p$ die Summe der statischen Momente der die drehende Bewegung bewirkenden oder verzögernden Kräfte und T das Trägheitsmoment der Maschine bezeichnet. In unserem Falle ist die Acceleration constant und $\Sigma\,P\,p$ das Moment der Reibung am unteren Zapfen gleich $\tfrac{1}{2}\,\mu\,W\,r_2$, daher

$$\iota = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mu\,W}{T}\,r_2$$

und die Acceleration am Umfange des Zapfens:

$$j = \tfrac{1}{2}\,\frac{\mu\,W}{T}\,r_2^2.$$

Die Zeitdauer t der Bewegung ist:

$$t = 2\,\frac{\omega\,T}{\mu\,W\,r_2}.$$

Die Anzahl x der Umdrehungen, die noch geschehen mögen, findet sich aus der Gleichung $2\,\pi\,r_2\,x = \tfrac{1}{2}\,r_2\,\omega\,t$:

$$x = \tfrac{1}{2}\,\frac{\omega^2\,T}{\mu\,\pi\,r_2\,W}.$$

25. Die Welle habe eine Länge von 3^m und die Scheibe eine Stärke von $0{,}104^m$. Welche numerischen Werthe erhalten t und x, wenn

$$R = 2{,}2^m,\; r_1 = 0{,}052^m,\; r_2 = 0{,}033^m,\; \mu = 0{,}075$$

gesetzt wird, und 40 Umdrehungen in einer Minute von der Maschine gemacht werden?

Es ist:

$$\frac{T}{W} = \frac{8112\,r_1^2 + 503079\,(R^2 + r_1^2)}{2\,g\,.\,511191} = \frac{1218142{,}3}{511191\,.\,g} = \frac{2{,}3}{g}$$

$$\omega = 0{,}1047\,.\,40,$$

daher:

$$t = 999 \text{ Secunden}$$

$$x = 333 \text{ Umdrehungen.}$$

26. Auf derselben Drehachse befinden sich zwei Scheiben von den Halbmessern $2,4^m$ und $1,6^m$. Ueber die erste derselben ist eine vollkommen biegsame Schnur gelegt, die an ihren Enden Gewichte gleich 4 und 6 Kilogramm trägt. Welche Gewichte muß man an der andern Scheibe anbringen, damit die Bewegungsverhältnisse dieselben bleiben, wenn die zuerst wirksamen Gewichte fortgenommen werden?

Es ist, die beiden unbekannten Gewichte mit P und Q bezeichnend, die bewegende Kraft $P - Q$, und die zu bewegende Masse $\frac{P+Q}{g}$. Die Bewegungsverhältnisse sollen durch Umänderung der Gewichte dieselben bleiben, das ist nur möglich, wenn die Trägheitsmomente der Massen und wenn die Arbeitgrößen der bewegenden Kräfte unverändert bleiben. Bezeichnen wir die bei der Drehung stattfindende Winkelgeschwindigkeit mit ω, so haben wir hiernach zur Berechnung der unbekannten Gewichte folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{4+6}{g} \cdot 2{,}4^2 = \frac{P+Q}{g} \cdot 1{,}6^2$$

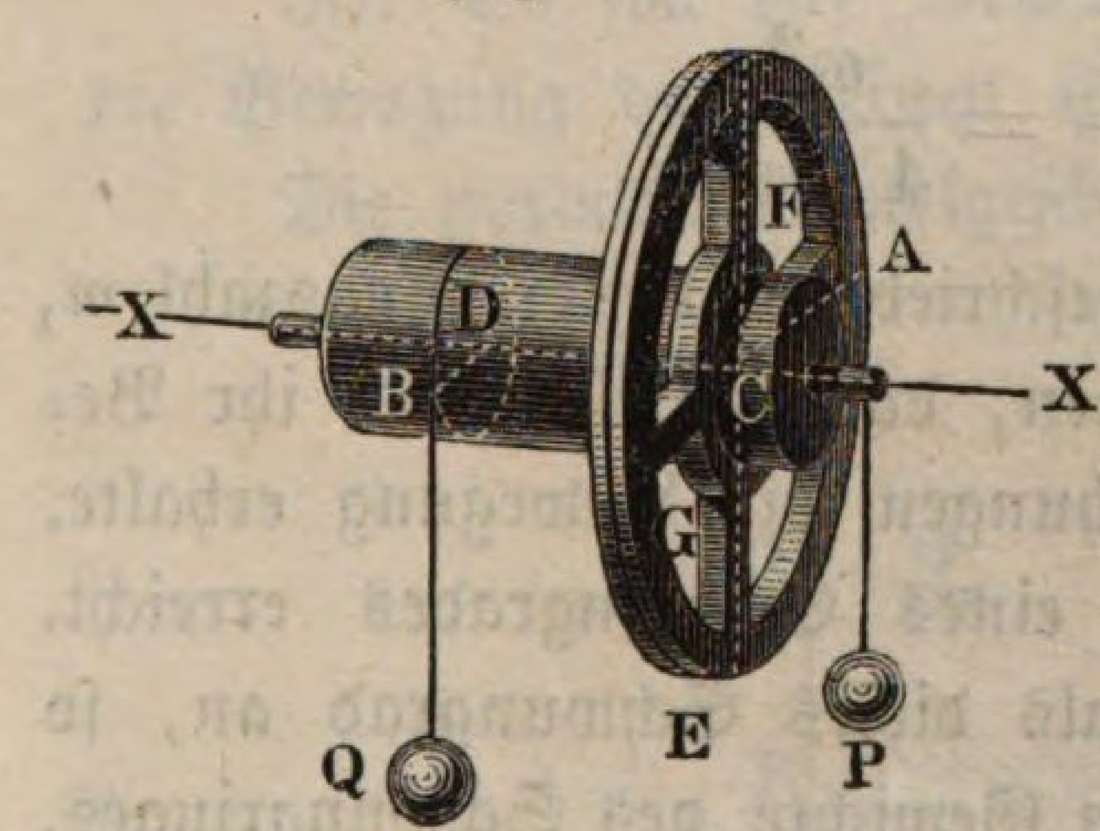
$$(6-4)\, 2{,}4 \,.\, \omega = (P-Q) \,.\, 1{,}6 \,.\, \omega.$$

Hieraus erhält man

$$P = 12{,}75^k, \; Q = 9{,}75^k.$$

27. Es sind die Bewegungsverhältnisse für ein Rad an der Welle (Fig. 293) zu untersuchen, das zum Heben von Lasten benutzt wird. Die zu hebende Last betrage Q Kilogramm, die vorhandene Kraft sei ein Gewicht von P Kilogramm. Kraft und Last mögen an vollkommen biegsamen Schnüren wirken, deren Gewicht nicht berücksichtigt wird. Das Rad, mit Armen und Nabe construirt, habe den mittleren Halbmesser R, die Welle den Halbmesser r und deren Zapfen den Halbmesser ϱ. Das Gewicht des Kranzes sei A, das der Arme und Nabe $\frac{1}{3}\, A$ und das Gewicht der Welle B Kilogramm.

Fig. 293.



Nehmen wir an, daß $PR > Qr$, so kann P sinken, und die Last Q wird gehoben. Die Beschleunigungen der beiden Gewichte seien j_1 und j_2, die zu einer Umdrehung der Maschine nothwendige Zeit sei t, dann ist $2\, R\, \pi = \frac{1}{2} j_1\, t^2$ und $2\, r\, \pi = \frac{1}{2} j_2\, t^2$, daher:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{R}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$j_1 = \frac{P - Q\frac{r}{R} - \mu\left(P + Q + \frac{4}{3}\, A + B\right)\frac{\varrho}{R}}{P + Q\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{Tg}{R^2}}\, g \quad \ldots \quad (2)$$

unter T das Trägheitsmoment der ganzen Maschine verstanden,

$$T = 1{,}1 \frac{A}{g} R^2 + \tfrac{1}{2} \frac{B}{g} r^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

nach Nr. 20 dieser Uebungen.

Die Spannung S_1 des Seiles, an dem P wirksam

$$S_1 = P - \frac{P}{g} j_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Spannung S_2 des anderen Seiles

$$S_2 = Q + \frac{Q}{g} j_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Der Druck D auf die Zapfen ist demnach, abgesehen von dem Gewichte der Maschine:

$$D = S_1 + S_2 = P + Q - j_1 \left(\frac{P}{g} - \frac{Q}{g} \cdot \frac{r}{R} \right) \quad \ldots \quad (6)$$

also kleiner als in dem Zustande des Gleichgewichtes.

28. In dem vorigen Apparat denken wir die Gewichte P und Q durch mechanische Kräfte P und Q ersetzt, und nehmen an, daß die Kraft P, nachdem sie der Maschine eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit ω beigebracht hat, plötzlich zu wirken aufhöre. Das Ueberwinden von Q geschieht von diesem Augenblick an mit gleichmäßig verzögerter Bewegung, bis die Maschine in Ruhe kommt, was nach m Umdrehungen erfolgen mag, während u die Anzahl der zur Winkelgeschwindigkeit ω gehörigen Umdrehungen bezeichnet. Für diese Annahme ist:

$$j_2 = \frac{Q + \mu (Q + \frac{4}{3} A + B) \frac{\varrho}{r}}{T : r^2} = \frac{\omega^2}{4 \pi m} r.$$

Diese Gleichung liefert ein Mittel, bei vorgeschriebener Umdrehungszahl m, die Größe der zu bewegenden Masse zu bestimmen, damit diese durch ihr Beharrungsvermögen noch während der m Umdrehungen die Bewegung erhalte. In der Praxis wird dies durch Anordnung eines Schwungrades erreicht. Sehen wir das vorgelegte Rad an der Welle als dieses Schwungrad an, so ist obige Gleichung zur Berechnung von A, dem Gewichte des Schwungringes, zu benutzen. Die Reibungswiderstände können hierbei den Massenwiderständen gegenüber vernachlässigt werden. Die obige Gleichung geht hiernach in folgende über:

$$\frac{Q r}{T} = \frac{\omega^2}{4 \pi m}.$$

Die dem statischen Momente $Q r$ und der Winkelgeschwindigkeit ω entsprechende Anzahl, zu übertragender Pferdestärken sei N, dann ist in der obigen Gleichung:

$$\omega = 0{,}1047 \,.\, u \text{ und}$$

$$Q r = 716 \frac{N}{u},$$

nach Formel 64 zu setzen, und wir erhalten:

$$T = \frac{4\pi m}{(0{,}1047\,u)^2} \cdot 716 \frac{N}{u} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 716}{0{,}1047^2} \frac{N}{u^3} m.$$

Es war aber $T = 1{,}1 \frac{A}{g} \cdot R^2 + \frac{1}{2} B r^2$, und mit Vernachlässigung des Trägheitsmomentes der Welle ergiebt sich das Gewicht A des Schwungringes zu:

$$A = \frac{10 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 716 \cdot 9{,}81}{11 \cdot 0{,}1047^2} m \frac{N}{R^2 u^3}$$

$$A = 7319900 \cdot m \cdot \frac{N}{R^2 u^3}.$$

29. Es sei nach den vorigen Formeln das Gewicht des Schwungrades einer Schneidemühle zu berechnen. Zum Betriebe derselben sind 7 Pferdestärken nöthig, wobei das Sägegatter 80 Hube in einer Minute macht. Das Gewicht des Schwungrades soll der Bedingung genügen, daß die Betriebswelle des Gatters nach dem plötzlichen Ausrücken der Kraftwelle vermöge ihres Beharrungsvermögens noch fünf Umdrehungen mache. Der äußere Halbmesser des Schwungrades sei $0{,}889^m$, der innere $0{,}798^m$.

Es ist:

$$R = \frac{0{,}889 + 0{,}798}{2} = \frac{1{,}687}{2} = 0{,}843^m;\ u = 80;\ m = 5$$

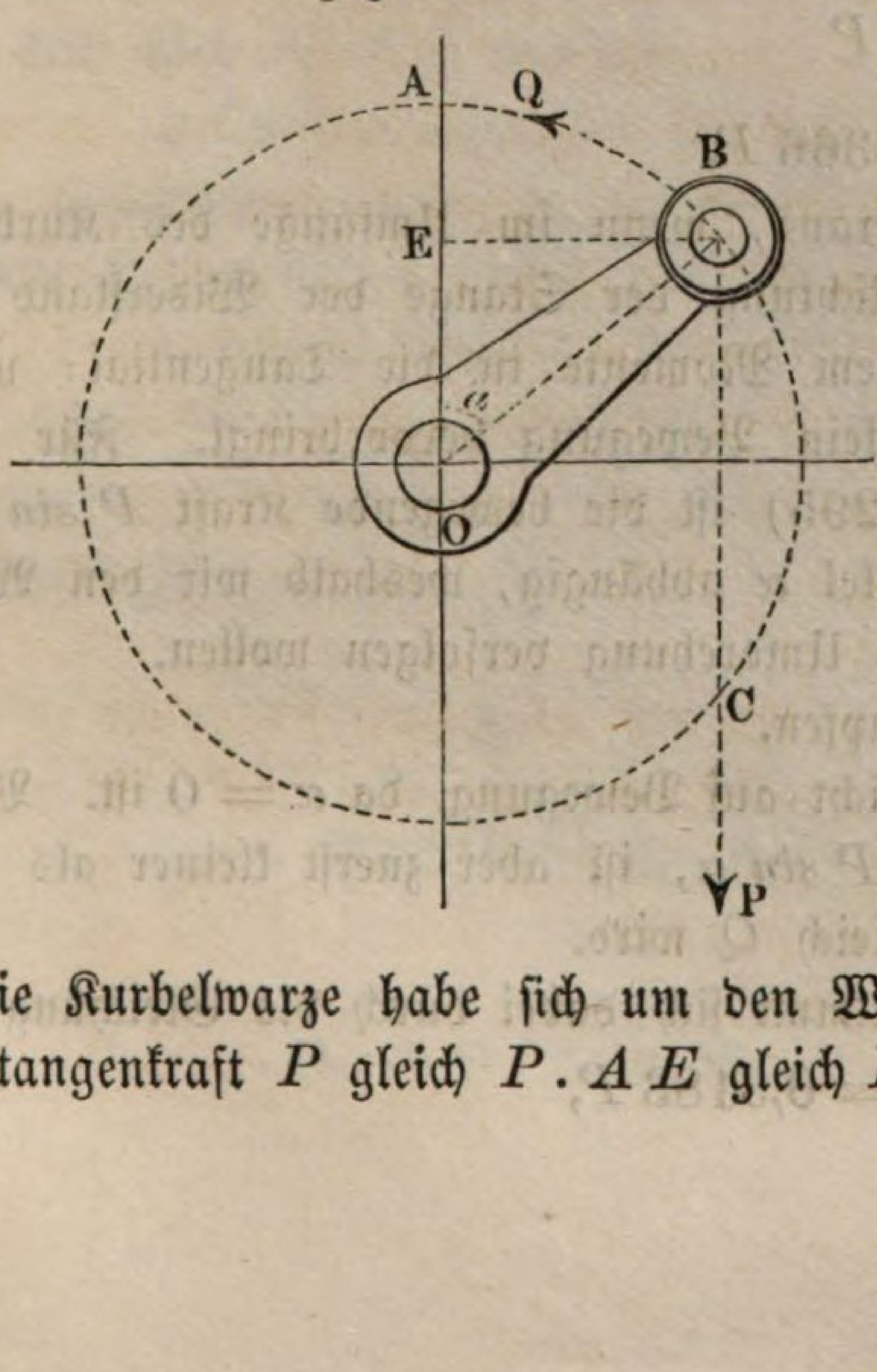
$N = 7$; daher:

$$A = \frac{7319900 \cdot 5 \cdot 7}{0{,}843^2 \cdot 80^3} = 704 \text{ Kilogramm.}$$

30. Es soll das Gewicht eines Schwungrades bestimmt werden, wenn die Bewegung durch einen Krummzapfen übertragen wird.

Die normale Winkelgeschwindigkeit der Schwungradwelle sei ω, der größte Werth derselben sei ω_2, der kleinste ω_1, wobei die Differenz dieser Grenzgeschwindigkeiten $\frac{1}{a}$ von der normalen ω sein soll. Die Länge $O\,B$ (Fig. 294) des Krummzapfens sei r, die Lenkstange $B\,C$ behalte während der ganzen Umdrehung die verticale Lage, was sich annähernd als richtig annehmen läßt, da ihre Länge gewöhnlich mehr als das Fünffache des Kurbelarmes beträgt. Der in der Lenkstange wirksame constante Druck sei P, der auf den Kurbelkreis reducirte Widerstand sei Q.

Fig. 294.



Die Kurbelwarze habe sich um den Winkel α gedreht, so ist die Arbeit der Stangenkraft P gleich $P \cdot A\,E$ gleich $P\,r\,(1 - \cos\alpha)$, die Arbeit des Wider-

standes Q dagegen $Q r \alpha$. Ist das Trägheitsmoment des Schwungrades T, die Winkelgeschwindigkeit zu Anfang der Bewegung ω_1, die zu Ende der Bewegung dagegen ω_2, so ist die lebendige Kraft zur Ueberwindung des Massenwiderstandes $\frac{1}{2} T (\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

Der Ueberschuß der Arbeit der Betriebskraft P, über die Arbeit des Widerstandes Q, muß zur Erzeugung der in der Schwungmasse nothwendigen lebendigen Kraft genügen. Demnach erhalten wir, von der Reibung und dem Massenwiderstande der Lenkstange und Kurbel abgesehen:

$$P r (1 - \cos \alpha) - Q r \alpha = \frac{1}{2} T (\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Nach einer vollständigen Umdrehung müssen beide Kräfte P und Q gleiche Arbeitgrößen verrichten, da für den normalen Gang der Maschine dieselbe Geschwindigkeit nothwendig ist, nach einer Umdrehung also, weder die Arbeit von P noch die von Q überwiegend sein darf. Die Arbeit des Widerstandes Q ist, wenn die Warze des Krummzapfens den ganzen Kreis durchlaufen hat, $2 r \pi Q$, die Arbeit der Kraft P ist entweder $2 r P$ oder $4 r P$, jenachdem dieselbe bloß während des Niederganges oder während des Niederganges und Aufsteigens der Kurbel wirksam ist. Hiernach nennt man die Krummzapfen einfach- oder doppeltwirkend. Die ersteren finden sich z. B. bei Schneidemühlen, Drehbänken, die doppeltwirkenden bei Dampfmaschinen.

Wir erhalten hiernach:

a. Für einfach wirkende Krummzapfen:

$$2 r P - 2 r \pi Q = 0$$

$$Q = \frac{1}{\pi} P$$

$$Q = 0{,}3183 \, P.$$

b. Für doppelt wirkende Krummzapfen:

$$4 r P - 2 r \pi Q = 0$$

$$Q = \frac{2}{\pi} P$$

$$Q = 0{,}6366 \, P.$$

Dasselbe Verhältniß stellt sich heraus, wenn im Umfange des Kurbelkreises die Betriebskraft Q und in Richtung der Stange der Widerstand P wirksam ist. Wir zerlegen P in jedem Momente in die Tangential- und Normalkraft, von denen die erstere allein Bewegung hervorbringt. Für die angenommene Lage der Kurbel (Fig. 295) ist die bewegende Kraft $P \sin \alpha$. Die Größe derselben ist von dem Winkel α abhängig, weshalb wir den Weg der Kurbelwarze während einer ganzen Umdrehung verfolgen wollen.

a. Für einfach wirkende Krummzapfen.

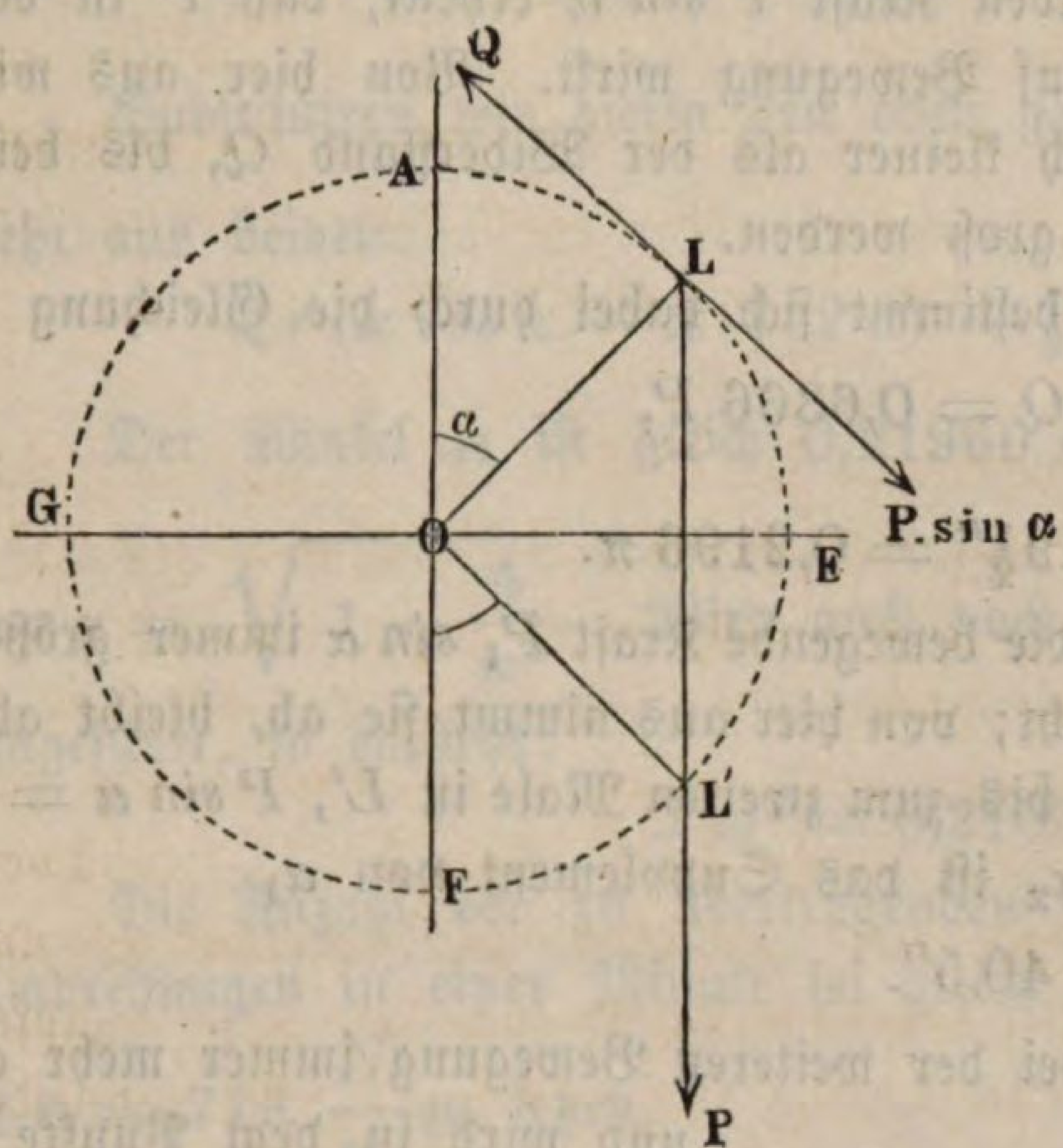
In dem Punkte A wirkt P gar nicht auf Bewegung, da $\alpha = 0$ ist. Von hier aus wächst die bewegende Kraft $P \sin \alpha$, ist aber zuerst kleiner als Q, bis sie für einen gewissen Punkt L gleich Q wird.

Die Lage des Krummzapfens bestimmt sich dabei durch die Gleichung:

$$P \sin \alpha_1 = Q = 0{,}3183 \, P,$$

woraus $\alpha_1 = 18^\circ\, 33'\, 36{,}5'' = 0{,}103\,\pi$. Von L aus wird $P \sin \alpha$ immer größer, erreicht in dem Punkte E seinen größten Werth gleich P, nimmt von hier aus wieder ab, bleibt aber zuerst noch größer als Q, bis es für den Punkt L' zum zweiten Male gleich Q wird. Der hierzu gehörige Winkel α_2 ist das Supplement von α_1:

Fig. 295.



$$\alpha_2 = 161^\circ\, 26'\, 23{,}5''.$$

Bei der weiteren Bewegung nimmt die bewegende Kraft immer mehr ab, bis sie in dem Punkte F wieder zu 0 wird.

Was die Bewegung selbst anbetrifft, so wird sie zwischen L und L' beschleunigt sein, da die bewegende Kraft $P \sin \alpha$ den Widerstand Q überragt. Die Geschwindigkeit ist demnach in L am kleinsten, in L' am größten und nimmt von hier aus wieder allmälig ab, bis sie in L von Neuem ihren kleinsten Werth erreicht. Wird auf der Welle einer einfach wirkenden Kurbel ein Schwungrad angebracht, so ist hiernach das Gewicht desselben der Bedingung gemäß zu bestimmen, »daß der Zuwachs an lebendiger Kraft für die äußersten Grenzen der Geschwindigkeit gleich der Arbeitgröße der beiden Kräfte P und Q werde,« wenn die Kurbelwarze den Weg $L\,E\,L'$ oder den Weg $L'\,G\,L$ zurücklegt. Bezeichnen wir die größte Geschwindigkeit mit ω_2, die kleinste mit ω_1, so ist für den Weg $L\,E\,L'$:

$$2\,P\,r \cos \alpha - Q\,r\,(\pi - 2\,\alpha) - \tfrac{1}{2}\,T\,(\omega_2^2 - \omega_1^2) = 0,$$

für den Weg $L'\,G\,L$ dagegen:

$$2\,P\,r\,(1 - \cos \alpha) - Q\,r\,(\pi - 2\,\alpha) - \tfrac{1}{2}\,T\,(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0.$$

Substituiren wir in diesen beiden Gleichungen den oben gefundenen Werth $P = \pi\,Q$, so entsteht aus beiden

$$Q\,r\,(2\,\pi \cos \alpha - \pi + 2\,\alpha) - \tfrac{1}{2}\,T\,(\omega_2^2 - \omega_1^2) = 0.$$

Wir führen den oben für α gefundenen Werth ein, der der geringsten Geschwindigkeit entspricht, und drücken ω_2 und ω_1 durch die normale Winkelgeschwindigkeit ω aus. Es ist

$$\sin \alpha = \frac{1}{\pi}, \text{ daher } \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}}$$

$$\alpha = 0{,}103\,\pi,\ \omega_2 = \omega + \frac{1}{2\,a}\,\omega$$

und

$$\omega_1 = \omega - \frac{1}{2\,a}\,\omega.$$

Nach Substitution dieser Werthe entsteht

$$T\omega^2 = 1{,}102\, Q\, \pi\, a\, r.$$

b. Für doppelt wirkende Krummzapfen:

Aus dem Werthe der bewegenden Kraft $P \sin \alpha$ erhellt, daß P in dem Punkte A (Fig. 296) gar nicht auf Bewegung wirkt. Von hier aus wird $P \sin \alpha$ größer, ist aber immer noch kleiner als der Widerstand Q, bis beide für einen gewissen Punkt L gleich groß werden.

Die Lage des Krummzapfens bestimmt sich dabei durch die Gleichung

$$P \sin \alpha_1 = Q = 0{,}6366\, P,$$

woraus

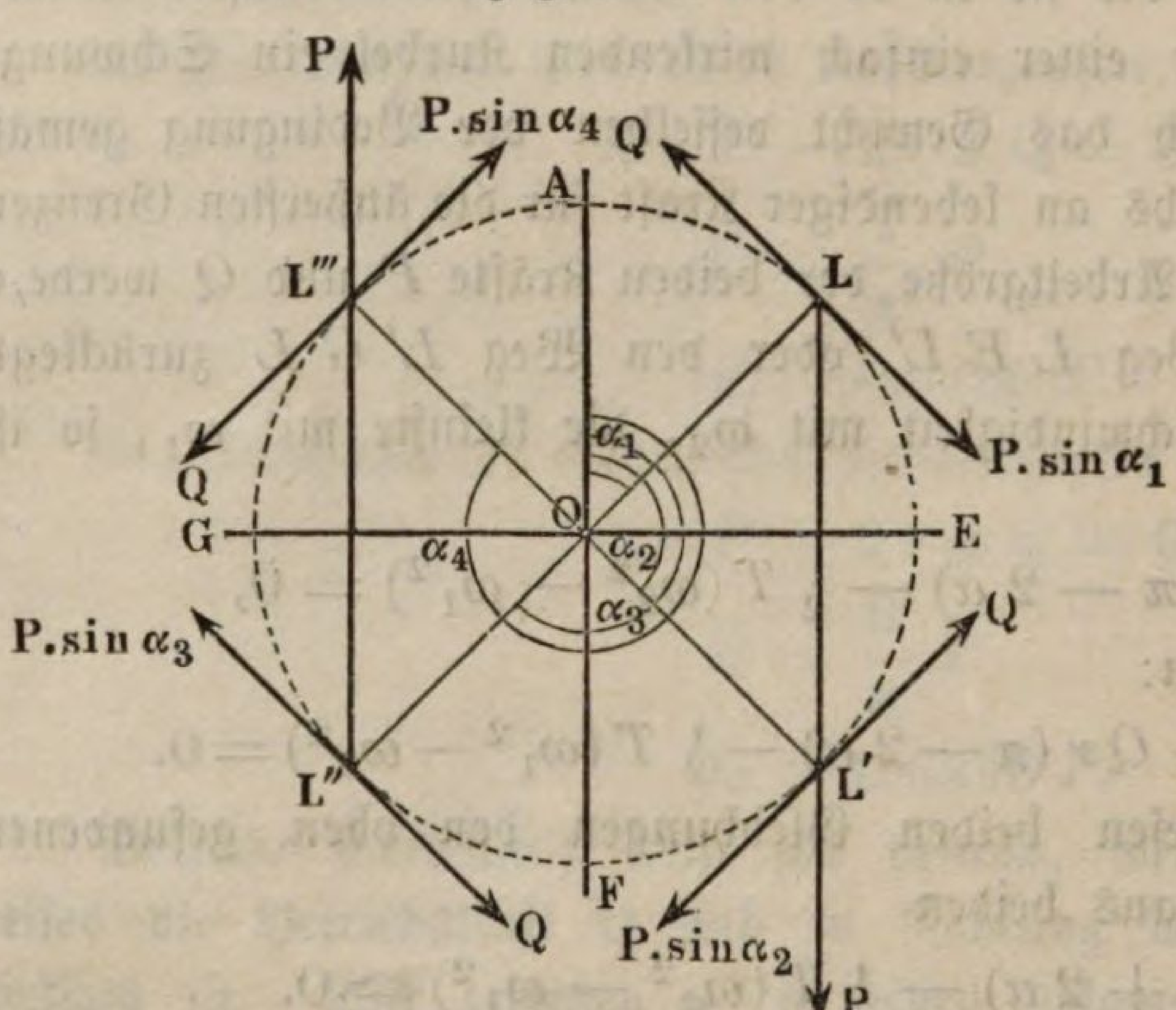
$$\alpha_1 = 39^\circ\, 32'\, 19\tfrac{1}{2}'' = 0{,}2196\, \pi.$$

Von diesem Punkte aus wird die bewegende Kraft $P_1 \sin \alpha$ immer größer, bis sie in E ihr Maximum P erreicht; von hier aus nimmt sie ab, bleibt aber noch größer als der Widerstand Q, bis zum zweiten Male in L', $P \sin \alpha = Q$ wird; der hierzu gehörige Winkel α_2 ist das Supplement von α_1

$$\alpha_2 = 140^\circ\, 27'\, 40{,}5''.$$

Die bewegende Kraft nimmt bei der weiteren Bewegung immer mehr ab, und wird in dem Punkte F zu Null. Während der zweiten Hälfte der Umdrehung wiederholt sich das Spiel von Neuem. Im Punkte L'' für $\alpha_3 = 219^\circ\, 32'\, 19{,}5''$ ist $P \sin \alpha = Q$, in G wird $P \sin \alpha = P$, in L''' wird $P \sin \alpha$ zum letzen Male $= Q$ für $\alpha_4 = 320^\circ 27' 40{,}5''$, und endlich wird die bewegende Kraft, zum Ausgangspunkte A zurückgekehrt, wieder zu Null.

Fig. 296.



Was die Bewegung selbst anbetrifft, so ist sie zwischen L und L' beschleunigt, zwischen L' und L'' verzögert, zwischen L'' und L''' beschleunigt und zwischen L''' und L verzögert, so daß sich in L und L'' die geringste Geschwindigkeit, in L' und L''' die größte Geschwindigkeit findet.

Soll demnach auf der Welle eines doppelt wirkenden Krummzapfens ein Schwungrad angebracht werden, so ist dessen Gewicht der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß der Zuwachs an lebendiger Kraft für die Grenzen der Geschwindigkeit gleich der von P und Q verrichteten Arbeit werde, wenn die Kurbelwarze den Weg $L\,E\,L'$ oder $L'\,F\,L''$ oder $L''\,G\,L'''$ oder $L'''\,A\,L$ zurücklegt.

Legen wir dieselben Bezeichnungen wie oben zu Grunde, so erhalten wir für die verschiedenen Wege die beiden Gleichungen:

$$2\,P\,r\cos\alpha - Q\,r\,(\pi - 2\,\alpha) - \tfrac{1}{2}\,T\,(\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2) = 0$$

$$2\,P\,r\,(1 - \cos\alpha) - 2\,Q\,r\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,T\,(\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2) = 0.$$

Substituiren wir hierin den oben gefundenen Werth $P = \frac{\pi}{2}\,Q$, so entsteht aus beiden:

$$Q\,r\,(\pi\cos\alpha - \pi + 2\,\alpha) - \tfrac{1}{2}\,T\,(\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2) = 0.$$

Der Winkel α ist gleich 0,21966 π zu nehmen, $\sin\alpha = \frac{2}{\pi}$, daher $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}$. Wird auch noch die normale Winkelgeschwindigkeit ω eingeführt, so entsteht:

$$T\,\omega^2 = 0{,}2105\,Q\,\pi\,a\,r.$$

Die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken sei N, die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute sei gleich u, so ist in den gefundenen Formeln $Q\,r = 716\,\frac{N}{u}$ zu setzen.

Ersetzen wir weiter ω durch $0{,}1047\,.\,u$ und benutzen für das Trägheitsmoment T den in Aufgabe 20 entwickelten Werth $1{,}1\,\frac{A}{g}\,R^2$, unter A das Gewicht des Schwungringes, unter R dessen mittleren Halbmesser verstanden, so ergiebt sich:

a. Für einfach wirkende Krummzapfen:

$$A = \frac{1{,}102\,.\,716\,.\,\pi\,.\,9{,}81}{1{,}1\,.\,0{,}1047^2}\,a\,\frac{N}{u^3\,R^2} = 2020000\,a\,\frac{N}{u^3\,R^2}.$$

b. Für doppelt wirkende Krummzapfen:

$$A = \frac{0{,}2105\,.\,716\,.\,\pi\,.\,9{,}81}{1{,}1\,.\,0{,}1047^2}\,a\,\frac{N}{u^3\,R^2} = 385200\,a\,\frac{N}{u^3\,R^2}.$$

Für Dampfmaschinen pflegt man durchschnittlich $a = 32$ zu nehmen. Für Hammerwerke ist $a = 5$; für Pumpen und Schneidemühlen ist $a = 11$ bis 25; für Mahlmühlen ist $a = 30$; für Webestühle und Papiermaschinen ist $a = 35$ und für Spinnereien ist $a = 40$ bis 100 je nach der Feinheit der herzustellenden Gewebe in Rechnung zu bringen.

31. Eine Dampfmaschine soll 25 Pferdestärken übertragen und die Betriebswelle dabei 30 Umdrehungen in einer Minute machen. Welches Gewicht erhält der Schwungring bei $3{,}8^m$ mittlerem Halbmesser?

$$A = 385200\,.\,32\,\frac{25}{3{,}8^2\,.\,30^3} = 790^k.$$

32. Die Anziehung zwischen zwei Körpern geht von allen Punkten aus, und zwar sind die einzelnen anziehenden Kräfte parallel zu denken, so daß der

Angriffspunkt ihrer Resultante in dem Schwerpunkte der Körper liegt, wo man auch zugleich die Masse des Körpers vereinigt denken muß. Stellen wir uns zwei Körper von den Massen M und m vor, die eine kugelförmige Gestalt und deren Mittelpunkte die Entfernung R haben, so ist die Anziehung n. §. 121
(Masse mal Acceleration)
zu berechnen.

Der Körper von der Masse m ertheilt dem anderen eine Acceleration, die der allgemeinen Gravitation zufolge gleich

$$f\frac{m}{R^2}$$

sein wird, unter f einen constanten Factor verstanden, den wir noch bestimmen müssen.

Ebenso ist die Acceleration, die der Masse m ertheilt wird, gleich

$$f\frac{M}{R^2}.$$

Die gegenseitige Anziehung selbst, d. h. die Anziehungskraft, ist daher:

$$Mf\frac{m}{R^2} \text{ oder } mf\frac{M}{R^2}.$$

Sehen wir den Körper von der Masse M als fest an, so wird der andere eine Acceleration erhalten, die gleich der Summe der oben angegebenen Accelerationen ist, gleich

$$\frac{f}{R^2}(M+m).$$

Ist M die Masse der Sonne und m die eines Planeten, so ist dieser Werth der Acceleration gleich dem in Nummer 46 der Uebungen des zweiten Abschnittes gefundenen zu setzen:

$$\frac{f}{R^2}(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{R^2 t^2}$$

$$f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{t^2}.$$

Hiernach scheint sich das durch das dritte Keppler'sche Gesetz bestimmte Verhältniß $\frac{a^3}{t^2}$, bei den verschiedenen Planeten zu ändern. Die Aenderung verschwindet jedoch für die Beobachtung, da die Masse m eines Planeten verschwindend klein gegen die Masse M der Sonne ist.

33. Zur Bestimmung des constanten Factors f wenden wir die letzte Formel auf die Bewegung eines Körpers von der Masse μ gegen die Erde, deren Masse m sein mag, an und berücksichtigen, daß für diesen Fall die Acceleration durch Beobachtungen gleich g gefunden worden ist. Bezeichnen wir den Halbmesser der Erde mit r, die Entfernung des Körpers von der Erdoberfläche mit e, so haben wir hiernach:

$$\frac{f}{(r+e)^2}(m+\mu) = g.$$

In diesem Ausdrucke ist μ gegen m, e gegen r verschwindend klein, so daß

$$\frac{f}{r^2} m = g$$

gesetzt werden kann.

Hieraus folgt der constante Factor f, der für alle Bewegungen im Weltsystem zur Anwendung kommt:

$$f = \frac{r^2}{m} g.$$

Ist hiernach g' die Acceleration an der Oberfläche irgend eines Planeten, dessen Masse m_1 und dessen Halbmesser r_1 sein mag, so haben wir:

$$f \frac{m_1}{{r_1}^2} = g'$$

$$\frac{r^2 m_1}{{r_1}^2 m} g = g'.$$

34. Es ist das Verhältniß der Masse m der Erde zu der M der Sonne zu bestimmen, wenn der Halbmesser der Erde gleich r_1, die halbe große Achse der Erdbahn gleich a, die Zeit einer vollständigen Bewegung gleich t gesetzt wird:

$$f(M + m) = \frac{4 \pi^2 a^3}{t^2}$$

$$g \frac{r^2}{m} (M + m) = \frac{4 \pi^2 a^3}{t^2}$$

$$\frac{M + m}{m} = \frac{4 \pi^2 a^3}{g r^2 t^2}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{4 \pi^2 a^3 - g r^2 t^2}{g r^2 t^2}$$

$$\frac{m}{M} = \frac{r^2 t^2}{4 \pi^2 a^3 - g r^2 t^2} g.$$

Die Massen sind den Gewichten proportional, so daß die Formel benutzt werden kann, das Gewicht und die Größe der Sonne zu bestimmen.

35. Die Masse m_1 irgend eines Planeten zu bestimmen, wenn m die Masse der Erde, r deren Halbmesser, M die Masse der Sonne, a_1 die halbe große Achse der Planetenbahn und t_1 die Zeit eines Umlaufes des betreffenden Planeten ist:

$$f(M + m_1) = \frac{4 \pi^2 {a_1}^3}{{t_1}^2}$$

$$g \frac{r^2}{m} (M + m_1) = \frac{4 \pi^2 {a_1}^3}{{t_1}^2}.$$

$$m_1 = m \frac{4 \pi^2 {a_1}^3}{g r^2 {t_1}^2} - M.$$

36. Ein Planet von der Masse m_1 habe einen Trabanten, dessen Masse

μ sein soll. Die halbe große Achse der Trabantenbahn sei α, die Zeit einer vollständigen Umdrehung τ; man soll die Masse μ des Trabanten bestimmen:

$$f(m_1 + \mu) = \frac{4\pi^2\alpha^3}{\tau^2}$$

$$g\frac{r^2}{m}(m_1 + \mu) = \frac{4\pi^2\alpha^3}{\tau^2}$$

$$m_1 + \mu = m\frac{4\pi^2\alpha^3}{g r^2 \tau^2}$$

$$\mu = m\frac{4\pi^2\alpha^3}{g r^2 \tau^2} - m_1.$$

37. In den bis jetzt entwickelten Formeln handelt es sich besonders um die Masse der Erde, da diese durch den constanten Factor f überall auftritt.

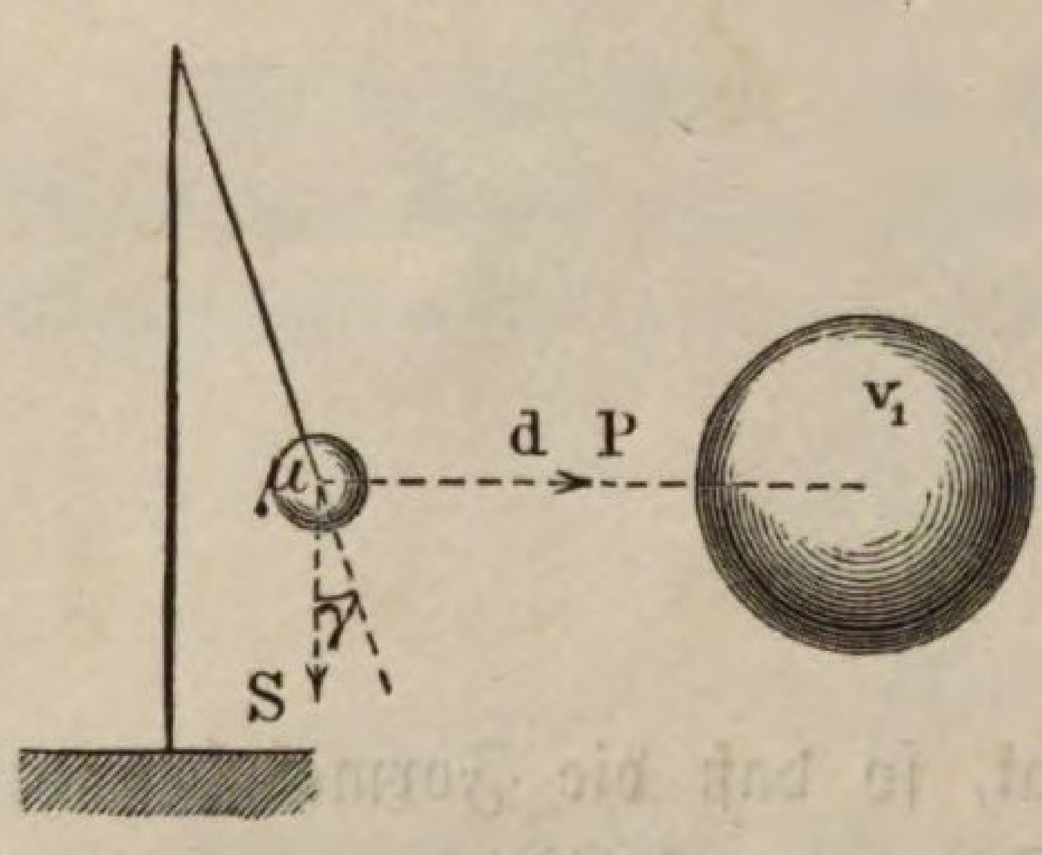
Sehen wir die Erde als eine vollkommene Kugel vom Halbmesser r an, für die wir überall eine mittlere Dichtigkeit annehmen wollen, so ist die Masse m der Erde, unter s das mittlere specifische Gewicht verstanden:

$$m = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\, 1000\, s}{g} = \frac{V}{g}1000\, s,$$

wenn V das Volumen der Erde bezeichnet, da 1 Kubikmeter Wasser 1000 Kilogramm wiegt.

Zur Bestimmung von s benutzt man wieder das Gesetz der allgemeinen Gravitation, indem man die Ablenkung, welche ein Bleiloth durch eine große Masse, z. B. einen benachbarten Berg erleidet, durch Beobachtung zu bestimmen sucht. Die Anziehung P (Fig. 297) des Berges denken wir von dessen Schwerpunkte aus nach horizontaler Richtung wirksam, die Anziehung S der Erde wirkt in verticaler Richtung. Hiernach haben wir:

Fig. 297.



$$tang\,\gamma = \frac{P}{S}.$$

Ist V_1 das Volumen des Berges, s_1 sein mittleres specifisches Gewicht, d die Entfernung der Bleikugel vom Schwerpunkte des Berges, μ die Masse der Bleikugel, so haben wir:

$$P = \mu f\frac{V_1\, 1000\, s_1}{g\, d^2}$$

$$S = \mu f\frac{V\, 1000\, s}{g\, r^2}$$

und

$$tang\,\gamma = \frac{V_1}{V}\frac{r^2}{d^2}\frac{s_1}{s}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich bei genauer Beobachtung von γ der Werth von s bestimmen, wodurch also die Masse der Erde, sowie die Masse der

Sonne und die der übrigen Planeten und Trabanten gefunden werden kann, wenn die anderen Größen a, α, t, τ u. s. w. bekannt sind.

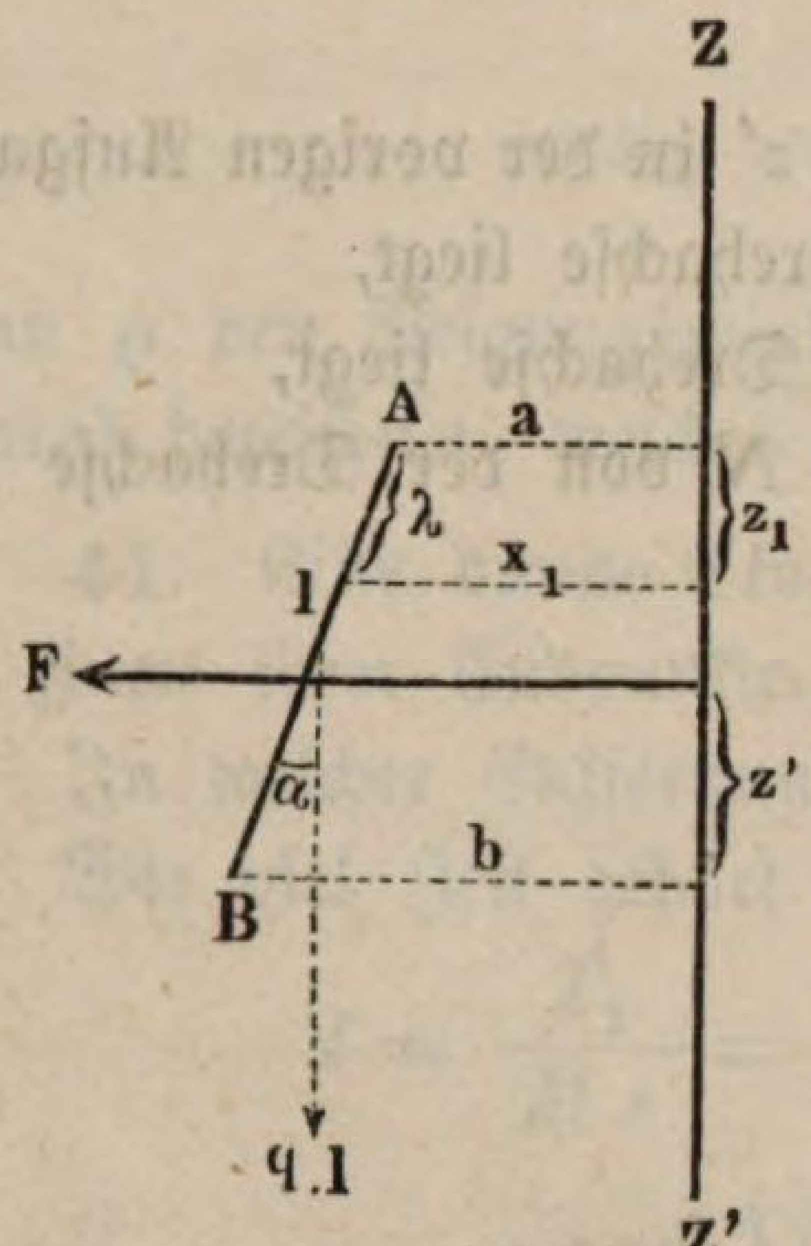
Maskelyne hat in Schottland durch diese Methode für s eine Zahl zwischen 4 und 5 gefunden. Genauere Versuche haben das mittlere specifische Gewicht der Erde gleich

5,6

ergeben.

38. Eine Stange AB (Fig. 298) von der Länge l und sehr kleinem constantem Querschnitte, so daß sie als Linie aus materiellen Punkten bestehend gedacht werden kann, drehe sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse ZZ'. Die Linie AB liege mit derselben in einer Ebene, und ihre Endpunkte haben die Entfernungen a und b von der Achse.

Fig. 298.



Es sind die Größe der Centrifugalkraft F sowie die Coordinaten ihres Angriffspunktes zu bestimmen.

Die Drehachse sei die Z-Achse, der Endpunkt B der Linie liege in der XY-Ebene, das Gewicht der Längeneinheit der Linie sei q Kilogramm.

Die Centrifugalkräfte sind einander parallel, daher besteht eine Mittelkraft, deren Werth F sich n. F. 129 findet:

$$F = M r \omega^2$$

$$M = \frac{l q}{g}; \; r = \frac{a+b}{2}, \text{ daher}$$

$$F = \omega^2 \frac{l q}{g} \cdot \frac{a+b}{2}.$$

Der Angriffspunkt bestimmt sich durch die Entfernung z':

$$z' = \frac{\Sigma m_1 x_1 z_1}{\Sigma m_1 x_1} = \frac{\frac{l q}{g n} \Sigma x_1 z_1}{\frac{l q}{g} \cdot \frac{a+b}{2}}$$

$$z' = \frac{2}{n} \frac{\Sigma x_1 z_1}{a+b}.$$

Es ist:

$$x_1 = a + \lambda \sin \alpha$$

$$z_1 = \lambda \cos \alpha$$

$$z' = \frac{2}{n} \frac{\Sigma (a \lambda \cos \alpha + \lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha)}{a+b}$$

$$= \frac{2 \cos \alpha}{n(a+b)} (a \Sigma \lambda + \sin \alpha \Sigma \lambda^2).$$

Für λ haben wir nach und nach zu setzen:

$$\frac{l}{n},\ 2\,\frac{l}{n},\ 3\,\frac{l}{n} \ldots n\,\frac{l}{n},$$

daher ist für n als sehr große Zahl:

$$\Sigma\lambda = \frac{l}{n}\cdot\tfrac{1}{2}\,n^2;\ \Sigma\lambda^2 = \frac{l^2}{n^2}\cdot\tfrac{1}{3}\,n^3$$

$$z' = \tfrac{1}{3}\,l\cos\alpha\,\frac{2\,a+b}{a+b}.$$

Hiernach liegt der Schwerpunkt des Paralleltrapezes $A\,B\,C\,D$ in der Richtung der Centrifugalkraft, nicht aber der Schwerpunkt der Linie selbst. Das letztere findet statt, wenn die Linie parallel der Drehachse oder normal zu derselben gerichtet ist.

39. Wie ändern sich die Ausdrücke für F und z' in der vorigen Aufgabe,

a. wenn der Endpunkt A der Linie in der Drehachse liegt,

b. wenn die Mitte M der Linie $A\,B$ in der Drehachse liegt,

c. wenn die Linie in einem beliebigen Punkte N von der Drehachse geschnitten wird.

a. $F = \omega^2\,\frac{l\,q}{g}\cdot\frac{b}{2}$

$z' = \tfrac{1}{3}\,l\cos\alpha,$

b. $F = 0,$

c. $F = \omega^2\,\frac{l\,q}{g}\cdot\frac{b-a}{2}$

$z' = \tfrac{1}{3}\,l\cos\alpha\,\frac{b-2\,a}{b-a}.$

40. Wir nehmen jetzt den allgemeineren Fall, daß die Linie $A\,B$ zur Drehachse windschief sei. Der Punkt A liege in der $X\,Y$-Ebene und habe die Coordinaten x' und y', der Punkt B liege in der $X\,Z$-Ebene und habe die Coordinaten x'', z. Die Linie bilde mit der Z-Achse den Winkel α:

$$z' = \frac{\Sigma m_1\,x_1\,z_1}{\Sigma m_1\,x_1} \text{ und } z'' = \frac{\Sigma m_1\,y_1\,z_1}{\Sigma m_1\,y_1}$$

$$z' = \tfrac{1}{3}\,l\cos\alpha\,\frac{2\,x''+x'}{x'+x''}$$

$$z'' = \tfrac{1}{3}\,l\cos\alpha.$$

Die aus den Centrifugalkräften resultirenden Drucke sind:

$$D' = \omega^2\,\Sigma m_1\,x_1 = \omega^2\,\frac{l\,q}{g}\cdot\frac{x'+x''}{2}$$

$$D'' = \omega^2\,\Sigma m_1\,y_1 = \omega^2\,\frac{l\,q}{g}\cdot\frac{y'}{2}.$$

Werden diese an den Schwerpunkt versetzt, so erhält man die Resultante F aus allen Centrifugalkräften:

$$F = \omega^2\,\frac{q}{g}\,\tfrac{1}{2}\,\sqrt{(x'+x'')^2+y'^2}.$$

Hierdurch bilden sich zu gleicher Zeit zwei Kräftepaare:

$$D' \, l \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \frac{2x'' + x'}{x' + x''} \right) = \tfrac{1}{12} \omega^2 \frac{lq}{g} (x' - x'') \, l$$

$$D'' \, l \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \right) = \tfrac{1}{12} \omega^2 \frac{lq}{g} y' \, l.$$

Wir sehen $\frac{1}{6} l$ als die gemeinschaftliche Breite der beiden Kräftepaare an und vereinigen die beiden Paare zu einem, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Paarebenen auf einander rechtwinkelig stehen.

Das neue Paar ist:

$$\tfrac{1}{6} l \, . \, \tfrac{1}{2} \omega^2 \frac{lq}{g} \sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2}$$

$$\cos \varrho = \frac{x' - x''}{\sqrt{(x' - x'')^2 + y'^2}},$$

wenn ϱ den Neigungswinkel der neuen Paarebene mit der Ebene desjenigen Paares bezeichnet, welches in einer zur XZ-Ebene parallelen Ebene liegt.

41. Eine dünne Stange von $3{,}3^m$ Länge und $0{,}375^k$ Gewicht schwingt um einen ihrer Endpunkte.

In welcher Entfernung findet sich der Schwingungsmittelpunkt?

Wie viel Zeit gehört zu einer Schwingung?

$$l = \frac{T_1}{M s} = \tfrac{2}{3} \, . \, 3{,}3 = 2{,}2^m$$

$$t = 1{,}003 \sqrt{\frac{T_1}{M s}} = 1{,}488 \text{ Secunden.}$$

42. Ein feiner Draht von 2^m Länge, der an seinem Ende eine Kugel von $\frac{1}{2}$ Kilogramm Gewicht von dem Halbmesser $0{,}02^m$ trägt, wird als Pendel benutzt.

In welcher Entfernung vom Aufhängepunkte findet sich der Schwingungsmittelpunkt?

Wie viel Schwingungen werden in 10 Secunden gemacht?

Um wie viel ist der Draht zu verkürzen, damit es ein Secundenpendel werde?

Der Schwingungsmittelpunkt fällt nahezu mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammen.

7 Schwingungen

Um 1^m circa.

43. Ein Pendel besteht aus einem parallelepipedischen Stabe mit rechteckigem Querschnitt und einer aus zwei congruenten Kugelabschnitten construirten Linse. Der Stab hat eine Länge von $a = 1{,}412^m$, eine Breite von $b = 0{,}026^m$ und eine Dicke von $c = 0{,}007^m$. Der Kugelhalbmesser sei $r = 0{,}157^m$, die Höhe eines Abschnittes $h = 0{,}039^m$, der Aufhängepunkt liege $0{,}065^m$ von dem einen Ende, die Mitte der Linse $0{,}092^m$ von dem andern Ende des Stabes entfernt. Das ganze Pendel sei aus Stahl gefertigt.

In welcher Entfernung vom Aufhängepunkte liegt der Schwingungsmittelpunkt?

Wie viel Schwingungen werden in 5 Minuten gemacht?

An welche Stelle des Stabes ist die Linse zu schieben, damit das Pendel ein Secundenpendel werde?

Bezeichnen wir mit M_1 die Masse eines Kugelabschnitts und mit M_2 die Masse der Stange, so ist:

$$T_1 = 2\,M_1 \left\{\tfrac{2}{3}\,h \left(r - \tfrac{5}{12}\,h + \tfrac{1}{90}\,\frac{h^2}{r - \frac{1}{3}\,h}\right) + 1{,}255^2\right\}$$

$$+ M_2 \left\{\tfrac{1}{12}\,(a^2 + b^2) + \left(\frac{1{,}412}{2} - 0{,}065\right)^2\right\}$$

$$M_1 = \tfrac{1}{3}\,\frac{\pi\,h^2\,(3\,r - h)\,\gamma}{g},\; M_2 = \frac{a\,b\,c\,\gamma}{g},$$

$$M s = 2\,M_1 . 1{,}255 + M_2\left(\frac{1{,}412}{2} - 0{,}065\right),$$

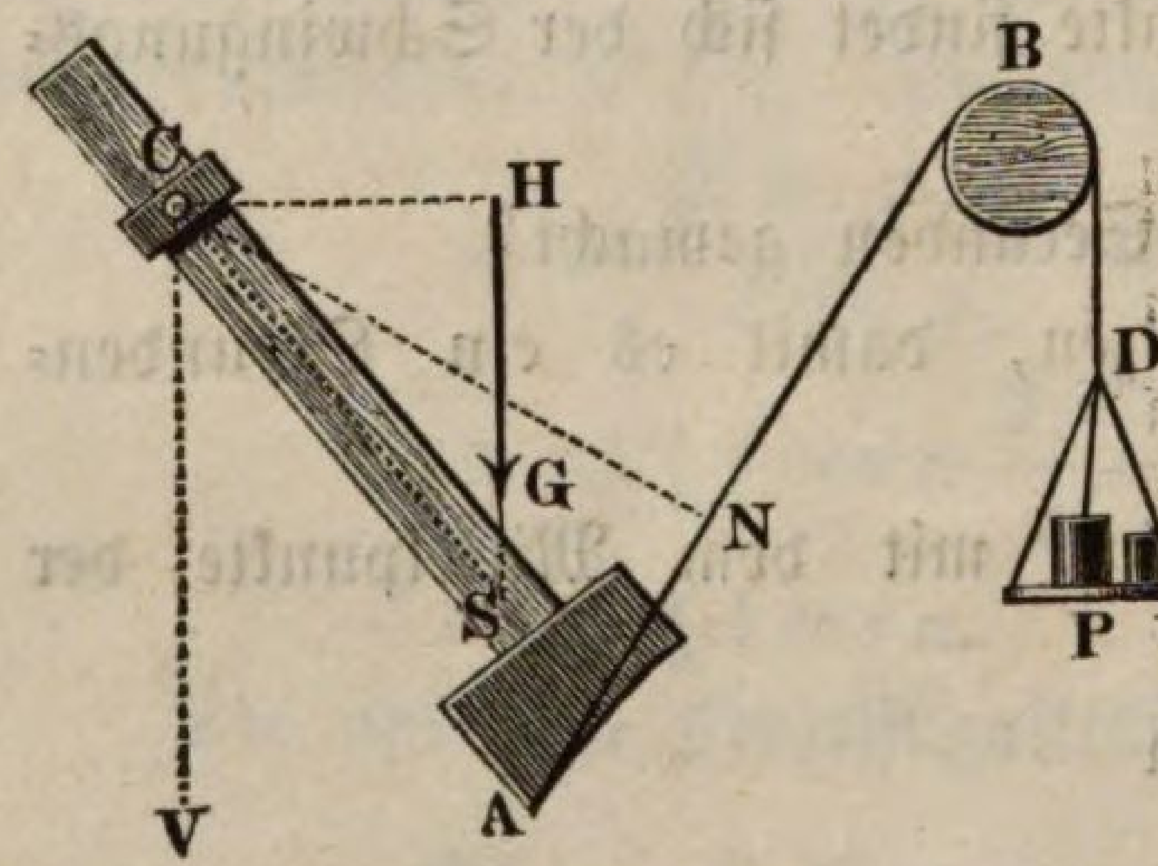
$$l = \frac{T_1}{M s} = \frac{0{,}0023208}{0{,}0018918} = 1{,}226^m$$

$$n = \frac{5 \cdot 60}{1{,}003\sqrt{1{,}226}} = 270 \text{ Schwingungen}$$

$$l_1 = 1^m.$$

Um das statische Moment $M s = \frac{G}{g}\,s$ eines Körpers, der um eine Achse C (Fig. 299) schwingt, auf praktische Weise zu finden, verfahre man folgendermaßen:

Fig. 299.



Der Körper werde durch ein Seil $A\,B\,D$, das über eine feste Rolle B geführt ist, aus seiner Gleichgewichtslage CV gebracht, und in der neuen Lage durch Gewichte P am Ende des Seiles erhalten. Für diese Annahmen ist:

$$P . CN - G . CH = 0.$$

Bezeichnen wir den Winkel VCS mit α, den Arm CN von P mit p und die Entfernung CS des Schwerpunktes S von der Drehachse C mit s, so ist hiernach:

$$P p - G s . \sin \alpha = 0,$$

d. h.:

$$G s = \frac{P p}{\sin \alpha}$$

und

$$M s = \frac{P}{g} \cdot \frac{p}{\sin \alpha}.$$

44. Das vorige Pendel gebrauche zu einer Schwingung $1\frac{1}{2}$ Secunden, und der Schwerpunkt liege $0{,}785^m$ unter dem Aufhängepunkte.

Wie groß ist das Trägheitsmoment des Pendels?

$$M s = 0{,}001282 \frac{1000 \cdot 7{,}8}{g} = 1{,}02$$ da 1 Kubikmeter Wasser 1000 Kilogramm wiegt,

$$T_1 = \left(\frac{t}{1{,}003}\right)^2 M s = 2{,}28$$ auf die Schwingungsachse,

$$T = 2{,}28 - M \cdot 0{,}785^2 = 1{,}48$$ auf die Schwerpunktsachse.

45. Die Verbindung zweier gleicher Centrifugalpendel mit der stehenden Welle liefert den bei größeren Maschinen in Anwendung gekommenen Regulirungsapparat:

den Centrifugal- oder Schwungkugel-Regulator.

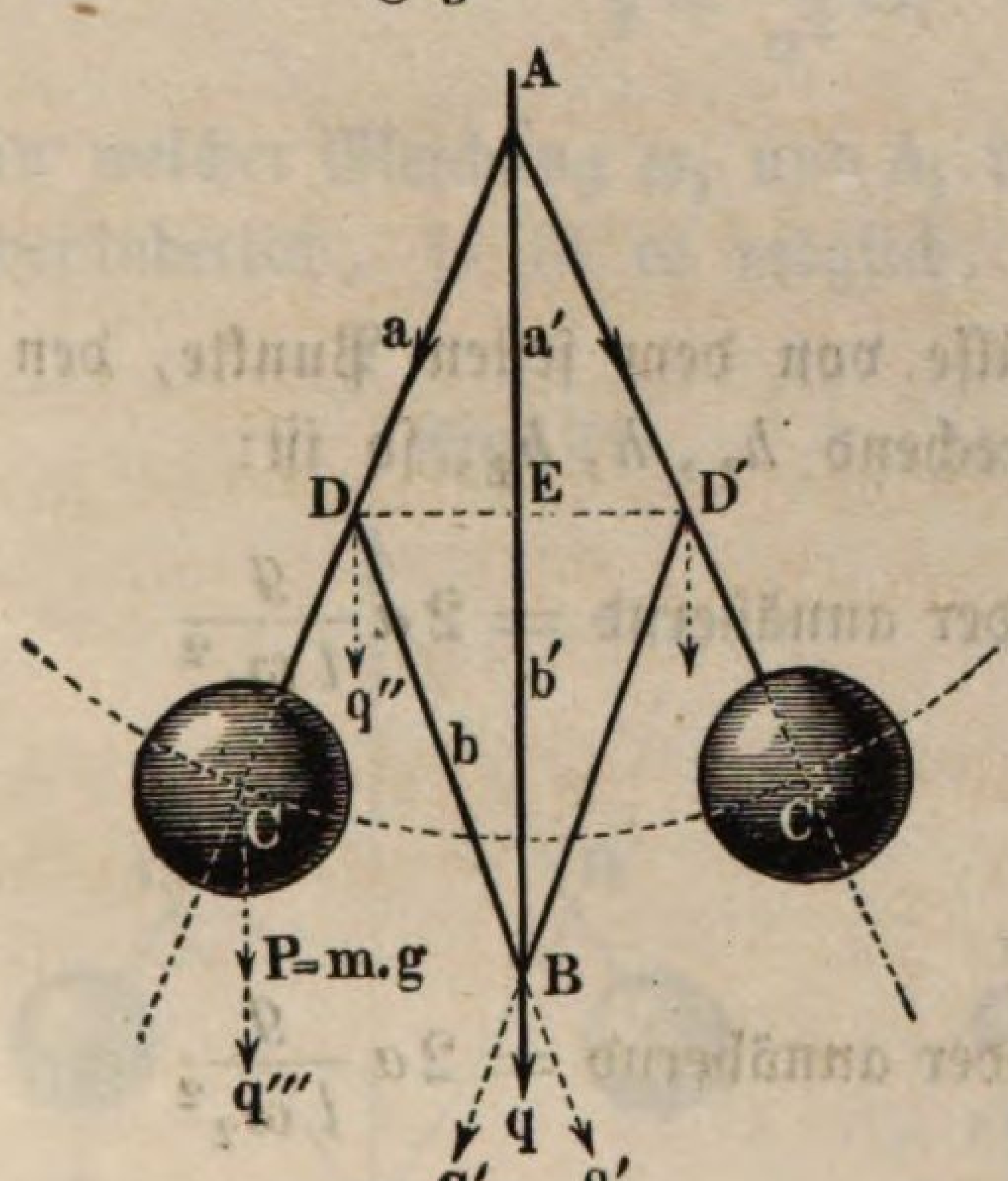
Es sei P und m (Fig. 300) das Gewicht und die Masse einer Kugel, q der Widerstand in der Hülse B, der überwunden werden muß, wenn der Apparat aus der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω in eine andere ω_1 versetzt wird. Zwischen ω und ω_1 besteht die Relation:

$$\omega_1 = (1 \pm n)\,\omega,$$

wobei n gewöhnlich $\frac{1}{20}$ nicht übersteigen soll. Weiter sei:

$$AC = l;\ AD = a;\ BD = b;\ AE = a';\ BE = b'.$$

Fig. 300.



Man zerlege q nach Richtung der beiden Verbindungsstangen BD und BD' in die Seitenkräfte q', denke diese in den Punkten D und D' wirksam und zerlege sie nochmals in zwei Componenten, von denen die eine q'' nach verticaler Richtung wirksam, die andere in Richtung von CA und $C'A$ liegend durch den festen Punkt A aufgehoben wird. Die Componente q'' verschieben wir endlich parallel ihrer Richtung in den Mittelpunkt der Kugel, und es wirken dann hier die beiden verticalen Kräfte mg und q''', wobei zu bemerken, daß beim Steigen der Kugeln, d. h. bei einer Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit, das Gewicht mg um q''' vergrößert, beim Niedersinken der Kugeln dagegen um q''' vermindert wird.

Es ist:

$$q''' = q \frac{a}{l} \frac{a' + b'}{2\,b'}.$$

Jede der Kugeln wird im Beharrungszustande sein, d. h. sie wird kein Bestreben der Veränderung ihrer Lage haben, sobald der Moment der Fliehkraft F gleich ist dem Momente des Gewichtes $m\,g \pm q'''$, in Bezug auf den festen Punkt A. Zur Aufstellung dieser Momentengleichung bezeichnen wir den Winkel, den $A\,C$ und $A\,B$ bei der normalen Winkelgeschwindigkeit ω bilden, mit α, und nennen denselben α_1 für die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = (1 + n)\,\omega$, dagegen α_2 für die kleinste zulässige Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = (1 - n)\,\omega$. Für diese Annahmen erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$m\,l\,\omega_1^2 \cos\alpha_1 = m\,g + q''',$$
$$m\,l\,\omega^2 \cos\alpha = m\,g,$$
$$m\,l\,\omega_2^2 \cos\alpha_2 = m\,g - q'''.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$q''' = m\,g\left(\left[\frac{\omega_1}{\omega}\right]^2 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha} - 1\right) = m\,g\left(1 - \left[\frac{\omega_2}{\omega}\right]^2 \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha}\right)$$

oder annähernd, wenn wir die Cosinus der drei Winkel gleich groß nehmen, $\omega_1^2 = \omega^2(1 + 2n)$ und $\omega_2^2 = \omega^2(1 - 2n)$ setzen, das Gewicht einer Kugel: $m\,g = P = \frac{1}{2n}\,q'''$ und die zulässige Geschwindigkeitsänderung: $\pm n = \frac{1}{2}\,\frac{q'''}{P}$.

Für gewöhnlich wird die Stangenverbindung $A\,D\,B\,D'$ als Rhombus construirt, so daß $a = b$ und für alle Lagen $a' = b'$ ist. In diesem Falle ergiebt sich:

$$q''' = \frac{a}{l}\,q.$$

Nennen wir die Entfernung $A\,B$ der Hülse von dem festen Punkte, den drei Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega, \omega_2$ entsprechend h_1, h, h_2, so ist:

$$h_1 = 2\,a\cos\alpha_1 = 2\,a\,\frac{mg + q'''}{m\,l\,\omega_1^2} \text{ oder annähernd } = 2\,a\,\frac{g}{l\,\omega_1^2}$$

$$h = 2\,a\cos\alpha = 2\,a\,\frac{g}{l\,\omega^2}$$

$$h_2 = 2\,a\cos\alpha_2 = 2\,a\,\frac{mg - q'''}{m\,l\,\omega_2^2} \text{ oder annähernd } = 2\,a\,\frac{g}{l\,\omega_2^2}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$h - h_1 = \frac{2\,a\,g}{l\,\omega^2}\left(1 - \frac{1}{1 + 2n}\right) = \frac{2n}{1 + 2n}\cdot\frac{2\,a\,g}{l\,\omega^2}$$

$$h_2 - h = \frac{2\,a\,g}{l\,\omega^2}\left(\frac{1}{1 - 2n} - 1\right) = \frac{2n}{1 - 2n}\cdot\frac{2\,a\,g}{l\,\omega^2}.$$

Die Entfernungen $h - h_1$ und $h_2 - h$ können wir durch die Construction als gegeben ansehen, und demnach den sich daraus ergebenden Werth $\frac{a}{l}$ zur Berechnung von q''', resp. P benutzen:

$$q''' = \frac{1 + 2n}{4n} \cdot \frac{\omega^2}{g} (h - h_1)\, q = \frac{1 - 2n}{4n} \cdot \frac{\omega^2}{g} (h_2 - h)\, q$$

$$P = \frac{1 + 2n}{8\, n^2} \cdot \frac{\omega^2}{g} (h - h_1)\, q = \frac{1 - 2n}{8\, n^2} \cdot \frac{\omega^2}{g} (h_2 - h)\, q.$$

Bei den vorigen Untersuchungen ist auf das Gewicht der einzelnen Stangen nicht Rücksicht genommen worden, und ist deshalb in dem Gewichte P das der Stange $A\,C$, und in dem Gewichte q das der $1\frac{1}{2}$ fachen Stange $B\,D$ mit inbegriffen zu denken.

46. Man hat sich bemüht, den vorstehenden Regulirungsapparat so zu verändern, daß die Winkelgeschwindigkeit der Maschine bei den verschiedenen Lagen der Kugeln dieselbe bleibe, und zu dem Ende vielfache Constructionen angegeben. Die einfachste, vom Professor Großmann herrührend, findet sich unmittelbar aus den oben aufgestellten Gleichungen. Wir hatten:

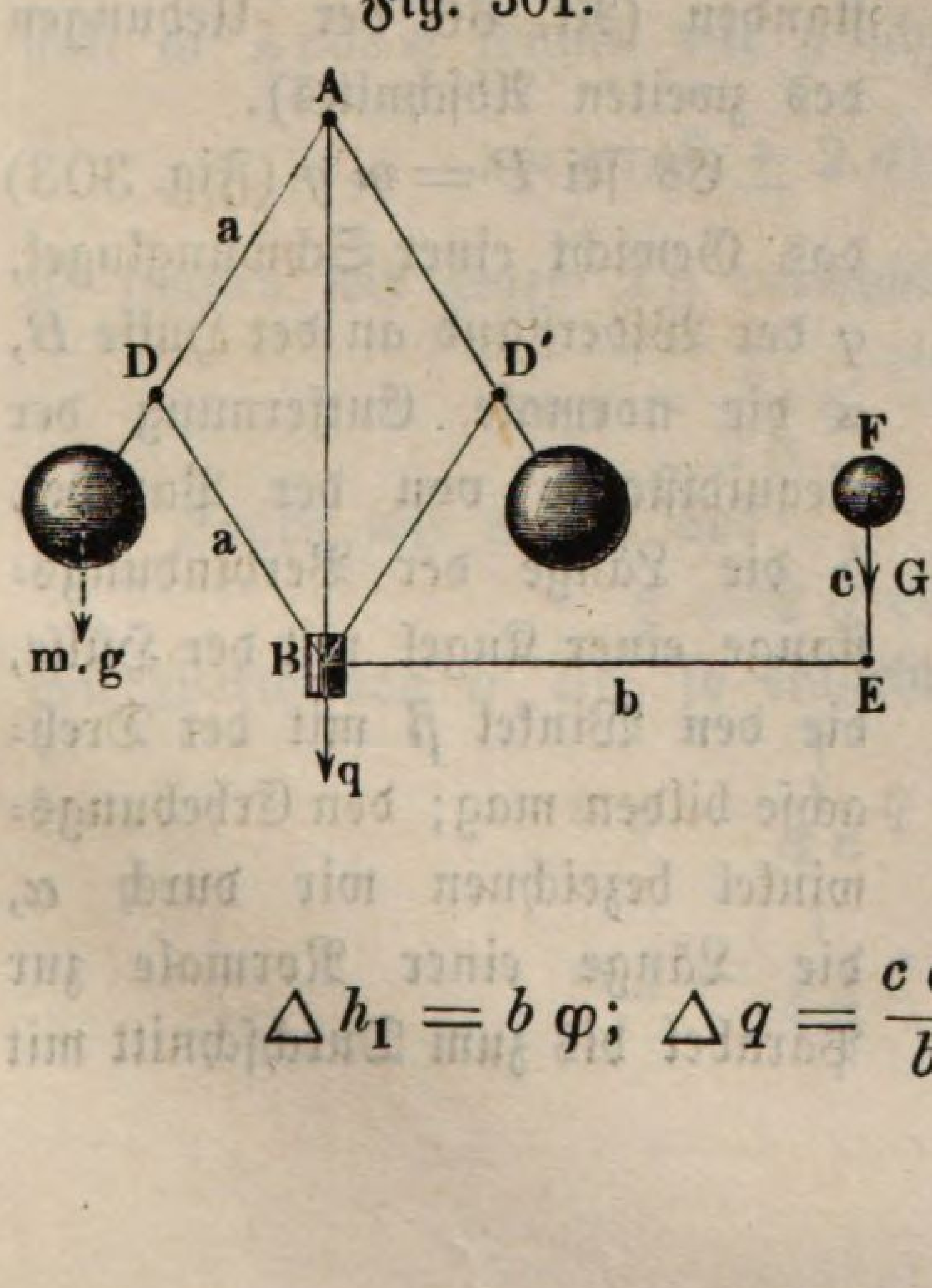
$$m\, l\, \omega_1{}^2 \cos \alpha_1 = m\, g + q''' = m\, g + q\, \frac{a}{l}.$$

Benutzen wir dabei noch $h_1 = 2\, a \cos \alpha_1$, so ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, \frac{l^2}{a^2}\, \omega_1{}^2 = \frac{m\, g\, \frac{l}{a} + q}{h_1},$$

in welcher Gleichung ω_1 und h_1 veränderlich ist. Denkt man dagegen q und h_1 veränderlich, so ist es möglich, die Aenderung von q jederzeit so groß zu nehmen, daß der rechts stehende Quotient bei einem Erheben der Kugeln trotzdem constant, und dadurch die Winkelgeschwindigkeit ω_1 selbst constant bleibe. Dies wird erreicht durch die Neigung des mit dem Gewichte G (Fig. 301) im Abstande $E\,F$ beschwerten Armes $B\,E$. Es sei $B\,E = b$, $E\,F = c$, und φ der Winkel, um den sich der Arm $B\,E$ in dem Drehpunkte E, bei Veränderung der Kugellage, hebt oder senkt, dann ist die Aenderung von h_1 mit $\triangle\, h_1$ und die von q mit $\triangle\, q$ bezeichnend:

Fig. 301.



$$\triangle\, h_1 = b\, \varphi;\ \triangle\, q = \frac{c\, \varphi}{b}\, G, \text{ daher } \frac{\triangle\, q}{\triangle\, h_1} = G\, \frac{c}{b^2}.$$

Nach der obigen Annahme soll aber

$$\frac{1}{2} m \frac{l^2}{a^2} \omega_1^2 = \frac{m g \frac{l}{a} + q}{h_1} = \frac{m g \frac{l}{a} + q + \triangle q}{h_1 + \triangle h_1}$$

sein, d. h. aber

$$\frac{\triangle q}{\triangle h_1} = \frac{m g \frac{l}{a} + q}{h_1} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{a^2} \omega_1^2$$

oder mit Benutzung des entwickelten Werthes

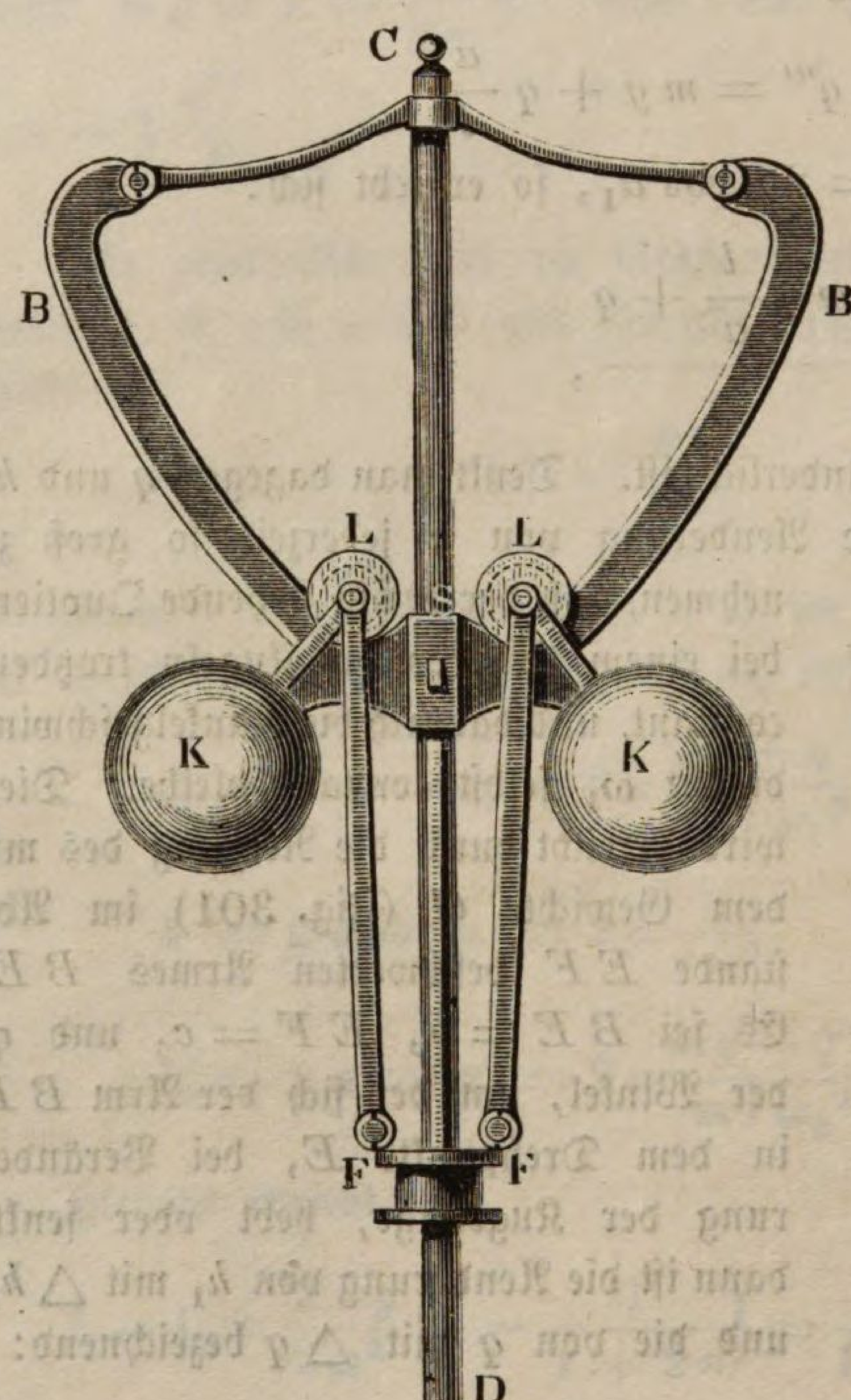
$$\frac{\triangle q}{\triangle h_1} = G \frac{c}{b^2} = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{a^2} \omega_1^2,$$

d. h.

$$G c = \frac{1}{2} m \left(\frac{b\, l}{a}\right)^2 \omega_1^2,$$

woraus sich G, das zugleich das halbe Gewicht des Armes EF enthält, berechnen läßt. Ein Schwungkugel-Regulator, für den bei jeder Kugellage die Winkelgeschwindigkeit constant bleibt, heißt ein astatischer Regulator, im Gegensatz zu denen mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit, welche statische genannt werden.

Fig. 302.



47. Der parabolische Regulator von Franke (Fig. 302) ist ebenfalls astatisch, da für denselben $l \cos \alpha = \frac{p}{2}$ ist, unter p den Parameter der Parabel verstanden (Nr. 66 der Uebungen des zweiten Abschnitts).

Es sei $P = m g$ (Fig. 303) das Gewicht einer Schwungkugel, q der Widerstand an der Hülse B, a die normale Entfernung der Aequidistante von der Parabel, b die Länge der Verbindungsstange einer Kugel mit der Hülse, die den Winkel β mit der Drehachse bilden mag; den Erhebungswinkel bezeichnen wir durch α, die Länge einer Normale zur Parabel bis zum Durchschnitt mit

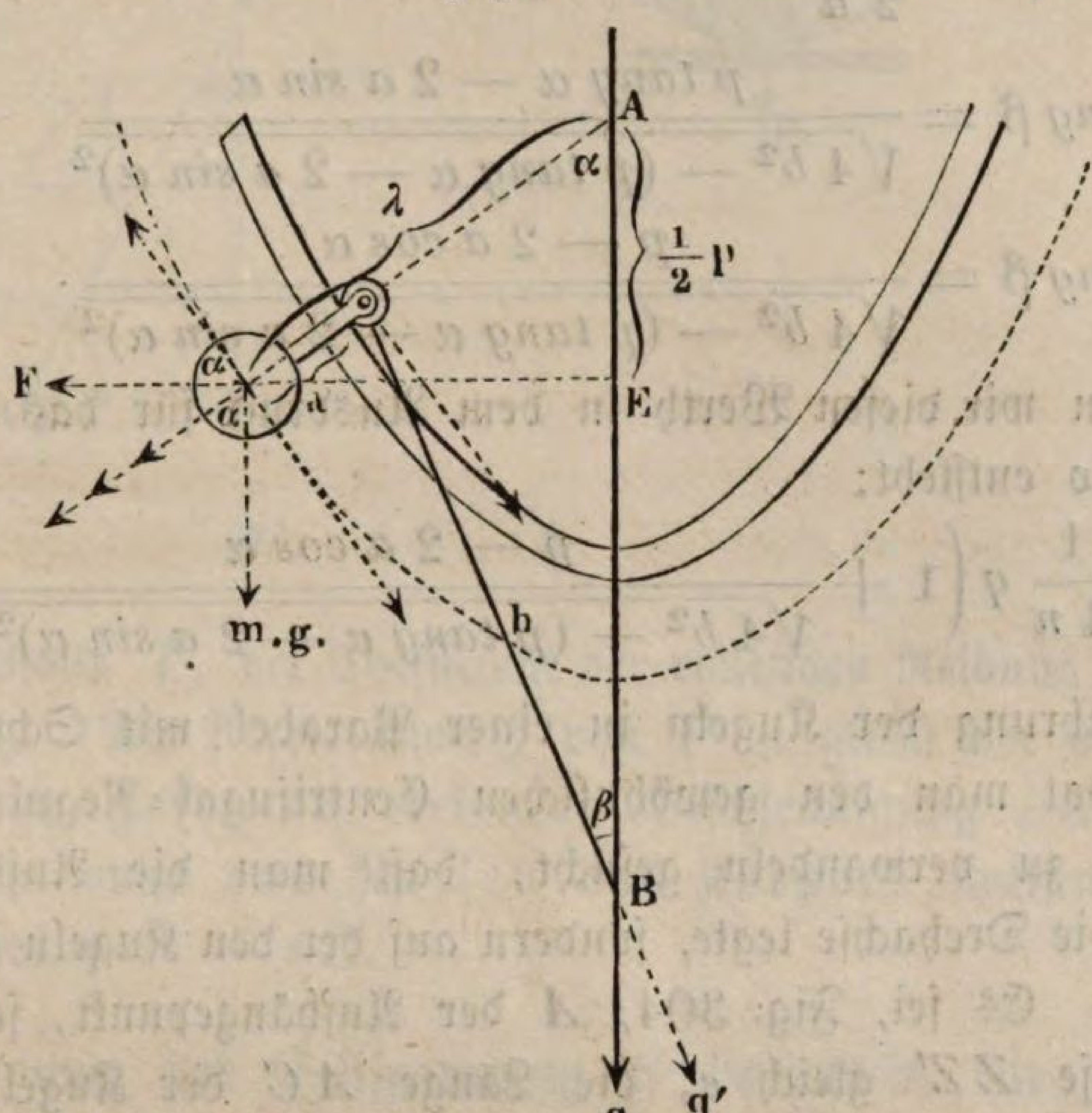
der Drehachse durch λ, so ist für die Gleichgewichtslage einer Kugel:

$$\lambda \cos\alpha = \tfrac{1}{2} p$$

und
$$\omega^2 = \frac{g}{\lambda \cos\alpha},$$

unter ω die normale Winkelgeschwindigkeit verstanden. Diese gehe in die zulässigen Grenzen $(1 \pm n)\,\omega$ über. Man zerlege die Centrifugalkraft F und das Gewicht $m\,g$ einer Kugel sowie den Widerstand q' in einer Verbindungsstange nach Richtung der Normale und Tangente der Parabel. Die ersteren Componenten werden durch die feste Leitschiene aufgehoben, während die tangentialen Kräfte unter sich im Gleichgewicht sein müssen.

Fig. 303.



Die Gleichgewichtsbedingung ist:

$$m\,(1 \pm n)^2\, \omega^2 \cos\alpha\, \lambda \sin\alpha - m\,g \sin\alpha \mp q' \sin(\alpha + \beta) = 0,$$

statt $\omega^2 \lambda \cos\alpha$ können wir g schreiben, man erhält hiernach:

$$m\,g\,(n^2 \pm 2\,n) = \pm\, q' \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha},$$

n^2 können wir gegen $2\,n$ vernachlässigen, es ist daher:

$$m\,g = \frac{1}{2\,n}\, q' \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}.$$

Setzen wir weiter aus

$$q = 2\,q' \cos\beta$$

den Werth von q' ein, so entsteht:

$$m\,g = \frac{1}{4\,n}\, q \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cos\beta}$$

$$m\,g = \frac{1}{4\,n}\, q\,(1 + \operatorname{tang}\beta \operatorname{cotg}\alpha).$$

Die beiden Winkel α und β beziehen sich auf die Stellung des Apparats bei der normalen Winkelgeschwindigkeit ω, sie können demnach als gegeben angesehen oder auch durch Längenbeziehungen bestimmt werden.

Für den normalen Gang der Maschine muß die Hülse nämlich eine bestimmte Stellung haben, da mit derselben die Zuflußklappe in Verbindung gesetzt wird. Setzen wir α als bekannt voraus, so haben wir:

$$b \sin \beta = (\lambda - a) \sin \alpha$$
$$= \left(\frac{p}{2 \cos \alpha} - a\right) \sin \alpha$$
$$= \tfrac{1}{2} (p \tan \alpha - 2 a \sin \alpha)$$
$$\cos \beta = \frac{1}{2 b} \sqrt{4 b^2 - (p \tan \alpha - 2 a \sin \alpha)^2}$$
$$\tan \beta = \frac{p \tan \alpha - 2 a \sin \alpha}{\sqrt{4 b^2 - (p \tan \alpha - 2 a \sin \alpha)^2}}$$
$$\cot \alpha \tan \beta = \frac{p - 2 a \cos \alpha}{\sqrt{4 b^2 - (p \tan \alpha - 2 a \sin \alpha)^2}}.$$

Substituiren wir diesen Werth in dem Ausdruck für das Gewicht P einer Schwungkugel, so entsteht:

$$P = \frac{1}{4 n} q \left(1 + \frac{p - 2 a \cos \alpha}{\sqrt{4 b^2 - (p \tan \alpha - 2 a \sin \alpha)^2}}\right).$$

Da die Führung der Kugeln in einer Parabel mit Schwierigkeiten verbunden ist, so hat man den gewöhnlichen Centrifugal-Regulator dadurch in einen astatischen zu verwandeln gesucht, daß man die Aufhängepunkte der Kugeln nicht in die Drehachse legte, sondern auf der den Kugeln entgegengesetzten Seite anordnete. Es sei, Fig. 304, A der Aufhängepunkt, seine Entfernung von der Drehachse ZZ' gleich e, die Länge AC der Kugelstange bis zum Mittelpunkte gleich l, und durch C_1, C, C_2 seien die höchste, mittlere und niedrigste Lage der Kugelmittelpunkte dargestellt, dann ist der Voraussetzung gemäß

$$l \cos \alpha_1 - e \cot \alpha_1 = l \cos \alpha - e \cot \alpha = l \cos \alpha_2 - e \cot \alpha_2$$

gleich einem constanten Werth, der unter der Annahme, daß die Punkte C_2, C, C_1 annähernd in einer Parabel liegen, gleich $\frac{p}{2}$ ist, wofür wir nach Nr. 66 der Uebungen des zweiten Abschnitts $\frac{895}{u^2}$ setzen dürfen, unter u die verlangte Umdrehungszahl in einer Minute verstanden. Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich, sobald die Winkel der Construction gemäß angenommen werden:

$$\frac{e}{l} = \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2}{\cot \alpha_1 - \cot \alpha_2}$$

und

$$l = \frac{895}{u^2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha - \frac{e}{l} \cot \alpha}.$$

48. Ein Cylinder (Fig. 305) ist um seine geometrische Achse drehbar und wird vermöge eines Gewichtes P auf einer horizontalen Ebene in rollende Bewegung versetzt. Es sei das Gewicht des Cylinders mit Zubehör Q, der Halbmesser desselben R; der Halbmesser der Rolle r, deren Zapfenhalbmesser ϱ;

Fig. 304.

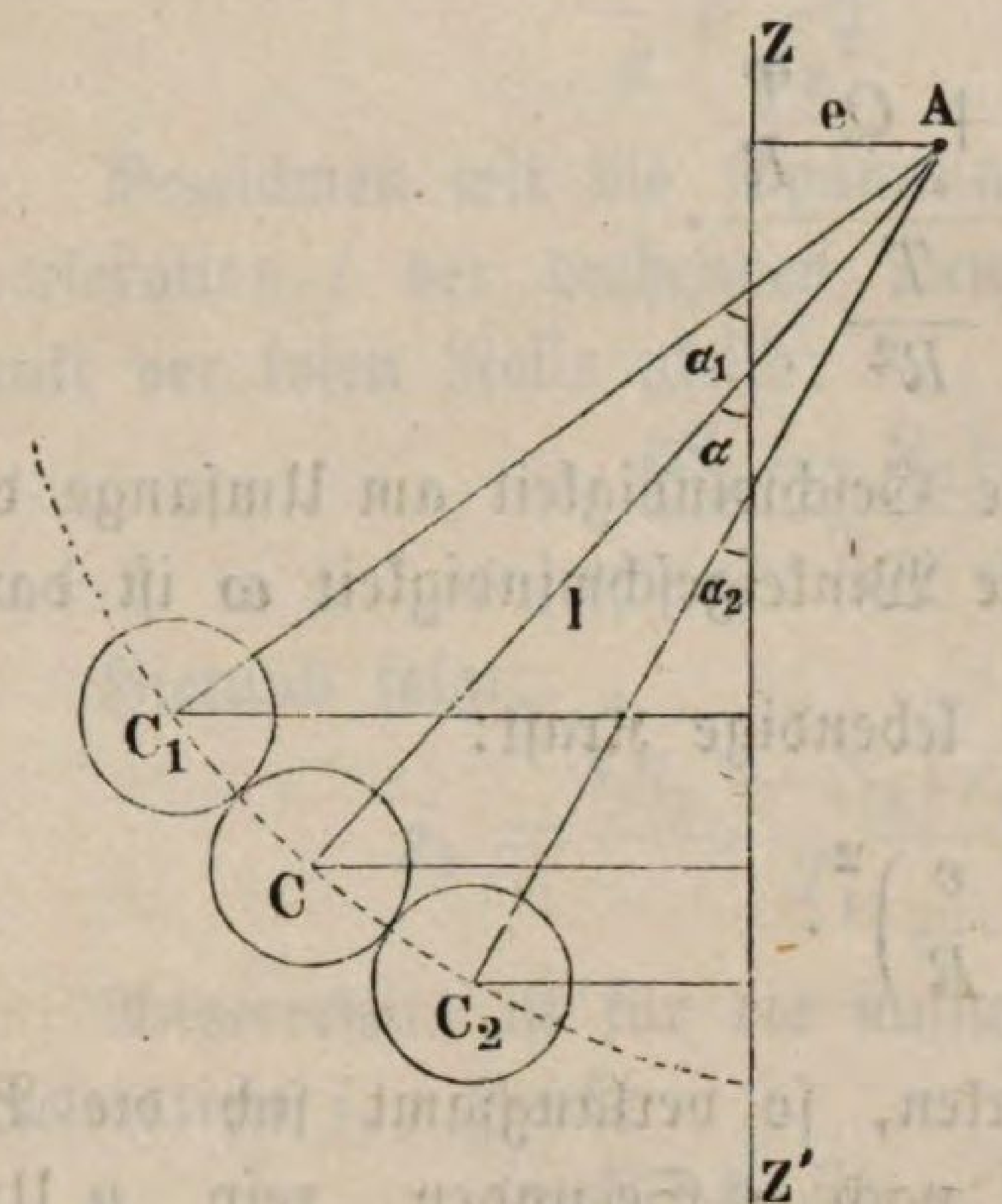
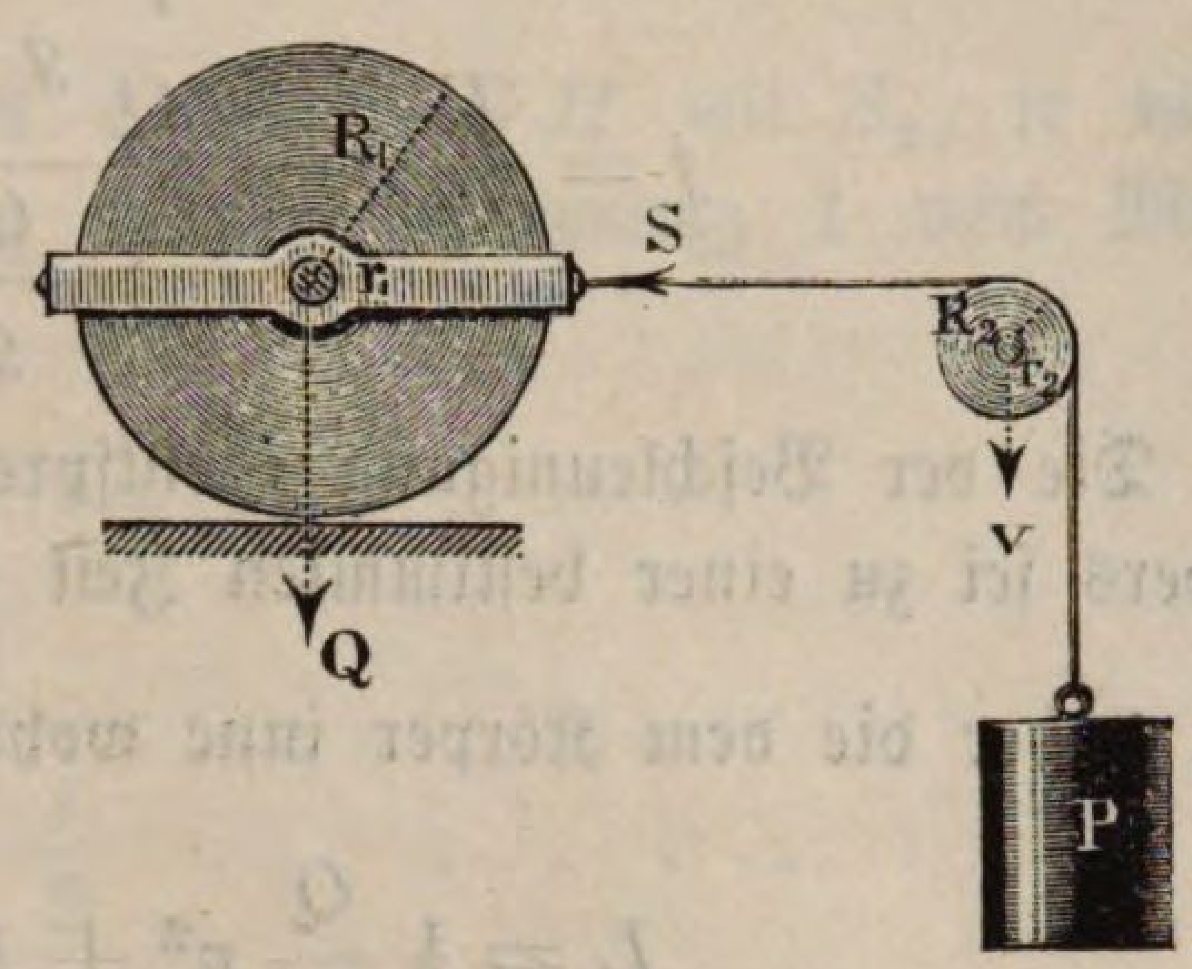


Fig. 305.



das Gewicht der Rolle V, der Coefficient der rollenden Reibung φ und der, der Zapfenreibung μ_1. Die Acceleration j von P ist gleich der von Q und auch gleich der entgegengesetzten drehenden Beschleunigung ιR, am Umfange des Cylinders, so lange das Rollen des Körpers stattfindet. Für diese Annahme ist daher $j = -\iota R$.

Zur Berechnung der Seilspannung S bestimmen wir j auf zweifache Weise, nach den Formeln 121 und 125 und erhalten:

$$j = \frac{P - \left(S + \mu_1 \frac{\varrho}{r} \sqrt{S^2 + (P+V)^2}\right)}{\frac{P+Q}{g} + \frac{T_1}{r^2}}$$

und ferner

$$j = \frac{SR - Q\varphi}{T} R,$$

worin T das Trägheitsmoment des rollenden Körpers und T_1 das der Rolle bezeichnet. Aus diesen Gleichungen erhält man durch Elimination von S die Acceleration j, und dadurch die übrigen nothwendigen Größen für die entsprechende Bewegung.

Anstatt des Gewichtes P nehmen wir eine an dem Seilende wirksame Kraft P an, wobei das Seil zur Horizontalebene eine horizontale Lage haben und die Rolle in Wegfall kommen soll.

$$j = \frac{P - S}{Q} g = \frac{S R - Q \varphi}{T} R$$

$$S = \frac{P \frac{T}{R^2} + Q \frac{\varphi}{R} \frac{Q}{g}}{\frac{Q}{g} + \frac{T}{R^2}}$$

$$j = \frac{P}{Q} g - \frac{\frac{P}{Q} g \frac{T}{R^2} + Q \frac{\varphi}{R}}{\frac{Q}{g} + \frac{T}{R^2}}.$$

Die der Beschleunigung j entsprechende Geschwindigkeit am Umfange des Körpers sei zu einer bestimmten Zeit v, die Winkelgeschwindigkeit ω ist dann $\frac{v}{R}$, daher die dem Körper inne wohnende lebendige Kraft:

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \tfrac{1}{2} T \left(\frac{v}{R}\right)^2.$$

Hört die Kraft P plötzlich auf zu wirken, so verlangsamt sich die Bewegung allmälig und der Körper kommt nach t Secunden, resp. u Umdrehungen zur Ruhe:

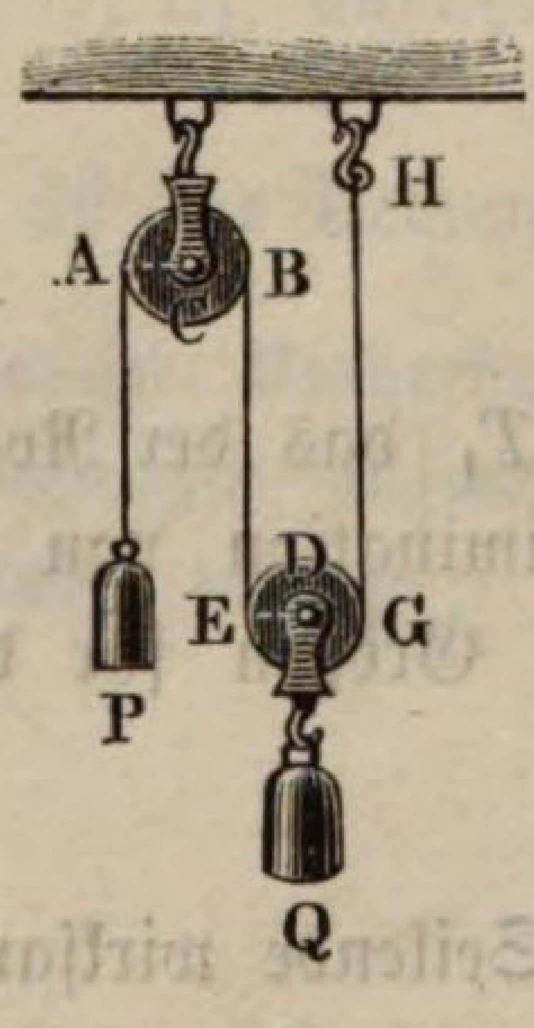
$$t = \frac{v}{g} \frac{Q R^2 + T g}{Q \varphi R}$$

$$u = \frac{v^2}{4 \pi g R} \cdot \frac{Q R^2 + T g}{Q \varphi R}.$$

Die vorstehenden Formeln vereinfachen sich, wenn wir $T = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} R^2$, nach der Tabelle in §. 58, setzen.

49. Es sind die Bewegungsverhältnisse bei der Verbindung einer losen mit einer festen Rolle (Fig. 306) zu untersuchen.

Fig. 306.



Das Gewicht Q an der losen Rolle $E G$ soll durch das Gewicht P gehoben werden. Der Halbmesser der losen Rolle sei r_1, das Gewicht derselben mit Zubehör V, das Trägheitsmoment T_1. Der Halbmesser der festen Rolle $A B$ sei r_2, das Gewicht derselben mit Zubehör W, das Trägheitsmoment T_2.

Für die parallele Lage der Seilenden haben wir unter j die Acceleration des sinkenden Gewichtes P, unter j_1 die Acceleration der aufsteigenden Last $Q + V$, unter j_2 die Acceleration der drehenden Bewegung am Umfange der losen Rolle verstanden:

$$j = j_1 + j_2.$$

Setzen wir voraus, daß das Seil auf dem Umfange der losen Rolle

nicht gleiten kann, so ist die Acceleration j_2 der drehenden Bewegung gleich der Acceleration j_1 der fortschreitenden, daher:

$$j = 2\,j_1.$$

Es sei S_1 die Spannung des Seilendes BE, so hat man:

$$j = \frac{P - S_1}{\frac{P}{g} + \frac{T_2}{{r_2}^2}} = 2\,j_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Bezeichnen wir die Spannung des Seilendes GH mit S_2, so ist die Acceleration ι der drehenden Bewegung in der Entfernung 1 vom Mittelpunkt der losen Rolle gleich:

$$\frac{(S_1 - S_2)\,r_1}{T_1}.$$

Hieraus folgt:

$$j_1 = \frac{(S_1 - S_2)\,{r_1}^2}{T_1} = \frac{j}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Andererseits ist für die aufsteigende Bewegung der Last $Q + V$ dieselbe Acceleration j_1, gleich:

$$j_1 = \frac{S_1 + S_2 - (Q + V)}{\frac{Q + V}{g}} = \frac{j}{2} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich j, j_1, S_1 und S_2 entwickeln. Aus (2) und (3) erhalten wir:

$$2\,S_1 = j_1 \frac{T_1}{{r_1}^2} + j_1 \frac{Q + V}{g} + Q + V,$$

und aus (1):

$$2\,S_1 = 2\left[P - 2\,j_1\left(\frac{P}{g} + \frac{T_2}{{r_2}^2}\right)\right],$$

deshalb ist:

$$j_1\left(\frac{T_1}{{r_1}^2} + \frac{Q + V}{g} + 4\,\frac{P}{g} + 4\,\frac{T_2}{{r_2}^2}\right) = 2\,P - (Q + V),$$

$$j_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{P - \frac{Q + V}{2}}{\frac{P}{g} + \frac{Q + V}{4\,g} + \frac{T_2}{{r_2}^2} + \frac{T_1}{4{r_1}^2}} = \frac{j}{2},$$

$$S_1 = P - j\left(\frac{P}{g} + \frac{T_2}{{r_2}^2}\right),$$

$$S_2 = \frac{Q + V}{2} + \frac{j_1}{2}\left(\frac{Q + V}{g} - \frac{T_1}{{r_1}^2}\right).$$

Die übrigen Größen v und s der Bewegung für die Zeit t ergeben sich nun auf leichte Weise.

Andere Auflösung.

Bezeichnen wir den in der Zeit t von dem Gewichte P zurückgelegten Weg mit s_1, den in derselben Zeit von $Q + V$ zurückgelegten Weg mit s_2, so ist:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} j t^2,$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2} j_1 t^2.$$

Hieraus folgt, da $j = 2 j_1$ ist:

$$s_1 = 2 s_2.$$

Die von dem Gewicht P verrichtete Arbeitgröße während der Zeit t ist $P s_1$, die von der Last $Q + V$ verrichtete dagegen

$$-(Q + V) s_2$$

oder:

$$-\tfrac{1}{2}(Q + V) s_1.$$

Die Arbeitgröße L der ganzen Maschine ist daher:

$$L = \left(P - \frac{Q + V}{2}\right) s_1.$$

Andererseits bestimmt sich die Arbeitgröße der ganzen Maschine n. §. 131:

$$L = \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{2} \omega^2 T.$$

Der erste Summand bestimmt die Arbeit des sinkenden Gewichts P und die der aufsteigenden Last $Q + V$, der zweite Summand dagegen die Arbeit der drehenden festen und losen Rolle.

Das Gewicht P habe die Geschwindigkeit v_2, so ist, unter ω_2 die Winkelgeschwindigkeit der festen Rolle verstanden:

$$v_2 = r_2 \omega_2.$$

Ebenso ist für die Geschwindigkeit v_1 der Last $Q + V$ und die Winkelgeschwindigkeit ω_1 der losen Rolle:

$$v_1 = r_1 \omega_1.$$

Außerdem aber haben wir, da $v_2 = j t$, $v_1 = j_1 t$ und $j_1 = \dfrac{j}{2}$ ist:

$$v_2 = 2 v_1.$$

Nach diesen Vorbemerkungen ist, statt v_2, v gesetzt:

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \tfrac{1}{2} \frac{Q + V}{g} \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{v}{r_2}\right)^2 T_2 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{v}{2 r_1}\right)^2 T_1,$$

$$L = \tfrac{1}{2} v^2 \left(\frac{P}{g} + \frac{Q + V}{4 g} + \frac{T_2}{r_2^2} + \frac{T_1}{4 r_1^2}\right).$$

Setzen wir die beiden entwickelten Werthe der Arbeitgröße einander gleich, so entsteht:

$$\left(P - \frac{Q + V}{2}\right) s_1 = \tfrac{1}{2} v^2 \left(\frac{P}{g} + \frac{Q + V}{4 g} + \frac{T_2}{r_2^2} + \frac{T_1}{4 r_1^2}\right).$$

Für $s_1 = \frac{v^2}{2j}$ ergiebt sich die Acceleration des sinkenden Gewichts P:

$$j = \frac{P - \frac{Q+V}{2}}{\frac{P}{g} + \frac{Q+V}{4g} + \frac{T_2}{r_2^2} + \frac{T_1}{4r_1^2}} = 2j_1.$$

Die übrigen Bestimmungen finden sich, wie in der ersten Auflösung.

50. Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α befinde sich ein Körper vom Gewicht P, der die vorgelegte Bahn rollend durchläuft. Es sind die Bewegungsverhältnisse zu ermitteln.

So lange die rollende Bewegung nicht aufgehoben ist, wird die Acceleration j der fortschreitenden Bewegung gleich der, der entgegengesetzten drehenden am Umfange des rollenden Körpers sein.

Für diese Annahme ist: $j = -\iota R$, wenn ι die Acceleration in der Entfernung 1 von der Drehachse bezeichnet, für den rollenden Körper vom Halbmesser R.

Der Körper ruhe in Zapfen vom Halbmesser r, der Reibungscoefficient für die Zapfen sei μ, der für die wälzende Reibung φ, so ist, unter K die Kraft am Umfange des Körpers verstanden, welche die wälzende Bewegung erzeugt:

$$j = \frac{P \sin\alpha - (K + \mu \frac{r}{R} P \cos\alpha)}{P} g$$

$$-\iota R = \frac{KR - P\varphi \cos\alpha}{T} R,$$

da die gleitende Zapfenreibung die Acceleration der fortschreitenden Bewegung, die wälzende Reibung aber die der drehenden Bewegung vermindert. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$K = \frac{\frac{T}{R^2} g \sin\alpha - \cos\alpha \left(\mu \frac{r}{R} \frac{T}{R^2} g - P \frac{\varphi}{R}\right)}{1 + \frac{T}{R^2} : \frac{P}{g}}$$

$$j = g \frac{\sin\alpha - \cos\alpha \left(\mu \frac{r}{R} + \frac{\varphi}{R}\right)}{1 + \frac{T}{R^2} : \frac{P}{g}}.$$

Die Kraft K darf die gleitende Reibung des Körpers auf der schiefen Ebene nicht überwinden, wenn nicht ein gleitendes Rollen eintreten soll, für welches nicht mehr $j = -\iota R$ ist.

Setzen wir in den obigen Ausdrücken K gleich der gleitenden Reibung $K = \mu P \cos\alpha$, so erhalten wir den Grenzfall:

$$j = g\left(\sin\alpha - \mu\left[1 + \frac{r}{R}\right]\cos\alpha\right),$$

und die Acceleration ιR der drehenden Bewegung, am Umfange des gleitend rollenden Körpers:

$$\iota R = \frac{P R^2}{T}\cos\alpha\left(\mu - \frac{\varphi}{R}\right).$$

51. Aus den in der vorigen Nummer erhaltenen Resultaten ergeben sich folgende, wenn der Körper nicht in Zapfen ruht und die wälzende Reibung vernachlässigt wird:

a) Für einen rollenden Cylinder:

$$j = \tfrac{2}{3}\, g \sin\alpha;$$

b) » eine rollende Kugel:

$$j = \tfrac{5}{7}\, g \sin\alpha;$$

c) » einen gleitend rollenden Cylinder:

$$j = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$
$$\iota R = 2\,\mu\, g \cos\alpha;$$

d) » eine Kugel, die gleitend rollt:

$$j = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$
$$\iota R = 2{,}5\,\mu\, g\cos\alpha.$$

52. Ein 2000 Kilogramm schwerer Wagen mit Rädern von $0{,}63^m$ Halbmesser rollt auf einer schiefen Ebene von 161^m Länge und 33° Neigung herab. Der Halbmesser der Radachsen sei $0{,}04^m$, das Trägheitsmoment des Wagens 134, $\mu = 0{,}07$, $\frac{\varphi}{R} = 0{,}02$. In welcher Zeit legt der Wagen den Weg auf der schiefen Ebene zurück? Mit welcher Geschwindigkeit erreicht der Wagen die Horizontalebene?

$$j = g\,\frac{\sin 33 - \cos 33\,(0{,}07\,\frac{4}{63} + 0{,}02)}{1 + \frac{134}{0.63^2} : \frac{2000}{g}} = 0{,}2\,g$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{j}} = 12{,}81 \text{ Secunden}$$

$$v = j\,t = 25{,}13^m.$$

53. Eine massive Kugel rollt gleitend von einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel 53° ist, herab.

Welche Größe hat der Coefficient der gleitenden Reibung, wenn die Acceleration des Fortschreitens gleich der doppelten drehenden Acceleration auf

der Oberfläche der Kugel ist, und von der wälzenden Reibung abgesehen werden soll?

$$g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 5\,\mu\,g\cos\alpha$$
$$\tfrac{1}{6}\tan\alpha = \mu$$
$$\mu = 0{,}221.$$

54. Eine massive Kugel bewegt sich vollkommen rollend auf einer schiefen Ebene, deren Neigung 20° sein mag.

Welche Größe hat der Coefficient der gleitenden Reibung?

Mit welcher Geschwindigkeit erreicht die Kugel die Horizontalebene, und welche Länge hat die geneigte Ebene, wenn die Bewegung 30 Secunden dauert?

Die Bedingung des Rollens ist, abgesehen von der wälzenden Reibung:

$$K = \frac{\dfrac{T}{R^2}\,g\sin\alpha}{1+\dfrac{T}{R^2}:\dfrac{P}{g}} < \mu\,P\cos\alpha$$

$$T = 0{,}4\,\frac{P}{g}\,R^2$$

$$\tan\alpha < \tfrac{7}{2}\mu, \text{ d. h. } \mu > 0{,}104.$$

$$j = g\,\frac{\sin\alpha}{1+\dfrac{T}{R^2}:\dfrac{P}{g}} = 2{,}4^m;\ v = 72^m;\ s = 1080^m.$$

55. Ein Cylinder vom Gewichte Q wird rollend eine schiefe Ebene von der Neigung α, durch ein Gewicht P heraufgezogen. Das letztere ist am Ende eines Seiles angebracht, das parallel der schiefen Ebene liegend über eine feste Rolle geführt ist.

Wie groß ist die Acceleration j des sinkenden Gewichtes P?

Wie groß ist die Spannung S des Seiles?

Bezeichnen wir den Halbmesser des Cylinders mit R, und den Coefficienten der wälzenden Reibung mit φ, so ist:

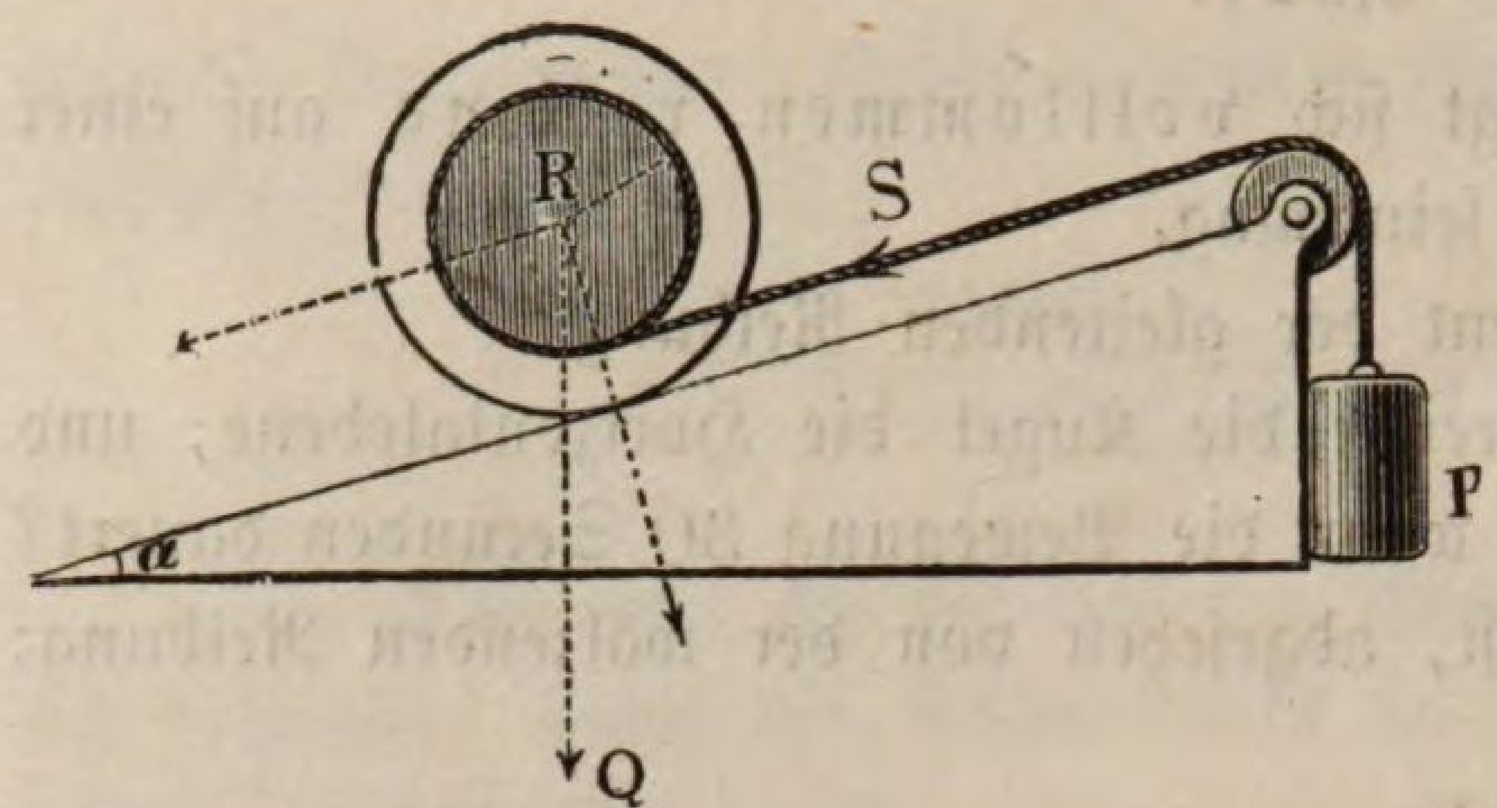
$$j = g\,\frac{P - Q\left(\sin\alpha + \dfrac{\varphi}{R}\cos\alpha\right)}{P + Q + \dfrac{T\,g}{R^2}}$$

$$S = j\,\frac{T}{R^2} + \frac{\varphi}{R}\,Q\cos\alpha.$$

56. Auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel α (Fig. 307, a. f. S.) befinde sich ein Cylinder vom Halbmesser R, welcher durch ein umgeschlagenes Seil, das, über eine feste Rolle geführt, an seinem Ende ein Gewicht P trägt, in Bewegung gesetzt werden soll. Ist die Acceleration des sinkenden Gewichtes P, j_1, die des ansteigenden Cylinders vom Gewicht Q, j_2, so ist die am Umfange des Cylinders auf Drehung wirkende Acceleration $j_3 = j_1 - j_2$.

Nennen wir die Spannung im Seile S und sehen von den Hindernissen der Bewegung ab, so ist:

Fig. 307.



$$j_1 = \frac{P - S}{\frac{P}{g}}$$

$$j_2 = \frac{S - Q \sin\alpha}{\frac{Q}{g}}$$

$$j_3 = \iota R = \frac{S R^2}{T} = j_1 - j_2$$

$$= \frac{P - S}{\frac{P}{g}} - \frac{S - Q \sin\alpha}{\frac{Q}{g}}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$S R^2 \frac{P}{g} \frac{Q}{g} = P T \frac{Q}{g} - S T \frac{Q}{g} - S T \frac{P}{g} + Q T \frac{P}{g} \sin\alpha$$

$$S (P Q R^2 + T Q g + T P g) = P Q T g + P Q T g \sin\alpha$$

$$S = \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{T g}{P R^2} + \frac{T g}{Q R^2}} \cdot \frac{T g}{R^2}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$j_3 = g \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{T g}{P R^2} + \frac{T g}{Q R^2}}$$

$$j_1 = g \left(1 - \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{T g}{P R^2} + \frac{T g}{Q R^2}} \cdot \frac{T g}{P R^2}\right)$$

$$j_2 = g \left(\frac{T g}{Q R^2} \cdot \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{T g}{P R^2} + \frac{T g}{Q R^2}} - \sin\alpha\right).$$

Bei einem Cylinder vom Halbmesser R ist $T = \frac{1}{2} M R^2$, für den vorliegenden Fall ist T also $\frac{1}{2} \frac{Q}{g} R^2$. Substituiren wir diesen Werth, so entsteht:

$$S = (1 + \sin\alpha) \frac{P Q}{3 P + Q}$$

$$j_3 = g (1 + \sin\alpha) \frac{2 P}{3 P + Q}$$

$$j_1 = g \left(1 - (1 + \sin\alpha) \frac{Q}{3 P + Q}\right)$$

$$j_2 = g \left(\frac{P}{3 P + Q} (1 + \sin\alpha) - \sin\alpha\right).$$

57. Es werde dieselbe Aufgabe mit Hülfe des d'Alembert'schen Princips gelöst.

Wir gebrauchen außer den Gewichten P und Q auch ihre Massen m_1 und m_2. Die bewegenden Kräfte sind, unter j_1, j_2 und j_3 die Acceleration verstanden:

$$m_1 j_1,\ m_2 j_2 \text{ und } \frac{T}{R^2} j_3.$$

Die Gegenkräfte $-m_1 j_1$, $-m_2 j_2$ und $-\frac{T}{R^2} j_3$ müssen mit den ursprünglich angebrachten Kräften im Gleichgewicht sein, d. h. sowohl für fortschreitende, als auch für drehende Bewegung. Für die letztere ist zu bemerken, daß wir es mit einer veränderlichen Drehachse zu thun haben, indem die aufliegende Seite des Cylinders die jedesmalige Drehachse wird.

Für das vorhandene Gleichgewicht bestehen folgende Bedingungen, wobei daran zu denken, daß j_2 in Bezug auf j_1 negativ zu nehmen ist und daß der Massenwiderstand $\frac{T}{R^2} j_3$ im Umfange des Cylinders, die übrigen Kräfte und Widerstände aber im Schwerpunkte des Körpers wirksam gedacht werden müssen.

$$P - Q \sin\alpha - m_1 j_1 - m_2 j_2 = 0$$

$$P R + Q R \sin\alpha - m_1 j_1 R + m_2 j_2 R - \frac{T}{R^2} j_3 \cdot 2 R = 0.$$

Außerdem ist $j_1 = j_2 + j_3$, daher:

$$P - Q \sin\alpha = (m_1 + m_2) j_1 - m_2 j_3$$

$$P + Q \sin\alpha = (m_1 - m_2) j_1 + m_2 j_3 + 2 \frac{T}{R^2} j_3.$$

Multipliciren wir die erste der Gleichungen mit $m_1 - m_2$, die zweite mit $m_1 + m_2$ und subtrahiren die erste von der zweiten, so entsteht:

$$(P + Q \sin\alpha)(m_1 + m_2) - (m_1 - m_2)(P - Q \sin\alpha)$$
$$= j_3 \left(m_2 (m_1 + m_2) + 2 (m_1 + m_2) \frac{T}{R^2} + (m_1 - m_2) m_2 \right)$$

$$j_3 = \frac{\frac{P}{m_1} + \frac{Q}{m_2} \sin\alpha}{1 + \frac{T}{m_2 R^2} + \frac{T}{m_1 R^2}},$$

oder, statt der Massen die Gewichte eingeführt:

$$j_3 = g \frac{1 + \sin\alpha}{1 + \frac{T g}{Q R^2} + \frac{T g}{P R^2}}.$$

Weiter ist:

$$j_1 = \frac{P - Q \sin \alpha}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} j_3$$

$$j_1 = g\left(1 - \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \frac{T g}{Q R^2} + \frac{T g}{P R^2}} \cdot \frac{T g}{P R^2}\right)$$

$$j_2 = \frac{P - Q \sin \alpha}{m_2} - \frac{m_1}{m_2} j_1$$

$$j_2 = g\left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 + \frac{T g}{Q R^2} + \frac{T g}{P R^2}} \cdot \frac{T g}{Q R^2} - \sin \alpha\right).$$

Die Spannung S in dem Seile entsteht durch die gegenseitige Zerstörung von P und $-m_1 j_1$. Es ist also:

$$S = P - m_1 j_1$$

$$S = \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \frac{T g}{Q R^2} + \frac{T g}{P R^2}} \cdot \frac{T g}{R^2}.$$

Nehmen wir wieder den Körper als Cylinder, T also $= \frac{1}{2} m_2 R^2$, und lassen die geneigte Ebene in eine verticale übergehen, so erhalten wir (Fig. 308):

Fig. 308.



$$j_1 = g \frac{3P - Q}{3P + Q}$$

$$j_2 = -g \frac{P + Q}{3P + Q}$$

$$j_3 = g \frac{4P}{3P + Q}$$

$$S = \frac{2PQ}{3P + Q}.$$

Die Acceleration j_1 wird positiv bleiben, wenn P sinkt, sie wird beim Steigen von P negativ und endlich Null, wenn P seinen Ort behauptet. Dieser letzte Fall tritt auch ein, wenn das Seilende, anstatt über die feste Rolle geführt zu werden, durch irgend eine Kraft festgehalten wird.

Setzen wir $j_1 = 0$, so ist:

$$P = \tfrac{1}{3} Q$$

und

$$\left.\begin{array}{l} j_2 = -\tfrac{2}{3} g \\ j_3 = \tfrac{2}{3} g \end{array}\right\} \text{ d. h. } j_2 = -j_3$$

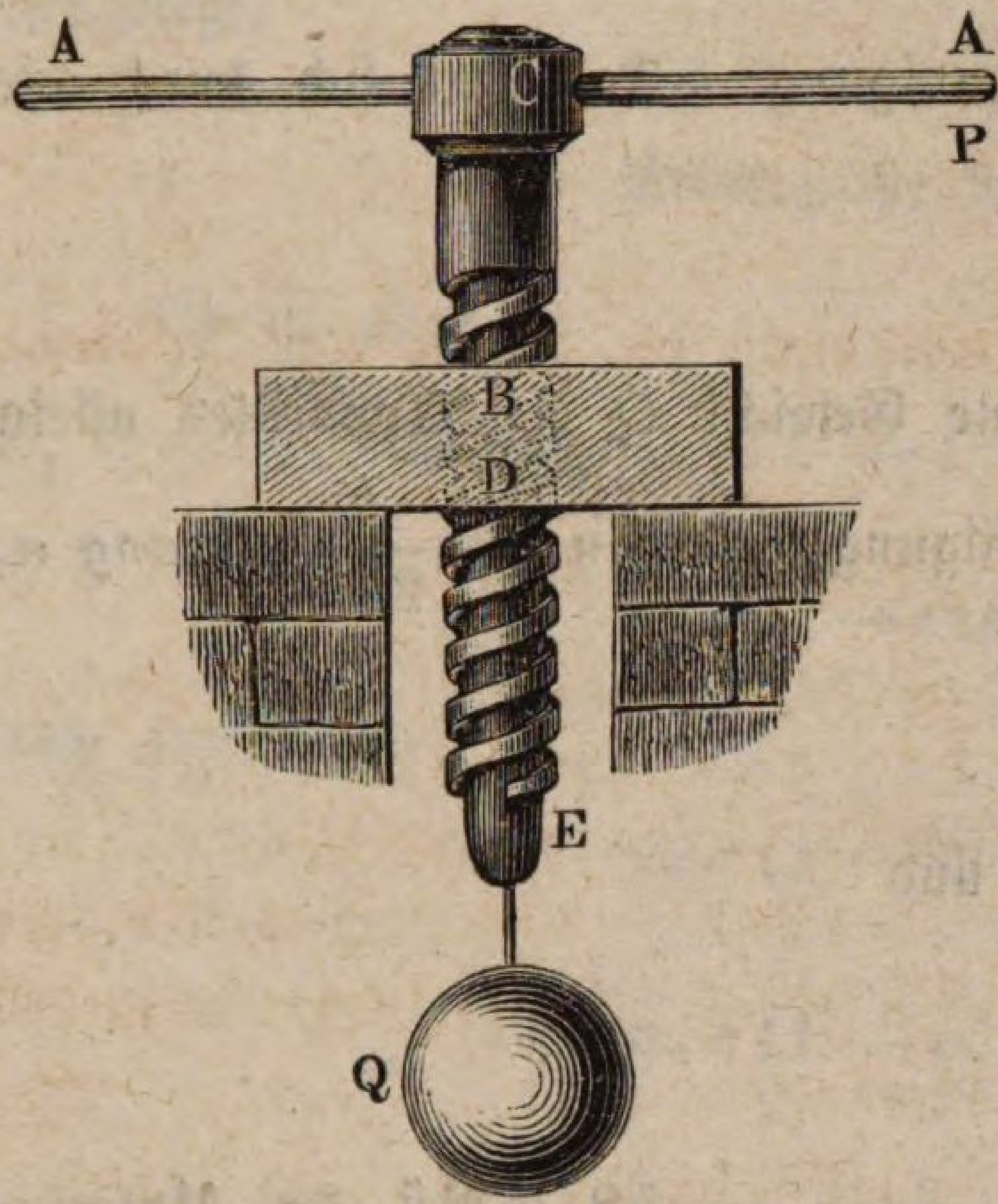
$$S = \tfrac{1}{3} Q.$$

Für diese Annahme ist also die Acceleration der fortschreitenden Bewegung gleich der entgegengesetzten Acceleration der drehenden am Umfange des

Cylinders. Derselbe bewegt sich daher vollkommen rollend in senkrechter Richtung aufwärts, was sich ohne Aufhören wiederholen wird, wenn man nach dem Ablaufen des Cylinders die Kraft $\frac{1}{3}Q$ stets von Neuem wirken läßt.

58. An den Querarm AA der Schraube E (Fig. 309) werde eine gewisse Arbeitgröße L übertragen, wodurch sich die Schraube aus dem ruhenden Zustande allmälig in Bewegung setzen und endlich die Geschwindigkeit v, bei einer gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeit ω erlangen mag. Es sind die Bewegungsverhältnisse zu ermitteln.

Fig. 309.



Bezeichnen wir mit T das Trägheitsmoment der Schraube nebst Zubehör, mit r den mittleren Halbmesser der Schraube und mit h deren Ganghöhe, sowie mit Q und M das Gewicht und die Masse der, bei der Bewegung, niedersinkenden Theile, so ist die von der Maschine aufgenommene lebendige Kraft:

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} T \omega^2.$$

Es ist ferner $\frac{h}{2 r \pi} = \frac{v}{r \omega}$ und deshalb diese lebendige Kraft:

$$\frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \frac{T}{r^2} \left(\frac{2 r \pi}{h}\right)^2 v^2,$$

oder wenn wir die auf den Umfang reducirte Masse $\frac{T}{r^2}$ der sich drehenden Körper mit M_1 bezeichnen:

$$\frac{1}{2} v^2 \left(M + M_1 \left[\frac{2 r \pi}{h}\right]^2\right).$$

Der im Umfange der Schraube zu überwindende Widerstand P_1 ist nach Nr. 15 der Uebungen des dritten Capitels:

$$P_1 = Q \frac{h}{2 \pi r} - \mu Q \frac{4 \pi^2 r^2 + h^2}{2 \pi r (2 \pi r + \mu h)}.$$

Ist der von P_1 während der Bewegung zurückgelegte Weg, im Sinne der Richtung von P_1 gemessen, gleich x, und der Weg von Q gleich s, wobei x und s sich durch die Proportion $\frac{h}{2 r \pi} = \frac{s}{x}$ bestimmen, so ist $P_1 x$ die von dem Widerstande verrichtete Arbeitgröße:

$$P_1 x = Q s \left(1 - \mu \frac{4 \pi^2 r^2 + h^2}{h (2 \pi r + \mu h)}\right).$$

Berücksichtigt man, daß bei der Bewegung die Arbeitgröße Qs die an die Maschine übertragene Arbeitgröße L unterstützt, und daß demnach nur die Arbeitgröße der Reibung und der Massenwiderstände zu erzeugen ist, so ergiebt sich als Endgleichung:

$$L + Qs\left(1 - \mu \frac{4\pi^2 r^2 + h^2}{h(2\pi r + \mu h)}\right) = \frac{1}{2} v^2 \left(M + M_1 \left[\frac{2r\pi}{h}\right]^2\right),$$

aus welcher sich v berechnen läßt, sobald s als bekannt vorausgesetzt wird. Die Beschleunigung j der niedersinkenden Theile findet sich dann aus der Gleichung $s = \frac{v^2}{2j}$, und die Winkelbeschleunigung ι bestimmt sich durch die Proportion:

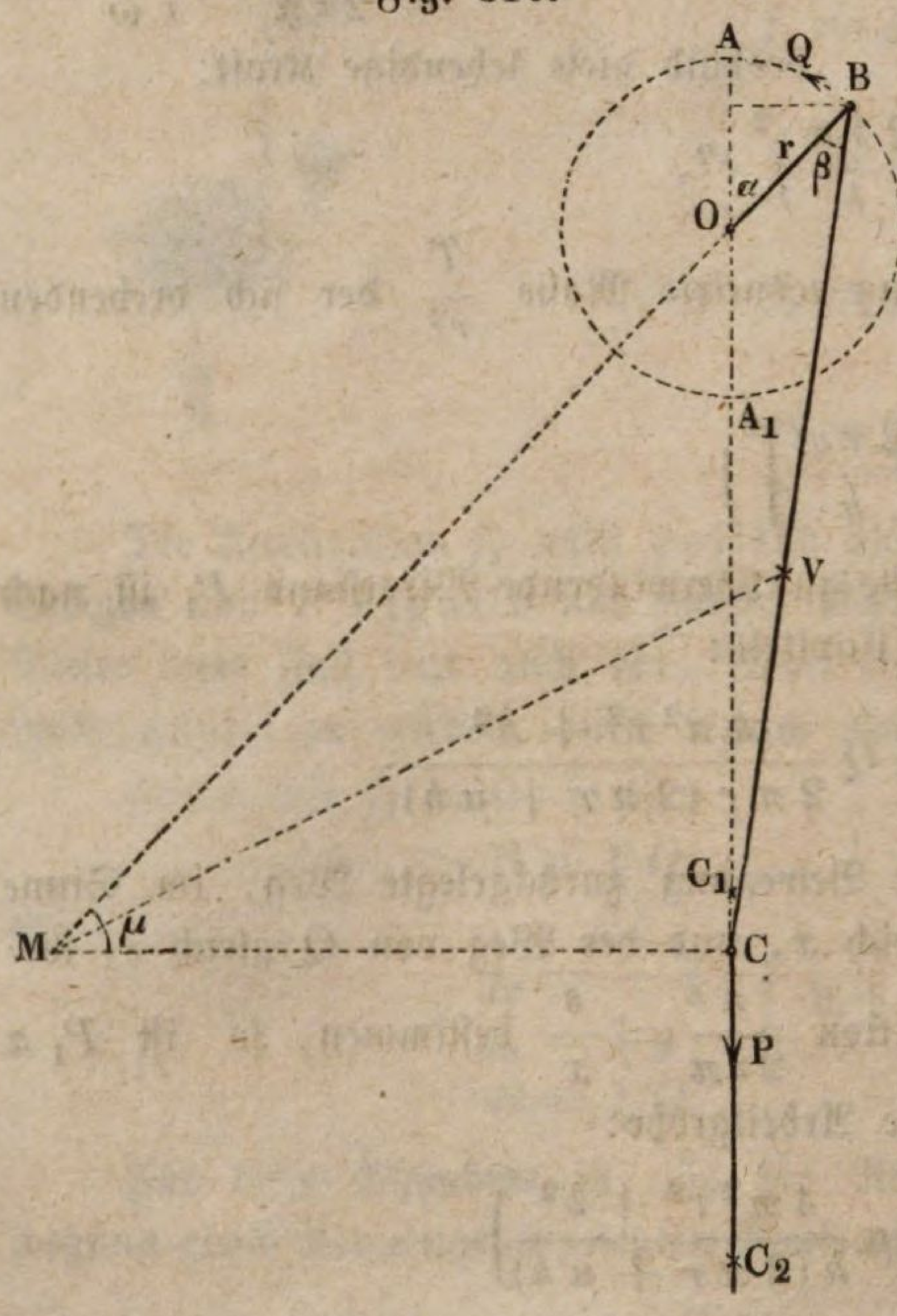
$$\frac{h}{2\pi} = \frac{j}{\iota}.$$

Wird die Bewegung durch das eigene Gewicht Q des Apparates allein hervorgerufen, so ergeben sich als Beschleunigungen, wenn wir $\frac{h}{2\pi r} = tang\,\alpha$, $s = \frac{v^2}{2j}$ und $\mu = tang\,\vartheta$ setzen:

$$j = \frac{Q\,tang\,\alpha\,tg\,(\alpha - \vartheta)}{M\,tang\,\alpha^2 + M_1} \text{ und}$$

$$\iota = \frac{1}{r}\,j\,cotg\,\alpha.$$

Fig. 310.



59. Bei der Untersuchung der Bewegungsverhältnisse der Krummzapfen, in Nr. 30 dieser Uebungen, ist die Voraussetzung gemacht worden, daß die Lenkerstange während der Bewegung ihrer ursprünglichen Richtung parallel bleibe, und andererseits ist die Masse dieser Lenkerstange ganz vernachlässigt worden. Die dort für doppelt wirkende Krummzapfen aufgestellte Gleichung soll in Bezug auf diese beiden Punkte vervollständigt werden.

Es sei (Fig. 310) P die in Richtung der Stange C_1CC_2 wirkende Betriebskraft, und die durch diese Stange geradlinig zu bewegende Masse M_1; Q

sei der auf den Kurbelkreis reducirte Widerstand und T das Trägheitsmoment der um den Wellenmittelpunkt O rotirenden Massen; $OB = r$ Länge der Kurbel, $BC = l$ Länge der Lenkerstange, und M_2 deren Masse. Die Bewegung verfolgen wir von einem der todten Punkte A aus, zu welcher Zeit das Ende C des Lenkers sich in C_1 befunden, und die rotirende Welle die Winkelgeschwindigkeit ω_1 gehabt haben mag. Nach Drehung der Kurbel um den Winkel α sei diese Geschwindigkeit gleich ω_2; Q ist also während des Bogens AB zu überwinden gewesen, und P hat den Weg $C_1 C$ dabei zurückgelegt.

Arbeitgröße von $Q = Q r \alpha$

Arbeitgröße von $P = P . C_1 C$.

Es ist aber

$$C_1 C = AC - AC_1 = AC - l = r(1 - \cos\alpha) + \sqrt{l^2 - (r \sin\alpha)^2} - l$$

$$= r(1 - \cos\alpha) + l\sqrt{1 - \left(\frac{r \sin\alpha}{l}\right)^2} - l,$$

und annähernd:

$$= r(1 - \cos\alpha) + l\left(1 - \tfrac{1}{2}\left[\frac{r \sin\alpha}{l}\right]^2\right) - l$$

$$= r(1 - \cos\alpha) - \frac{(r \sin\alpha)^2}{2l}.$$

Die für die Bewegung nutzbare Arbeitgröße ist deshalb, wenn wir noch, der Theorie des doppelten Krummzapfens gemäß, $Q = \frac{2}{\pi} P$ setzen:

$$P r \left\{1 - \cos\alpha - \frac{r}{2l} \sin\alpha^2 - \frac{2}{\pi}\alpha\right\}.$$

Die lebendige Kraft der rotirenden Massen ist $\frac{1}{2} T(\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2)$.

Zur Bestimmung der lebendigen Kraft für die Masse M_1 müssen wir zuerst die Geschwindigkeit v des Punktes C aus der Geschwindigkeit $r\omega_2$ des Punktes B berechnen. Die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Differenzen der in zwei aufeinanderfolgenden Zeitmomenten zurückgelegten Wege:

$$\frac{r\omega_2}{v} = \frac{r(\alpha_1 - \alpha)}{r\{1 - \cos\alpha_1 - 1 + \cos\alpha\} - \frac{r^2}{2l}\{\sin\alpha_1{}^2 - \sin\alpha^2\}}$$

$$= \frac{\alpha_1 - \alpha}{\cos\alpha - \cos\alpha_1 - \frac{r}{2l}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha)(\sin\alpha_1 - \sin\alpha)}$$

$$= \frac{\alpha_1 - \alpha}{2\sin\frac{\alpha + \alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_1 - \alpha}{2} - \frac{r}{2l} 2\sin\frac{\alpha_1 + \alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1 - \alpha}{2} 2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha}{2}}.$$

Geht man in diesem Ausdruck zur Grenze über, d. h. läßt man α immer mehr und mehr dem Werthe α_1 gleich werden, so ist für den Grenzfall $sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{2}$ und $cos \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = 1$. Nachdem dies geschehen und der Factor $\alpha_1 - \alpha$ weggehoben, setzen wir $\alpha_1 = \alpha$ und erhalten:

$$\frac{r\,\omega_2}{v} = \frac{1}{sin\,\alpha - \frac{r}{2\,l}\,sin\,2\,\alpha},$$

oder
$$v = r\,\omega_2 \left((sin\,\alpha - \frac{r}{2\,l}\,sin\,2\,\alpha\right)$$

und die lebendige Kraft der Masse M_1, für welche in dem Punkte C_1, $v=0$ ist:

$$\tfrac{1}{2}\,M_1\,(r\,\omega_2)^2 \left(sin\,\alpha - \frac{r}{2\,l}\,sin\,2\,\alpha\right)^2.$$

Die einzelnen Punkte der Lenkerstange $B\,C$ bewegen sich in verschiedenen krummen Linien und haben demgemäß auch verschiedene Geschwindigkeiten. Aus dem Grunde muß man die ganze Masse M_2 dieser Stange auf die einzelnen Punkte vertheilt denken, für jedes Massentheilchen das Trägheitsmoment bestimmen, und erhält dann in der Summe dieses letzteren das Trägheitsmoment der Gesammtmasse M_2. Die aufeinanderfolgenden Lagen der Lenkerstange können n. §. 53 durch Drehungen um bestimmte Punkte der Ebene erhalten werden, welche von Moment zu Moment ihren Ort ändern. Da man für die beiden Endpunkte B und C der Lenkerstange die Wege kennt, so läßt sich für jede Lage derselben das Momentancentrum durch Construction finden. Für die in der Figur gezeichnete Lage ist M, der Durchschnitt der in C zu $C_1\,C_2$ errichteten Normale und der Verlängerung von $B\,O$, das augenblickliche Drehungscentrum, d. h. alle Punkte der Lenkerstange beschreiben im nächsten Augenblicke unendliche kleine Kreisbögen um M als Mittelpunkt, welche unendlich kleinen Wege zugleich den betreffenden Geschwindigkeiten proportional sind. Bezeichnen wir den unendlich kleinen Mittelpunktswinkel bei dieser augenblicklichen Drehung mit ε, so ist der Weg von C gleich $MC\,.\,\varepsilon$, der von B gleich $M\,B\,.\,\varepsilon$ und der des beliebigen Punktes V gleich $M\,V\,.\,\varepsilon$. Nennen wir daher die Geschwindigkeit des Punktes V, v_1, so ist:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{MV.\varepsilon}{MC.\varepsilon} = \frac{M\,V}{M\,C} \text{ und}$$

$$v_1 = \frac{M\,V}{M\,C}\,v = \frac{M\,V}{M\,C}\,r\,\omega_2 \left(sin\,\alpha - \frac{r}{2\,l}\,sin\,2\,\alpha\right).$$

Es ist:
$$\frac{M\,C}{l} = \frac{sin\,\beta}{sin\,\mu}$$

$$M\,V^2 = MC^2 + CV^2 - 2\,MC\,.\,C\,V\,cos\,\gamma.$$

Für die in der Praxis vorkommenden Constructionen kann man γ annähernd gleich $1 R$ und $\beta = \alpha$ nehmen, dann ist $\sin \mu = \cos \beta = \cos \alpha$ und daher $M C^2 = (l \tang \alpha)^2$ und $M V^2 = (l \tang \alpha)^2 + x^2$, wenn wir $C V$ mit x bezeichnen. Hiernach ist:

$$v_1^2 = (r \omega_2)^2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2 l} \sin 2 \alpha\right)^2 \left(1 + \left[\frac{x}{l} \cotg \alpha\right]^2\right).$$

und die lebendige Kraft der im Punkte V vereinigten Masse $\frac{M_2}{n}$ gleich:

$$\tfrac{1}{2} \frac{M_2}{n} v_1^2.$$

Die Summe dieser Ausdrücke giebt die lebendige Kraft der Lenkerstange für den Drehungswinkel α der Kurbel. Zu dem Ende müssen wir in dem Ausdrucke für v_1 nach einander statt x schreiben:

$$\frac{l}{n}, 2 \frac{l}{n}, 3 \frac{l}{n}, 4 \frac{l}{n} \cdots \frac{n l}{n}.$$

Die ganze lebendige Kraft ist demnach:

$$\tfrac{1}{2} \frac{M_2}{n} (r \omega_2)^2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2 l} \sin 2 \alpha\right)^2 \left\{n + \left(\frac{\cotg \alpha}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} M_2 (r \omega_2)^2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2 l} \sin 2 \alpha\right)^2 (1 + \tfrac{1}{3} \cotg \alpha^2).$$

Setzen wir hierin annähernd $\frac{r}{2 l} \sin 2 \alpha = 0$, was allerdings blos für eine unendlich lange Lenkerstange richtig ist, so ist die lebendige Kraft derselben:

$$\tfrac{1}{2} M_2 (r \omega_2)^2 (\sin \alpha^2 + \tfrac{1}{3} \cotg \alpha^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} M_2 (r \omega_2)^2 \frac{1 + 2 \sin \alpha^2}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} M_2 (r \omega_2)^2 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} M_2 (r \omega_2 \sin \alpha)^2.$$

Der erste Summand sagt, daß man $\frac{1}{3}$ der Masse der Lenkerstange der rotirenden Masse hinzufügen, der zweite dagegen, daß man die geradlinig bewegte Masse M_1 um $\frac{2}{3}$ der Lenkerstange vermehren muß, wenn man das Trägheitsmoment der letzteren vernachlässigen will. Wir setzen demnach:

$$T_1 = T + \tfrac{1}{3} M_2 r^2 \text{ und } M' = M_1 + \tfrac{2}{3} M_2$$

und erhalten als Ausgangsgleichung:

$$P r \left\{1 - \cos \alpha - \frac{r}{2 l} \sin \alpha^2 - \frac{2}{\pi} \alpha\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} T_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2) + \tfrac{1}{2} M' (r \omega_2)^2 \left(\sin \alpha - \frac{r}{2 l} \sin 2 \alpha\right)^2.$$

Hieraus läßt sich ω_2 für jeden beliebigen Ausschlagwinkel α der Kurbel berechnen. Aus dem Früheren ist bereits bekannt, daß ω_2 den Minimalwerth

erhält für $\alpha = 39^\circ\, 32'\, 19{,}5'' = 0{,}2196\, \pi$, und den Maximalwerth erreicht für $\alpha = 140^\circ\, 27'\, 40{,}5'' = 0{,}7804\, \pi$.

Diese beiden Winkel mit α_1 und α_2, sowie die dazu gehörigen Winkelgeschwindigkeiten mit ω_1 und ω_2 bezeichnet, lassen wir für die todten Punkte der Kurbelwarze die mittlere Winkelgeschwindigkeit ω zu, und nehmen an, daß die Differenz dieser Grenzgeschwindigkeiten $\frac{1}{a}$ von der mittleren betrage. Dann ist $\omega_2 = \omega\left(1 + \frac{1}{2\,a}\right)$, $\omega_1 = \omega\left(1 - \frac{1}{2\,a}\right)$, daher $\omega_2{}^2 - \omega^2$ annähernd $= \frac{1}{a}\,\omega^2$ und $\omega_1{}^2 - \omega^2 = -\frac{1}{a}\,\omega^2$.

Bei Benutzung dieser Substitutionen erhalten wir folgende zwei Gleichungen:

$$P\,r\left(1 - \cos\alpha_1 - \frac{r}{2\,l}\sin\alpha_1{}^2 - \frac{2}{\pi}\,\alpha_1\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\omega^2\left\{M' r^2\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(\sin\alpha_1 - \frac{r}{2l}\sin 2\,\alpha_1\right)^2 - \frac{1}{a}\,T_1\right\},$$

$$P\,r\left(1 - \cos\alpha_2 - \frac{r}{2\,l}\sin\alpha_2{}^2 - \frac{2}{\pi}\,\alpha_2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\omega^2\left\{M' r^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(\sin\alpha_2 - \frac{r}{2l}\sin 2\,\alpha_2\right)^2 + \frac{1}{a}\,T_1\right\}.$$

Diese beiden Gleichungen werden von einander subtrahirt, nachdem wir

$$Pr = Qr\frac{\pi}{2};\ \sin\alpha_2 = \sin\alpha_1;\ \cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1;\ \sin 2\alpha_2 = -\sin 2\alpha_1;\ \alpha_2 = \pi - \alpha_1$$

und $\left(\sin\alpha_1 \pm \frac{r}{2l}\sin 2\,\alpha_1\right)^2 = \sin\alpha_1{}^2\left(1 \pm 2\,\frac{r}{l}\cos\alpha_1\right)$ gesetzt.

$$Q\,r\left(\pi\cos\alpha_1 - \pi + 2\,\alpha_1\right) = \tfrac{1}{2}\,\omega^2\left\{M' r^2 \sin\alpha_1{}^2\left(4\frac{r}{l}\cos\alpha_1 + \frac{2}{a}\right) + \frac{2}{a}\,T_1\right\}.$$

Es ist

$$\alpha_1 = 0{,}21966\,\pi;\ \sin\alpha_1 = \frac{2}{\pi},\ \cos\alpha_1 = \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2 - 4} = 0{,}77121,$$ daher

$$0{,}2105\,Q\,r\,\pi = \omega^2\left\{0{,}4053\,M' r^2\left(1{,}5424\,\frac{r}{l} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a}\,T_1\right\}$$ oder:

$$0{,}211\,Q r\,\pi = (r\,\omega)^2\left\{\left(0{,}63\,\frac{r}{l} + 0{,}41\,\frac{1}{a}\right)\left(M_1 + \tfrac{2}{3}M_2\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{T}{r^2} + \tfrac{1}{3}M_2\right)\right\}.$$

Diese Gleichung läßt sich zur Berechnung des Trägheitsmomentes T der rotirenden Massen, und somit zur Berechnung des Gewichtes eines Schwung=

ringes benutzen. Zu dem Ende setzen wir $Q\,r = 716\,\frac{N}{u}$; $\omega = 0{,}1047\,u$; $\frac{T}{r^2} = M$ und erhalten:

$$43194\,\frac{N}{r^2\,u^3} = \left(0{,}63\,\frac{r}{l} + 0{,}41\,\frac{1}{a}\right)\left(M_1 + \tfrac{2}{3}\,M_2\right) + \frac{1}{a}\left(M + \tfrac{1}{3}\,M_2\right).$$

Für Dampfmaschinen ist durchschnittlich $a = 32$ und $\frac{r}{l} = 0{,}2$, wodurch die vorstehende Gleichung übergeht in:

$$43194\,\frac{N}{r^2\,u^3} = 0{,}14\,M_1 + 0{,}103\,M_2 + \tfrac{1}{32}\,M,$$

worin M die auf den Kurbelkreis reducirte Masse der rotirenden Theile, M_1 die Masse der Kolbenstange und des Kolbens, M_2 die Masse der Lenkerstange, N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken, u die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute und r die Kurbellänge bezeichnet.

60. Das Gewicht des Schwungringes für eine Dampfmaschine von 25 Pferdestärken zu berechnen, deren Schwungradwelle 30 Umdrehungen in der Minute macht, und bei welcher die Haupttheile folgende Abmessungen haben:

Kurbellänge	$r = 0{,}471^m$
Mittlerer Schwungring-Halbmesser	$R = 3{,}8^m$
Kolbendurchmesser	$= 0{,}445^m$
Kolbenhöhe	$= 0{,}078^m$
Länge der Kolbenstange	$= 1{,}05^m$
Mittlerer Durchmesser der Kolbenstange	$= 0{,}059^m$
Länge der Lenkerstange	$= 2{,}355^m$
Mittlerer Durchmesser der Lenkerstange	$= 0{,}065^m$

Masse des gußeisernen Kolbens, beim specifischen Gewicht $7{,}25 = \frac{87{,}952}{g}$;

Masse der gußstählernen Kolbenstange beim specifischen Gewicht $7{,}8 = \frac{22{,}392}{g}$,

$$\text{daher } M_1 = \frac{110{,}344}{g};$$

Masse M_2 der gußstählernen Lenkerstange vom specifischen Gewicht $7{,}8 = \frac{60{,}954}{g}$.

$$(0{,}14\,M_1 + 0{,}103\,M_2)\,r^2 = \frac{4{,}82}{g}$$

$$\frac{1}{g}\cdot 43194\,\frac{N}{u^3}\,g = \frac{392{,}34}{g}$$

$$\tfrac{1}{32}\,M r^2 = \tfrac{1}{32}\,T = \tfrac{1}{32}\cdot 1{,}1\,\frac{A}{g}\,R^2 = \frac{0{,}4964\,A}{g}$$

$$A = \frac{387{,}52}{0{,}4964} = 780^k.$$

Zur Bestimmung der Abmessungen des Schwungringes benutzen wir die Guldin'sche Regel (§. 43) und nennen f den Querschnitt desselben, so ist für Gußeisen:

$$f \,.\, 2\,\pi R \,.\, 1000 \,.\, 7{,}2 = 780$$
$$f = 45{,}414 \;\square^{cm}.$$

Geben wir dem Querschnitt die Form eines Rechteckes, mit den Seiten b und h, wobei b der Wellenachse parallel sein soll, und nehmen $h = 1{,}5\,b$, so ist $b = 5{,}5^{cm}$ und $h = 8{,}25^{cm}$.

Fünftes Capitel.

Von der Elasticität und Festigkeit.

Bei den bisherigen Untersuchungen haben wir Körper vorausgesetzt, die 63
unter allen Umständen den auf sie einwirkenden Kräften zu widerstehen vermochten, die also weder in ihrer inneren Structur noch in ihrer Form durch die äußeren Kräfte irgend welche Veränderungen erlitten. Die Erfahrung lehrt jedoch, daß es für die Widerstandsfähigkeit der inneren Kräfte eine Grenze giebt, und daß nach Ueberwindung derselben durch die äußeren Kräfte eine Zertheilung der Körper die Folge ist. Bei Verwendung der verschiedenen Materialien im Bau- und Maschinenwesen darf nun diese Zertheilung niemals eintreten, die Belastungen der Körper sind deshalb so gering zu wählen, daß die inneren Kräfte noch jederzeit hinreichende Widerstandsfähigkeit besitzen, um nicht allein die Zertheilung des Körpers durch die äußeren Kräfte zu verhindern, sondern auch noch gewisse Sicherheit gegen das Eintreten dieses Grenzfalles zu gewähren. Vor der Zertheilung des Körpers erfährt derselbe eine Formänderung, die von der Größe der daran wirksamen äußeren Kräfte abhängig ist. Die Fähigkeit der inneren Kräfte, eine derartige Formänderung, nachdem die äußeren Kräfte entfernt worden sind, wieder aufzuheben, die verschobenen Moleküle des Körpers in ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzubringen, heißt Elasticität, der Widerstand dagegen, den der Körper vermöge seiner Cohäsionskraft der Zertheilung entgegengesetzt, wird Festigkeit genannt.

Uebersteigt die Wirkung der äußeren Kräfte eine gewisse Größe, so wird die durch dieselbe hervorgerufene Formänderung, nach Wegnahme der Kräfte, ganz oder theilweise eine bleibende sein, es wird dabei der ursprünglich vorhandene Gleichgewichtszustand nicht wieder hergestellt, vielmehr nehmen die Moleküle des Körpers eine neue Gleichgewichtslage an, die hervorgerufene Formänderung ist also zugleich mit einer Volumenänderung verbunden, d. h. die Zertheilung des Körpers beginnt bereits. Der Uebergang von der wieder verschwindenden zur bleibenden Formänderung heißt die Elasticitätsgrenze, und können die Körper, so lange die Belastungen bei denselben diese Grenze der Elasticität nicht hervorrufen, als vollkommen elastisch angesehen werden, die Körper sind dagegen unvollkommen elastisch für Belastungen, welche nur theilweise verschwindende Formänderungen erzeugen.

Die Formänderung, welche durch eine gewisse Belastung eines Körpers veranlaßt wird, sowie die schließlich eintretende Zerstörung desselben hängt bei einer bestimmten Form des Körpers von der Art und Weise ab, wie die äußeren Kräfte auf den Körper einwirken. Wir ziehen allein gerade stabförmige Körper in Betracht, das sind solche, welche durch die Bewegung einer im Allgemeinen veränderlichen ebenen Fläche längs einer geraden Linie in der Weise entstanden gedacht werden, daß die Fläche von der Linie in jeder Lage rechtwinkelig in ihrem Schwerpunkte geschnitten wird. Diese gerade Linie ist die Mittellinie, die Achse des Körpers, jeder normale Schnitt zur Mittellinie wird ein Querschnitt des Körpers genannt. Die auf den Körper wirksamen äußeren Kräfte lassen sich, wie nachgewiesen, unter allen Umständen zu einer Resultante R und einem Kräftepaar $Q\,q$ vereinigen, wobei nicht ausgeschlossen ist, daß ein oder das andere dieser Elemente zu Null werde. Der Coordinatenanfangspunkt, d. i. der Angriffspunkt von R, ist bei der Zusammensetzung der Kräfte beliebig zu wählen, kann also für jeden Querschnitt des Körpers im Schwerpunkt desselben angenommen werden. Die Kraft R, welche zum Querschnitt eine beliebige Lage haben kann, läßt sich in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine R_1 normal zum Querschnitt gerichtet, die andere R_2 in Richtung desselben wirksam ist. Das Kräftepaar $Q\,q$, in beliebiger Lage zu den verschiedenen Querschnitten gedacht, läßt sich ebenfalls in zwei auf einander normal stehende Kräftepaarcomponenten $Q_1\,q_1$ und $Q_2\,q_2$, zerlegen, von denen die Ebene des ersteren normal auf der Querschnittsebene steht, die des letzteren mit der Querschnittsebene zusammenfallen soll. Reduciren sich die äußeren Kräfte auf eine der beiden Kräfte R_1 und R_2 oder auf eins der beiden Kräftepaare $Q_1\,q_1$ und $Q_2\,q_2$, so ist der Körper auf einfache Elasticität und Festigkeit in Anspruch genommen, im anderen Falle haben wir es dagegen mit zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit zu thun. Die einfache Elasticität und Festigkeit zerfällt hiernach in folgende Unterabtheilungen:

1) Lassen sich die äußeren Kräfte für jeden Querschnitt zu einer Resultante vereinigen, die im Schwerpunkte desselben nach Außen ziehend wirkt und den Querschnitt rechtwinkelig schneidet, so erfährt der Körper eine Verlängerung und wird endlich zerrissen (Fig. 311). Der Widerstand des Körpers hiergegen heißt die „absolute oder Zug-Elasticität und Festigkeit".

Fig. 311.

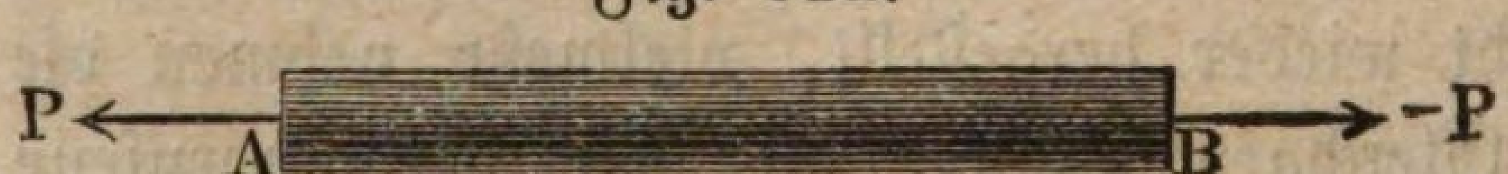


Fig. 312.

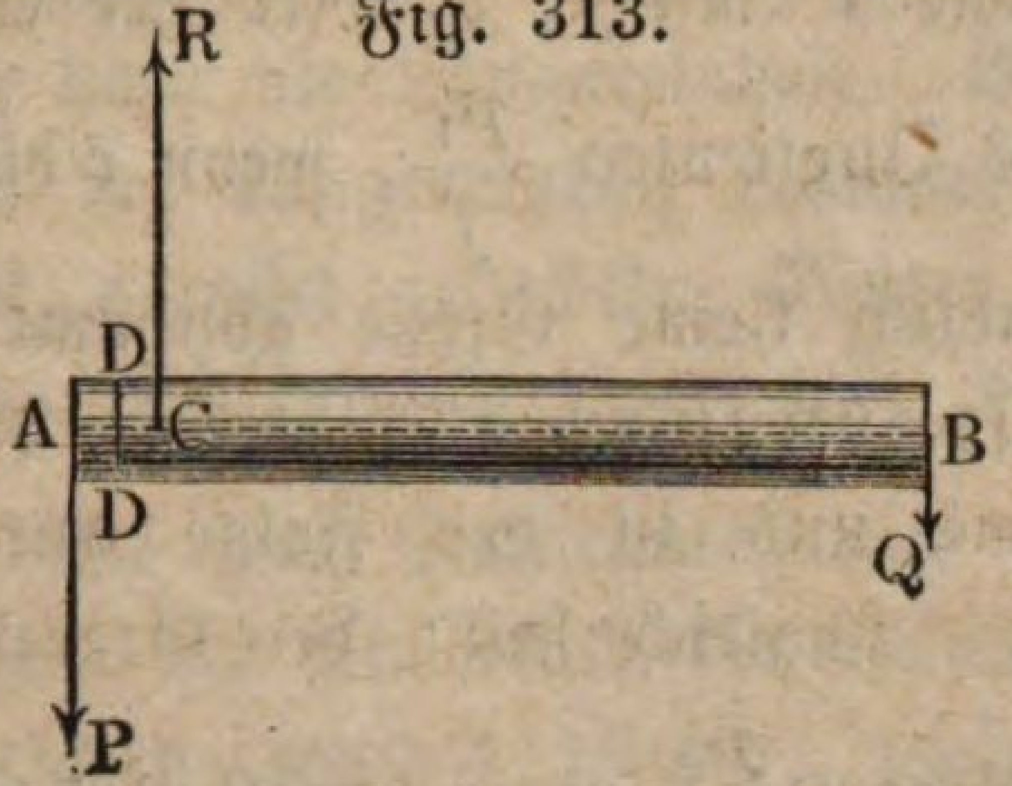


2) Wenn dieselbe Resultante dagegen nach Innen drückend wirksam ist, so entsteht eine Verkürzung und endlich ein Zerdrücken des Körpers (Fig. 312); der Widerstand wird in diesem Falle „rückwirkende oder Druck-Elasticität und Festigkeit" genannt.

3) Lassen sich die äußeren Kräfte für jeden Querschnitt zu einer Resultante vereinigen, welche durch dessen Schwerpunkt geht und in der Quer-

schnittsebene liegt, so kann der Körper in seinen Querschnitten verschoben und endlich abgeschnitten werden (Fig. 313). Man nennt den Widerstand, den der Körper hierbei leistet, die „Schub- oder Scheer-Elasticität und Festigkeit“.

Fig. 313.



4) Reduciren sich die äußeren Kräfte für jeden Querschnitt auf ein Kräftepaar, dessen Ebene normal auf der Querschnittsebene steht, so erfährt der Körper eine Biegung, die bei Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze den Bruch zur Folge hat (Fig. 314). Der Körper leistet hierbei durch seine relative oder Biegungs-Elasticität und Festigkeit Widerstand.

5) Sind endlich die äußeren Kräfte durch ein Paar zu ersetzen, dessen Ebene dem zu untersuchenden Querschnitt parallel läuft, so erfahren die Moleküle des Körpers eine Verdrehung um die Achse, und der Körper wird schließlich abgedreht oder abgewürgt (Fig. 315). Der sich einer derartigen Zerstörung des Körpers entgegenstellende Widerstand heißt Drehungs-Elasticität und Festigkeit.

Fig. 314.

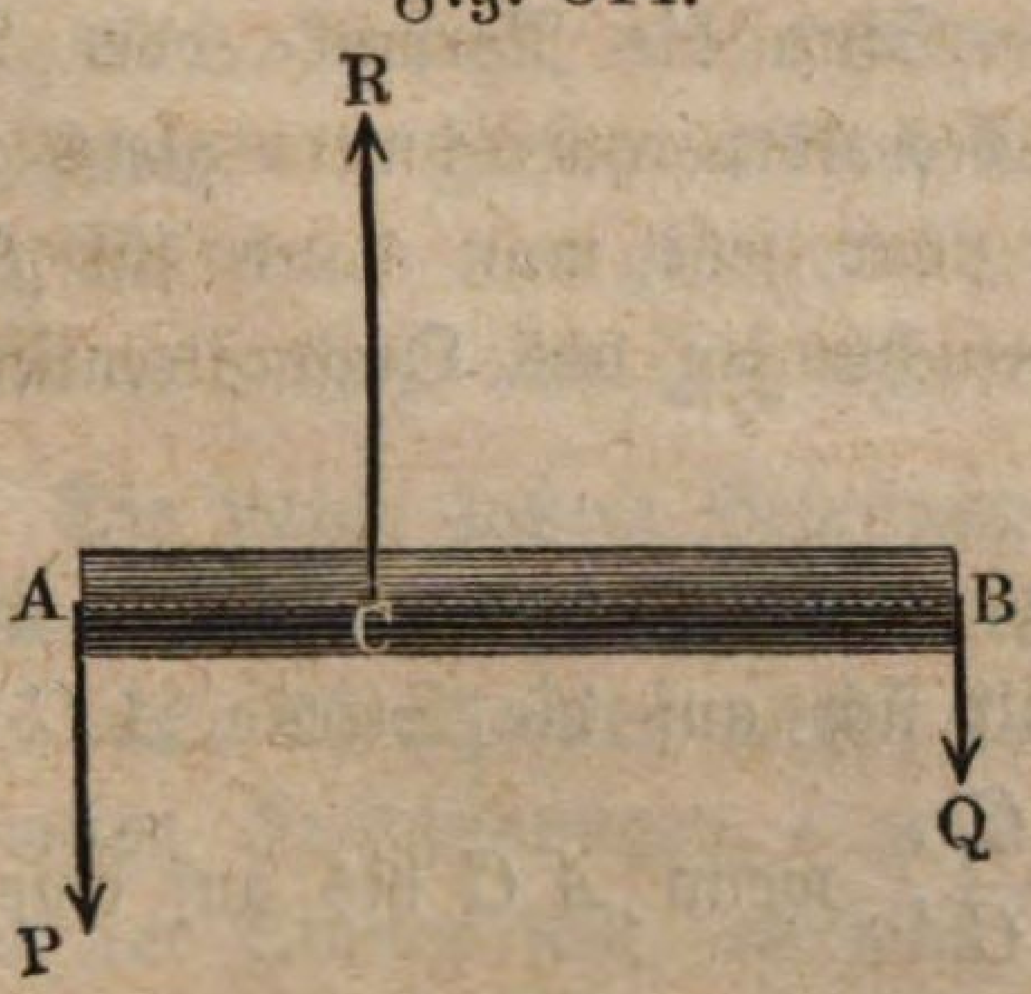
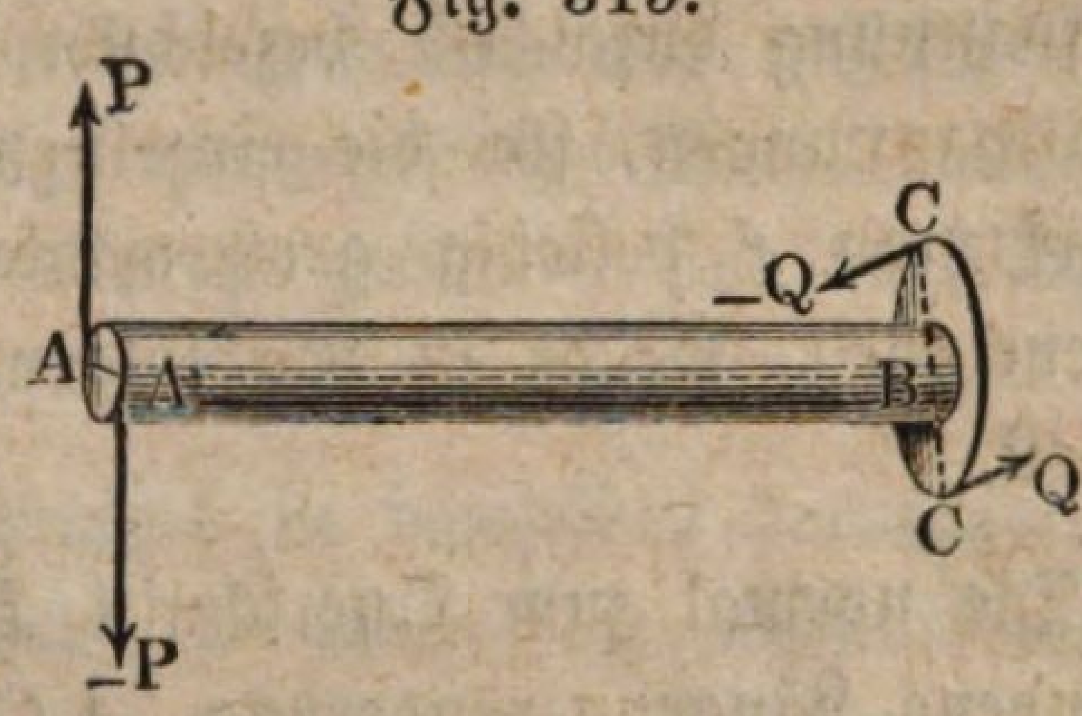


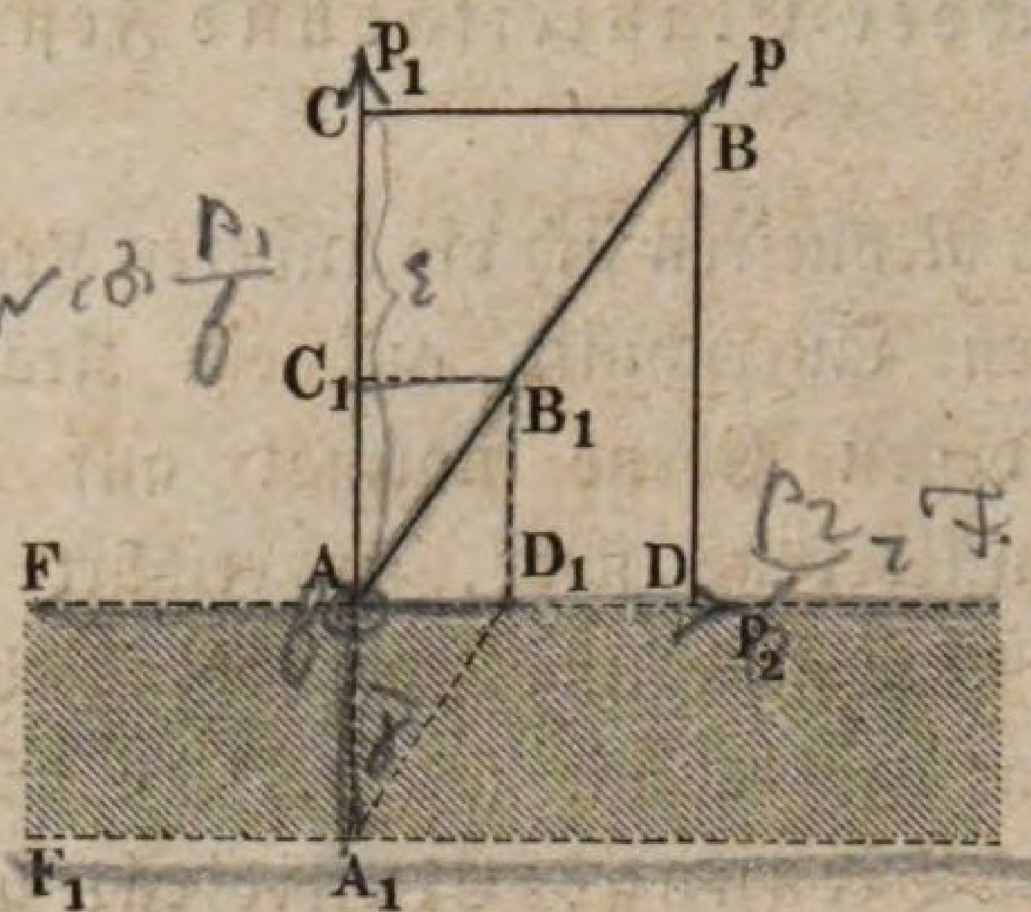
Fig. 315.



Bei der Formänderung eines Körpers nehmen die materiellen Punkte 64
desselben andere Lagen ein, die Abstände derselben sind also einer Veränderung unterworfen, welche in Bezug auf bestimmt angenommene Richtungen als positiv oder negativ aufgefaßt werden können, und welche bei einer bekannten Belastung des Körpers in den einzelnen Punkten, sowie nach den verschiedensten Richtungen verschieden sein können. In der Verbindungslinie AB, der beiden benachbarten Punkte A und B eines Körpers (Fig. 316 a. f. S.), möge durch die äußere Belastung die innere Kraft p hervorgerufen werden, und dabei die Linie AB, gegen den zu A gehörigen Querschnitt F in geneigter Lage angenommen, die Längenveränderung AB_1 erfahren haben. Man zerlege p in die beiden rechtwinkeligen Componenten p_1 und p_2, von denen p_1 normal zur Querschnittsebene F, p_2 dagegen in Richtung derselben wirksam sein mag. Zugleich damit zerfällt die Längenveränderung AB_1 in die beiden Componenten AC_1 und AD_1, während die entsprechenden Componenten von

AB durch AC und AD dargestellt werden sollen. Bezeichnen wir noch den Flächeninhalt des um den Punkt A herumliegenden Theiles der Querschnittsebene F mit f, so wird der Grenzwerth des Quotienten $\frac{p_1}{f}$, wenn f bis auf eine unendlich kleine Größe abnimmt, die **Normalspannung** des Körpers im Punkte A genannt und in der Folge durch σ bezeichnet. Zugleich heißt der Grenzwerth des Quotienten $\frac{p_2}{f}$ unter derselben Voraussetzung die **Tangentialspannung** des Körpers im Punkte A und soll diese durch τ wiedergegeben werden.

Fig. 316.



Während die Tangentialspannungen absolute Größen sind, müssen die Normalspannungen, unter Voraussetzung, daß die Einwirkung der Körpertheilchen auf den Punkt A von der Seite CB her erfolgt, in **absolute** (Zug-) und **rückwirkende** (Druck-) Spannungen oder in eigentliche **Spannungen** und **Pressungen** unterschieden werden, je nachdem p_1 die Richtung von AC oder die von CA zeigt. In Bezug auf diese Unterscheidungen wird die Zugspannung in der Folge durch σ', die Druckspannung durch σ'' bezeichnet werden. Sind die Normal- oder Tangentialspannungen, für die einzelnen Punkte des Körperquerschnitts gleich groß, so darf man f beliebig groß wählen, und zwar setzt man dann für f die Flächeneinheit, welche in den folgenden Untersuchungen das Quadratcentimeter sein soll.

Die normal zum Querschnitt F durch die Einwirkung der äußeren Kräfte entstandene Längenveränderung AC_1 vertheilt sich auf die Strecke AC und es wird der Grenzwerth des Quotienten $\frac{AC_1}{AC}$, wenn AC bis auf eine unendlich kleine Länge abnimmt, die **Ausdehnung** des Körpers im Punkte A genannt und mit ε bezeichnet. Je nachdem p_1 nach AC oder CA wirksam ist, wird die Längenveränderung in einer wirklichen Ausdehnung oder in einer Zusammendrückung bestehen, wofür wir zur Unterscheidung die Bezeichnungen ε' und ε'' wählen wollen. Der von dem Punkte A in der Querschnittsebene F zurückgelegte Weg AD_1 stellt dagegen die Verschiebung des Punktes A in seinem Querschnitt vor. Denken wir zur weiteren Untersuchung derselben den mit F in unendlich kleiner Entfernung parallel laufenden Querschnitt F_1 und bezeichnen den, im unbelasteten Zustande des Körpers, normal über A gelegenen Punkt mit A_1, so geht durch die Verschiebung die normale Linie $A_1 A$ in die schiefe $A_1 D_1$ über. Hiernach nennen wir specieller den Grenzwerth des Quotienten $\frac{AD_1}{AA_1}$ für AA_1 als unendlich kleine Größe, die **Verschiebung** der Ebene F im Punkte A und bezeichnen diese mit γ, welcher

Bruch ohne jegliches Zeichen in Rechnung zu bringen ist. Erfährt die Linie AC in allen ihren Punkten dieselbe Ausdehnung, resp. Zusammendrückung, so kann man AC beliebig groß nehmen, und zwar wählt man in diesem Falle dazu die Längeneinheit. Ebenso darf man bei der Verschiebung AA_1 gleich der Längeneinheit nehmen, wenn die zwischen den Ebenen F und F_1 damit parallel gedachten Ebenen in den Durchschnittspunkten mit der Linie AA_1 dieselben Verschiebungen der Größe und Richtung nach erfahren.

Die der Elasticitätsgrenze entsprechenden Ausdehnungen und Verschiebungen, die also durch die Belastungen in der Praxis, an keiner Stelle hervorgerufen werden dürfen, vielmehr als die Maximalwerthe vollkommener Elasticität gelten, mögen mit (ε'), (ε''), (γ) bezeichnet werden. Diese Maximalwerthe können im Allgemeinen in einem belasteten Körper von Punkt zu Punkt, resp. von Querschnitt zu Querschnitt veränderlich sein, sie können sich auch, was die Ausdehnungen und Zusammendrückungen anbetrifft, in Bezug auf die zu Grunde gelegte Richtung, ob normal oder schief zum Querschnitt, als veränderlich erweisen. Bei homogenen Körpern, d. h. Körpern, die in allen Punkten dieselbe Beschaffenheit haben, wozu wir die verschiedenen Hölzer rechnen, sind (ε') und (ε'') vom Material und von der Richtung, in der die Längenveränderung vor sich geht, (γ) dagegen vom Material, von der betreffenden Ebene und deren Schubrichtung abhängig. Bei isotropen Körpern, d. h. solchen, welche in den einzelnen Punkten nach allen Richtungen als homogen angesehen werden dürfen, wozu die gegossenen Metalle unbedingt, die geschmiedeten und gewalzten dagegen annähernd gehören, sind die Maximalwerthe (ε'), (ε'') und (γ) nur vom Material abhängig.

Die durch äußere Belastung eines Körpers in demselben hervorgerufenen Normal- und Tangentialspannungen müssen, so lange die Elasticitätsgrenze dabei nicht überschritten wird, bei Wegnahme der äußeren Belastung die entstandenen Ausdehnungen ε und Verschiebungen γ vollständig wieder aufzuheben im Stande sein, es muß also für jeden Punkt des belasteten Körpers zwischen σ und ε, sowie zwischen τ und γ eine gewisse Beziehung bestehen, die aber nur durch Versuche festgestellt werden kann. Die Erfahrung lehrt nun, daß die in einem Punkte des Körpers auftretende Spannung σ von einer bestimmten Ausdehnung ε in Richtung der Spannung begleitet ist und daß der Quotient $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ innerhalb der Elasticitätsgrenze, für positive und negative Werthe von σ und ε einen constanten Werth hat, den man den Elasticitätsmodul des Materials nennt und mit E bezeichnet. In gleicher Weise entspricht einer bestimmten Tangentialspannung τ eine bestimmte Verschiebung γ, beide auf denselben Punkt der Ebene und dieselbe Schubrichtung in derselben bezogen, wobei sich wiederum der Quotient $\frac{\tau}{\gamma}$ als constant herausgestellt hat, welcher Werth mit C bezeichnet und Schub-

elasticitätsmodul genannt wird. Als Grundformeln für die Elasticität ergeben sich hiernach:

$$\frac{\sigma'}{\varepsilon'} = \frac{\sigma''}{\varepsilon''} = E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (132)$$

$$\frac{\tau}{\gamma} = C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (133)$$

Die vorstehenden Formeln sind zur Berechnung der Spannungen zu benutzen, so lange sich der Körper noch innerhalb der Elasticitätsgrenze befindet, sie behalten aber auch noch für diese Grenze selbst annähernd Gültigkeit, und müssen die hier auftretenden Spannungen als die zulässigen Maximalwerthe angesehen werden. Dieselben heißen Tragmodul für Zug, Druck und Verschiebung und werden analog dem Früheren mit (σ'), (σ''), (τ) bezeichnet. Es ist hiernach also:

$$\left.\begin{array}{l}(\sigma') = E\,(\varepsilon') \\ (\sigma'') = E\,(\varepsilon'') \\ (\tau) = C\,(\gamma)\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (134)$$

Ueber die Elasticitätsgrenze hinaus hört die Anwendbarkeit der obigen Formeln 132 bis 134 auf und müssen den Untersuchungen über die Zertheilung der Körper wieder andere Versuche zu Grunde gelegt werden. Diejenigen Werthe von σ', σ'' und τ, welche der Zertheilung des Körpers entsprechen, die durch Zerreißen, Zerdrücken oder Verschieben vor sich gehen kann, heißen die Festigkeitsmodul des Materials und werden in der Folge durch K', K'' und T bezeichnet.

In der folgenden Tabelle I sind die Werthe von E, (σ'), (σ''), K', K'' und T für die in der Praxis hauptsächlich zur Verwendung kommenden Materialien zusammengestellt, und beziehen sich dieselben auf das Kilogramm als Krafteinheit und das Quadratcentimeter als Flächeneinheit. In der Tabelle II ist diesen Werthen dagegen das preußische Pfund gleich $\frac{1}{2}$ Kilogramm als Krafteinheit, und der Quadratzoll als Flächeneinheit zu Grunde gelegt.

Namen der Materialien.	Tabelle I. Einheiten: Kilogramm und Quadratcentimeter.						Tabelle II. Einheiten: Pfund und Quadratzoll.					
	E	(σ')	(σ'')	K'	K''	T	E	(σ')	(σ'')	K'	K''	T
Tannenholz	130000	240	180	850	600	250	1800000	3300	2500	12000	8200	3400
Eichenholz	120000	240	200	800	700	300	1642000	3300	2740	11000	9600	4100
Gußeisen	1000000	750	1500	1250	7500	2000	13681000	10300	21000	17100	103000	27400
Schmiedeeisen in Stäben	2000000	1400	1400	4000	3500	3500	27400000	19200	19200	55000	48000	48000
Eisenblech	1750000	1400	1400	3500	3000	—	24000000	19200	19200	48000	41000	—
Eisendraht	2100000	2400	—	6500	—	—	28700000	33000	—	89000	—	—
Stahl	2250000	2700	3000	8000	7000	5000	31000000	37000	41100	109500	96000	68400
Gußstahl	2750000	6500	—	10000	12000	7500	37600000	89000	—	137000	164200	103000
Kupfer	1100000	300	—	2500	6000	—	15050000	4100	—	34000	82000	—
Messing	650000	480	—	1250	11000	—	8900000	6600	—	17000	150500	—
Blei	50000	100	—	130	520	—	6840000	1368	—	1800	7200	—
Hanfseile, schwach	—	—	—	600	—	—	—	—	—	8200	—	—
Hanfseile, stark	—	—	—	300	—	—	—	—	—	4100	—	—
Drahtseile	—	—	—	3500	—	—	—	—	—	48000	—	—
Kettentaue	—	—	—	3650	—	—	—	—	—	50000	—	—
Lederriemen	731	160	—	270	—	—	10000	2200	—	3700	—	—
Basalt	—	—	—	—	1970	—	—	—	—	—	27000	—
Granit	—	—	—	—	580	—	—	—	—	—	8000	—
Sandstein	—	—	—	—	290	—	—	—	—	—	4000	—
Kalkstein	—	—	—	—	366	—	—	—	—	—	5000	—
Ziegelstein	—	—	—	—	58	—	—	—	—	—	800	—
Mörtel	—	—	—	—	37	—	—	—	—	—	500	—
Ziegelmauerwerk	—	—	—	—	40	—	—	—	—	—	550	—

Die Zahlenwerthe vorstehender Tabellen sind als Mittelwerthe vielfältiger Versuche an Materialien der verschiedensten Qualität anzusehen und deshalb mit Vorsicht zu benutzen. Bei wichtigen Bauausführungen müssen daher die zur Verwendung kommenden Materialien, in Bezug auf ihre Elasticität und Festigkeit einer Prüfung unterworfen werden. Die Zahlen der Tabelle I liefern durch Multiplication mit 13,681 die der Tabelle II.

Ueber den Schub-Elasticitätsmodul C liegen directe Versuche nicht vor; aus genaueren theoretischen Untersuchungen über die Schub-Elasticität, mit Benutzung der von den bedeutendsten Physikern angestellten Versuche, ist für isotrope Materialien, also für Metalle, folgende Beziehung zwischen C und E in Anwendung zu bringen:

$$C = (0{,}375 \text{ bis } 0{,}4)\, E \quad \ldots\ldots\ldots \quad (135)$$

Für Hölzer kann dieser Schub-Elasticitätsmodul nur aus directen Versuchen über die Drehfestigkeit derselben entnommen werden, und hat sich darnach im Durchschnitt ergeben für:

	Einheiten: Kilogramm und Quadratcentimeter.	Einheiten: Pfund und Quadratzoll.
	C	C
Kiefernholz	7000	96000
Eichenholz	8000	109450
Buchenholz	12000	164200

66 Die Belastungen eines Körpers dürfen bei praktischen Ausführungen niemals so groß gewählt werden, daß in irgend einem Punkte die Spannungen die, in der Formel 134 angegebenen, Maximalwerthe erreichen, vielmehr müssen diese Spannungen jederzeit viel kleiner bleiben. Die erfahrungsmäßig zulässigen Spannungen wollen wir Sicherheitsmodul nennen und mit k', k'' und t bezeichnen, deren Größe gewöhnlich als aliquoter Theil dieser Maximalwerthe, oder wo dieselben fehlen sollten, als aliquoter Theil der Festigkeitsmodul angegeben wird. Eine feste Regel läßt sich hierfür nicht aufstellen, da praktische Rücksichten mancherlei Art hierbei maßgebend sind, und dem Constructeur deshalb in den betreffenden Fällen die geeignete Wahl überlassen bleiben muß. Für gewöhnlich benutzt man zur Bestimmung von k für Zug und Druck folgende Angaben:

$$\left.\begin{array}{l} k = (0{,}75 \text{ bis } 0{,}25)\ (\sigma) \\ k = (0{,}25 \text{ bis } 0{,}05)\ K \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (136)$$

Was die zulässige Tangentialspannung t anbetrifft, so läßt sich diese blos zu dem Festigkeitsmodul T in Beziehung bringen, da der Maximalwerth derselben (τ) nicht bekannt ist. Andererseits läßt sich in Folge theoretischer Untersuchungen über die Schubfestigkeit eine Beziehung zwischen k und t ableiten, welche, unter k den kleinsten der beiden Werthe k' und k'' des betreffenden Materials verstanden, durch folgende Gleichungen wiedergegeben wird:

$$\left.\begin{array}{l} t = (0{,}25 \text{ bis } 0{,}05)\ T \\ t = (0{,}75 \text{ bis } 0{,}8)\ k \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (137)$$

In der folgenden Tabelle (entnommen aus Scheffler: „Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken") sind die in der Praxis zulässigen Werthe von $\varepsilon' = \frac{k'}{E}$ und $\varepsilon'' = \frac{k''}{E}$ mit Rücksicht auf die Verwendung der Materialien im Bau- und Maschinenwesen zusammengestellt, welche Zahlen für beide Maßsysteme gleichmäßig Verwendung finden:

Material.	Bei ruhiger Belastung in Gebäuden.		Bei Brücken.		Bei Maschinen in bewegten und Erschütterungen unterworfenen Theilen.	
	Ausdehnung ε'	Zusammendrückung ε''	Ausdehnung ε'	Zusammendrückung ε''	Ausdehnung ε'	Zusammendrückung ε''
Schmiedeeisen .	1 : 2900	1 : 1933	1 : 3383	1 : 2255	1 : 3866	1 : 2577
Gußeisen . . .	1 : 6736	1 : 914	1 : 7579	1 : 1028	1 : 8421	1 : 1143
Hartes Holz . .	1 : 1636	1 : 1800	1 : 1963	1 : 2161	1 : 2455	1 : 2698
Weiches Holz .	1 : 1909	1 : 2625	1 : 2290	1 : 3148	1 : 2864	1 : 3939

Aus dieser Tabelle ergeben sich z. B. für die im Maschinenbau zur Verwendung kommenden Materialien, bei Benutzung der aus der ersten Tabelle entnommenen Werthe für den Elasticitätsmodul E, folgende Belastungen k' und k'' pro Flächeneinheit:

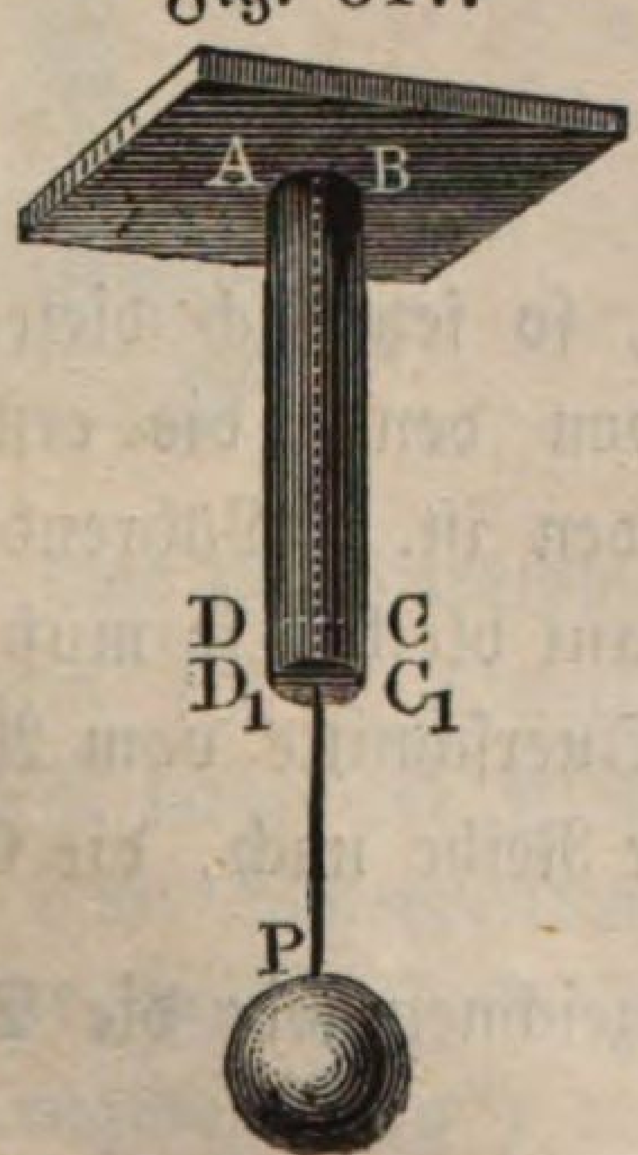
Für Schmiedeeisen $\begin{cases} k' = \varepsilon' E = 520 \text{ Kilogr. pro } \square^{cm} = 8000 \text{ Pfd. pro } \square \text{Zoll} \\ k'' = \varepsilon'' E = 780 \quad » \quad » \quad = 10630 \quad » \quad » \end{cases}$

» Gußeisen $\begin{cases} k' = \varepsilon' E = 120 \quad » \quad » \quad = 1630 \quad » \quad » \\ k'' = \varepsilon'' E = 880 \quad » \quad » \quad = 12000 \quad » \quad » \end{cases}$

» Holz, hart $\begin{cases} k' = \varepsilon' E = 50 \quad » \quad » \quad = 670 \quad » \quad » \\ k'' = \varepsilon'' E = 44 \quad » \quad » \quad = 610 \quad » \quad » \end{cases}$

» Holz, weich $\begin{cases} k' = \varepsilon' E = 46 \quad » \quad » \quad = 630 \quad » \quad » \\ k'' = \varepsilon'' E = 33 \quad » \quad » \quad = 450 \quad » \quad » \end{cases}$

Fig. 317.



Zug-Elasticität und Festigkeit. Ein prismatischer Körper von der Länge l werde am Ende (Fig. 317) durch eine Kraft P, welche in Richtung der Achse wirksam ist, auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen. Der Querschnitt des Stabes sei F, die Längenveränderung $DD_1 = \lambda$ und die Belastung sei so gewählt, daß die Formänderung noch unterhalb der Elasticitätsgrenze liege. Unter diesen Voraussetzungen werden die Normalspannungen σ in den 67

einzelnen Punkten eines Querschnitts constant sein und sich zu einer Resultante, die im Schwerpunkte des Querschnitts und entgegengesetzt der Kraft P wirksam ist, zusammensetzen lassen. Zugleich werden auch damit die Normalausdehnungen ε' in den einzelnen Punkten eines Querschnitts constant ausfallen müssen. Wir haben hiernach für den Gleichgewichtszustand:

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ und } \varepsilon' = \frac{\lambda}{l}.$$

Hieraus ergiebt sich, bei Benutzung von F. 132:

$$P = E F \frac{\lambda}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (138)$$

und mit Rücksicht auf die größte zulässige Spannung k':

$$P = k' F \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (139)$$

Nehmen wir den Querschnitt F des Körpers gleich 1 Quadratcentimeter und setzen $\lambda = l$, so erhalten wir aus den beiden Formeln:

1) Der Elasticitätsmodul E ist die Belastung in Kilogrammen, die im Stande ist, einen prismatischen Körper von 1 $\square^{cm}$ Querschnitt um seine eigene Länge auszudehnen, vorausgesetzt, daß dabei die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werde.

2) Der Sicherheitsmodul k' ist die Belastung in Kilogrammen, die ein Körper von 1 $\square^{cm}$ Querschnitt mit Sicherheit zu tragen vermag.

In gleicher Weise ist der Tragmodul (σ') die Belastung in Kilogrammen, die einem Körper von 1 $\square^{cm}$ Querschnitt eine Ausdehnung beibringt, welche der Elasticitätsgrenze entspricht, und der Festigkeitsmodul K' diejenige Belastung in Kilogrammen, die einen Körper von 1 $\square^{cm}$ Querschnitt zu zerreißen vermag.

Hat der Körper eine sehr bedeutende Länge, so ist das eigene Gewicht G, das bis jetzt vernachlässigt wurde, in Rechnung zu bringen, und es erfährt für den Fall, daß P und G nach derselben Richtung wirksam sind, der Querschnitt AB im Aufhängepunkte die größte Belastung $= P + G$. In diesem wird daher auch wahrscheinlicherweise das Zerreißen beginnen, weshalb man ihn den gefährlichen Querschnitt nennt. Für diese Annahme ist daher:

$$P + G = k' F.$$

Was die Ausdehnung λ des Körpers anbetrifft, so setzt sich dieselbe aus zwei Längenveränderungen λ_1 und λ_2 zusammen, von denen die erste durch die Last P, die letztere durch das Gewicht G entstanden ist. Während sich λ_1 n. F. 138 bestimmt, da P für alle Querschnitte constant bleibt, so muß λ_2 mit Rücksicht darauf berechnet werden, daß die einzelnen Querschnitte vom Angriffspunkte der Kraft P an bis zum Aufhängepunkte, der Reihe nach, die Gewichte $\frac{1}{n} G, \frac{2}{n} G, \frac{3}{n} G \ldots$ bis G zu tragen haben. Bezeichnen wir die Dehnung

für die Länge $\frac{l}{n}$ des Stabes in den einzelnen Querschnitten mit $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4 \cdots$, so ist:

$$\triangle_1 = \frac{1}{E} \frac{\frac{1}{n} G}{F} \frac{1}{n} l$$

$$\triangle_2 = \frac{1}{E} \frac{\frac{2}{n} G}{F} \frac{1}{n} l$$

$$\triangle_3 = \frac{1}{E} \frac{\frac{3}{n} G}{F} \frac{1}{n} l \text{ u. s. w.,}$$

daher

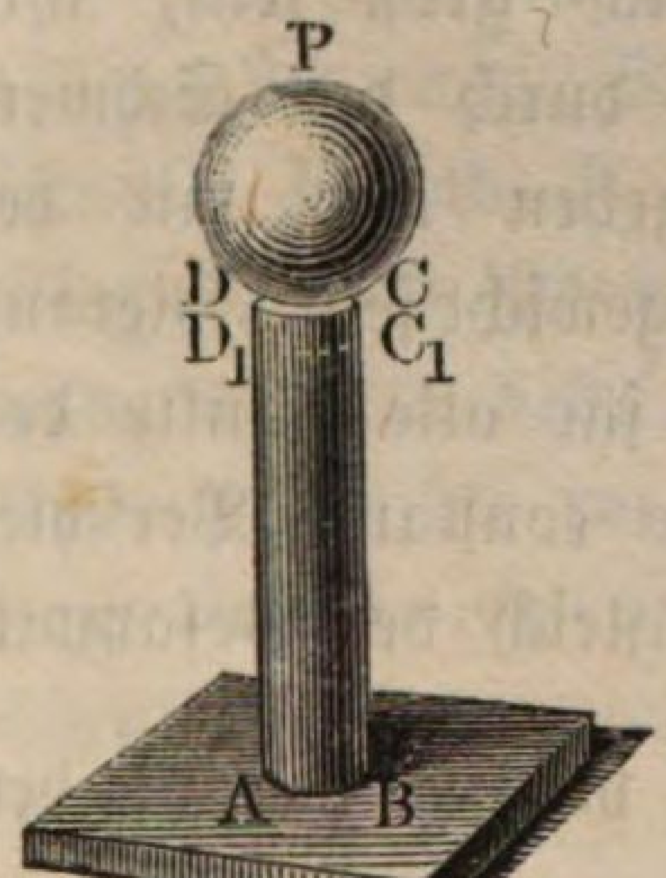
$$\Sigma \triangle_1 = \lambda_2 = \frac{1}{E} \frac{1}{n} l \frac{\frac{1}{n} G}{F} (1 + 2 + 3 + 4 \cdots n) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{E} \frac{G}{F} l,$$

d. h. die Ausdehnung des Körpers ist in Folge seines Gewichtes nur halb so groß als diejenige, welche ein gleich großes, am Ende des Körpers wirkendes Gewicht hervorbringen würde. Die ganze Ausdehnung λ ist nun:

$$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2} G) l}{F E}.$$

Druck-Elasticität und Festigkeit. Die vorstehenden Resultate lassen sich unter denselben Voraussetzungen auf prismatische Körper, welche eine Kraft P zusammenzudrücken versucht (Fig. 318), unmittelbar in Anwendung bringen, da innerhalb der Elasticitätsgrenze $\frac{\sigma'}{\varepsilon'} = \frac{\sigma''}{\varepsilon''} = E$ ist. Hierbei ist jedoch die Länge l der Körper so gering anzunehmen, daß ein Verbiegen derselben unmöglich erscheint, λ bedeutet dabei die ganze Verkürzung $D D_1$ des Körpers. Es ist demnach:

Fig. 318.



$$P = E F \frac{\lambda}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (138a)$$

$$P = k'' F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (139a)$$

Setzen wir wieder $F = 1 \square^{cm}$ und $\lambda = l$, so ist:

1) Der Elasticitätsmodul diejenige Belastung in Kilogrammen, die einen Körper von $1 \square^{cm}$ Querschnitt auf Null zusammenzudrücken vermag, vorausgesetzt, daß dabei die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird.

2) Der Sicherheitsmodul k'' diejenige Belastung in Kilogrammen, die ein Körper von $1 \square^{cm}$ Querschnitt mit Sicherheit zu tragen vermag. Ebenso ist der Tragmodul (σ'') diejenige Belastung, die den Körper von $1 \square^{cm}$ Quer-

schnitt so weit zusammendrückt, daß dadurch gerade die Elasticitätsgrenze erreicht ist, und der Festigkeitsmodul K'' diejenige Belastung in Kilogrammen, die einen Körper von 1 $\square^{cm}$ Querschnitt zu zerdrücken vermag.

Bei Berücksichtigung des eigenen Gewichtes G ergiebt sich in gleicher Weise wie bei der Zug-Elasticität und Festigkeit:

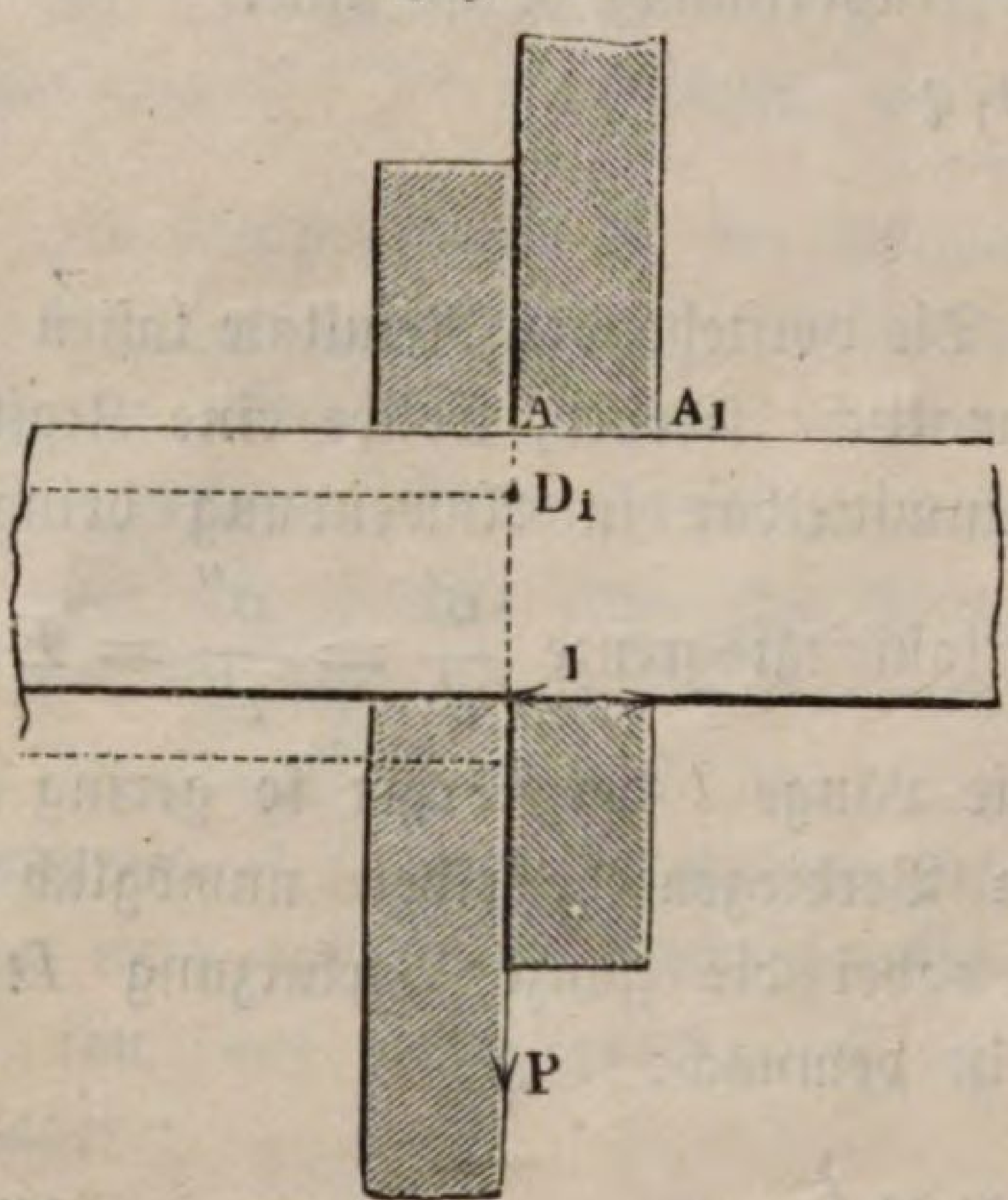
$$P + G = k'' F$$

$$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2} G)\, l}{F E},$$

wenn P und G nach derselben Richtung wirksam sind. Bei entgegengesetzter Richtung von P ist in den Formeln für Zug- und Druck-Elasticität und Festigkeit P oder G mit entgegengesetztem Zeichen, je nach der relativen Größe der beiden Kräfte, in Rechnung zu bringen. Aus dem Werthe von λ ersieht sich, daß die Gesammtausdehnung oder Verkürzung des Körpers der Belastung und der Länge direct proportional, dem Querschnitt dagegen umgekehrt proportional ist, daß also die Längenveränderung mit der Zunahme der Belastung und Länge wächst, mit der Zunahme des Querschnitts dagegen abnimmt.

Schub-Elasticität und Festigkeit. Die Resultante P der äußeren Kräfte (Fig. 319) liegt in der Ebene des Querschnitts F und geht durch dessen Schwerpunkt. Ein Verbiegen des Körpers ist durch die geringe Länge l desselben unmöglich gemacht, daher muß bei zu großer Belastung eine Zertheilung des Körpers in dem Querschnitt F, also durch Abscheeren erfolgen. Innerhalb der Elasticitätsgrenze werden auch hier die Tangentialspannungen τ in allen Punkten des Querschnitts gleich groß sein, ihre Resultante wird durch den Schwerpunkt von F gehen und mit der Kraft P im Gleichgewicht sein. Hieraus ergiebt sich auch für alle Punkte des Querschnitts eine constante Verschiebung γ, welche gleich der Gesammtverschiebung des Querschnitts $\frac{A D_1}{A A_1} = \frac{\lambda}{l}$ gesetzt werden muß. Wir haben

Fig. 319.



hiernach ebenso wie bei der Zug-Elasticität und Festigkeit, wenn wir E mit C, k' mit t vertauschen:

$$\tau = \frac{P}{F} \text{ und } \gamma = \frac{\lambda}{l}$$

$$P = C F \frac{\lambda}{l} = \alpha E F \frac{\lambda}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (138\,b)$$

$$P = t F = \beta k F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (139\,b)$$

worin α einen Zahlenwerth zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{2}{5}$, β einen Zahlenwerth zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ n. F. 135 und 137 bezeichnet, und k der kleinere der beiden für das vorliegende Material maßgebenden Sicherheitsmodul k' und k'' ist.

Biegungs-Elasticität und Festigkeit. Auf einem prismatischen Körper, 68
der in horizontaler Lage erhalten, wirken, an verschiedenen Punkten seiner Achse, Kräfte, deren Richtungen diese Achse normal schneiden und welche mit Hinzurechnung der von den Unterstützungs- oder Einklemmungspunkten herrührenden Reactionen unter sich im Gleichgewicht sind. Die Kräfte liegen in einer Verticalebene, so daß auch das Gewicht des Körpers, als eine vertical abwärts wirkende Kraft, mit zu dem Systeme angreifender Kräfte gerechnet werden muß. Der Körper erfährt durch die Einwirkung der Kräfte eine Biegung, d. h. die in dem Körper normal zu den Kraftrichtungen angenommenen Ebenen, *Faserschichten* genannt, erhalten eine gekrümmte Gestalt, und die in den Faserschichten parallel der Achse des Körpers angenommenen materiellen Linien, die *Fasern*, sind nach der Biegung zu krummen Linien geworden. Da die durch die Kräfte an dem Körper hervorgerufenen Formänderungen aber bei unseren Untersuchungen unterhalb der Elasticitätsgrenze bleiben sollen, so stellen wir in Betreff der eintretenden Biegung für die gekrümmten Fasern und Faserschichten folgende Voraussetzungen auf, welche als Ausgangspunkt für die nothwendigen Rechnungen genommen werden müssen.

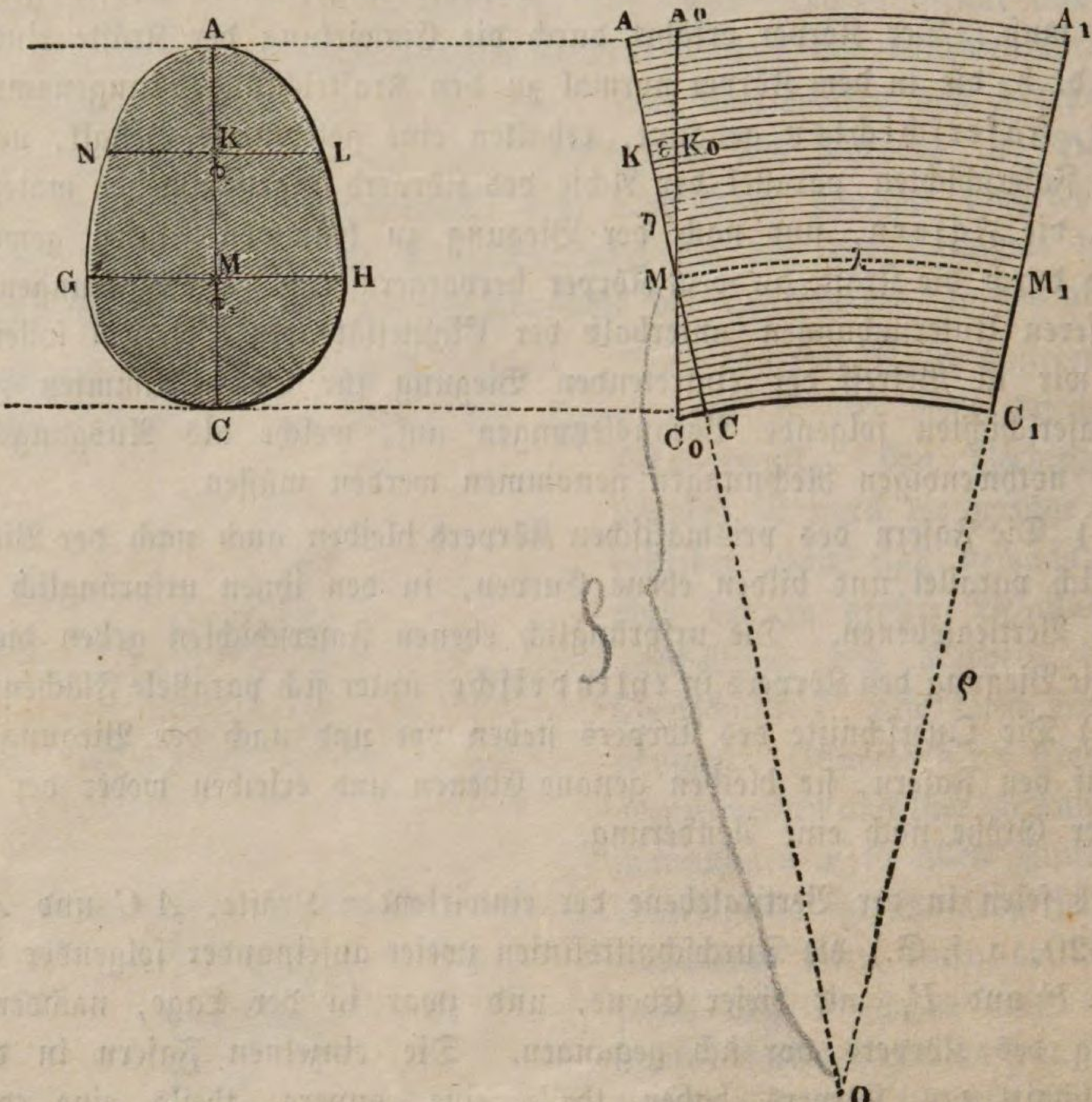
1) Die Fasern des prismatischen Körpers bleiben auch nach der Biegung unter sich parallel und bilden ebene Curven, in den ihnen ursprünglich zugehörigen Verticalebenen. Die ursprünglich ebenen Faserschichten gehen hiernach durch die Biegung des Körpers in *cylindrische*, unter sich parallele Flächen über.

2) Die Querschnitte des Körpers stehen vor und nach der Biegung normal auf den Fasern, sie bleiben genaue Ebenen und erleiden weder der Form noch der Größe nach eine Aenderung.

Es seien in der Verticalebene der einwirkenden Kräfte, AC und A_1C_1 (Fig. 320, a. f. S.) die Durchschnittslinien zweier aufeinander folgender Querschnitte F und F_1 mit dieser Ebene, und zwar in der Lage, nachdem die Biegung des Körpers vor sich gegangen. Die einzelnen Fasern in diesem Längenschnitt des Körpers haben theils eine convexe, theils eine concave Krümmung bei der Biegung des Körpers erfahren, und zwar geht die convexe Krümmung von oben nach unten allmälig in die concave Krümmung über. Mit der convexen Krümmung ist aber eine Ausdehnung der betreffenden Faser verbunden, während die concav gekrümmte zusammengedrückt worden ist. Da nun die einzelnen Fasern nach der oberen Begrenzung des Längenschnitts hin eine Ausdehnung, nach der unteren eine Zusammendrückung erfahren, so muß sich innerhalb des Längenschnitts eine Faser finden, die den Uebergang zwischen Ausdehnung und Zusammendrückung vermittelt, die also ihre ursprüngliche Länge bei der Biegung des Körpers behält. Diese Faser MM_1 heißt die *neutrale* Faser, und da sich in jedem verticalen Schnitt des Körpers dasselbe zeigt, so ist in jedem gebogenen Körper eine *neutrale*

Faserschicht anzunehmen, welche aus Fasern zusammengesetzt gedacht werden kann, die ihre ursprüngliche Länge bei der Biegung des Körpers behalten. Die krumme Linie, welche von derjenigen neutralen Faser gebildet wird, die in dem die Kraftrichtungen enthaltenden Verticalschnitt des Körpers liegt, heißt elastische Linie, und der Durchschnittspunkt O der beiden Querschnittsspuren AC und A_1C_1 ist der Krümmungsmittelpunkt des Elements MM_1 der elastischen Linie. Die Durchschnittslinie GH zwischen der neutralen Faserschicht und dem Querschnitt F wird neutrale Achse genannt, während die

Fig. 320.



Durchschnittslinie AC des Querschnitts mit dem die Kraftrichtungen enthaltenden Längenschnitt, Querschnittsachse heißt. Die letztere enthält den Schwerpunkt des Querschnitts. In Folge der Voraussetzung, daß die Querschnitte bei der Biegung ebene Figuren von constanter Größe und Form bleiben sollen, folgt, daß die Ausdehnungen, resp. Zusammendrückungen der einzelnen Fasern ihren Entfernungen von der neutralen Faserschicht proportional sind, und daß die Punkte eines Querschnitts, welche in einer mit GH parallelen Linie NL liegen, gleiche Längenveränderungen erfahren. Dasselbe Gesetz gilt für die in den einzelnen Fasern, resp. Punkten durch die Längenveränderungen hervorgerufenen Spannungen, wobei zwischen der auftretenden

Längenveränderung ε und der zugehörigen Spannung σ jederzeit die in §. 132 angegebene Beziehung $\sigma = E\varepsilon$ zu benutzen ist. Bezeichnen wir die in der obersten Faserschicht AA_1 entstandene Ausdehnung mit ε', die zugehörige Spannung mit σ' und ebenso die in der untersten Faserschicht CC_1 auftretende Zusammendrückung mit ε'', die zugehörige Pressung mit σ'', so sind $\varepsilon', \varepsilon'', \sigma', \sigma''$ relative Maxima für die in dem Querschnitt auftretenden Ausdehnungen, Zusammendrückungen, Spannungen und Pressungen.

Es sei $A_0 C_0$ die Lage des Querschnitts F im unbelasteten Zustande des Körpers, und es werde $MA = e'$, $MC = e''$, der Krümmungsradius $MO = \varrho$ und die ursprüngliche Länge MM_1 des Faserelementes $= \lambda$ gesetzt, so ist für jeden Punkt der Linie NL, in der Entfernung η von der neutralen Achse, $\frac{KK_0}{\lambda}$ die betreffende Längenveränderung ε, welche oberhalb der neutralen Achse, bei einem positiven η eine Ausdehnung, unterhalb der neutralen Achse, bei negativem η dagegen eine Zusammendrückung vorstellt. Aus der Figur ergiebt sich:

$$\frac{KK_0}{\eta} = \frac{AA_0}{e'} = \frac{\lambda}{\varrho} = \frac{CC_0}{e''}$$

$$\frac{KK_0 : \lambda}{\eta} = \frac{AA_0 : \lambda}{e'} = \frac{CC_0 : \lambda}{e''} = \frac{1}{\varrho},$$

daher:

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\varepsilon'}{e'} = \frac{\varepsilon''}{e''} = \frac{1}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)$$

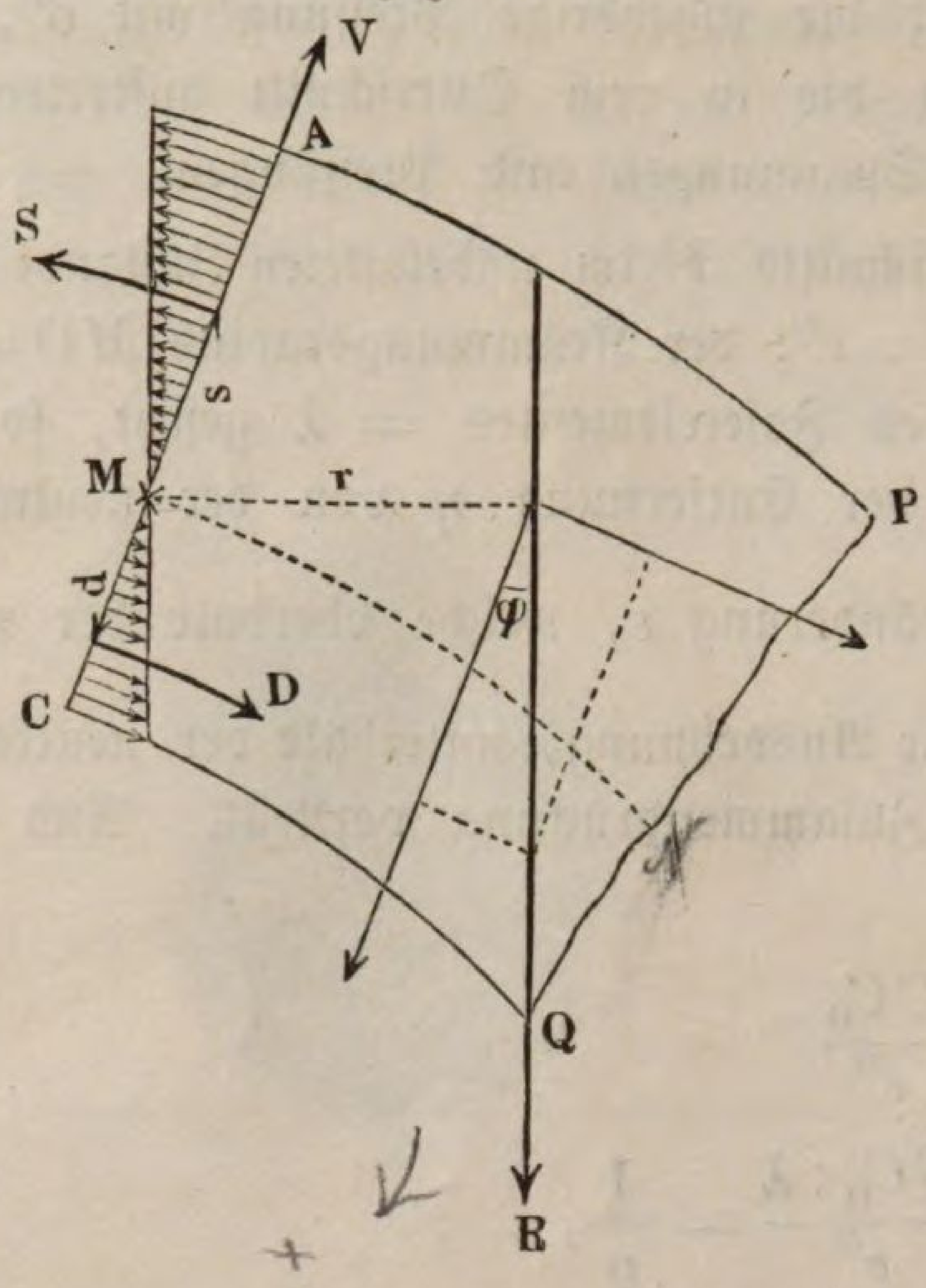
woraus sich die betreffende Längenveränderung für die einzelnen Faserschichten berechnen läßt. Die zugehörige Spannung ist:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\eta}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen, zwischen den äußeren 69
Kräften und den in irgend einem Querschnitt F hervorgerufenen Spannungen und Pressungen, denken wir den Körper in dem Querschnitt zerschnitten und das eine Stück des Körpers mit seinen vorhandenen Belastungen durch Kräfte ersetzt, die in den einzelnen Punkten des Querschnitts wirksam sind. Es ist dabei gleichgültig, welchen Theil des Körpers mit seinen Belastungen man beibehält, da die sämmtlichen äußeren Kräfte unter sich im Gleichgewicht sind und dasselbe durch Einführung der an dem Querschnitt wirksamen Kräfte, nach Wegnahme des einen Körpertheils, wieder hergestellt wird. Die bei dieser Untersuchung beibehaltenen äußeren Kräfte heißen das System der äußeren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt F, und ist dasselbe im Allgemeinen für die verschiedenen Querschnitte veränderlich. Es stelle $ACPQ$ (Fig. 321, a. f. S.) den durch die Belastung gebogenen, mit dem System der äußeren Kräfte versehenen Körpertheil vor, R sei deren Resultante, MN die elastische Linie und AC der in Betracht zu ziehende

Querschnitt. Die an demselben anzubringenden, das fehlende Körperstück ersetzenden Kräfte sind a) die in Richtung der Fasern auftretenden Spannungen und Pressungen, welche sämmtlich parallel sind und sich zu einer Spannkraft S und einer Druckkraft D vereinigen lassen; b) die in den einzelnen Punkten des Querschnitts auftretenden Schubkräfte, die ebenfalls als parallel anzusehen sind und durch die den Schwerpunkt des Querschnitts angreifende Resultante V ersetzt werden. Die in Betracht zu ziehenden Kräfte S, D, V und R liegen in einer Ebene und erfordert deshalb der Gleichgewichtszustand drei Bedingungen. Bezeichnet φ den Winkel, den die durch die Biegung veränderte Querschnittsebene mit ihrer ursprünglichen Lage bildet, ist ferner M der Coordinatenanfangspunkt, AC die Richtung der einen Achse, so erhält man:

Fig. 321.



1) $V - R\cos\varphi = 0$

2) $S - D - R\sin\varphi = 0$

3) $Rr - Ss - Dd = 0.$

Von der ersten Gleichung können wir gleich absehen, da sie jederzeit erfüllt ist, wenn wir, wie hier vorausgesetzt wird, den Körper lang genug wählen, so daß kein Abscheeren in dem Querschnitt erfolgen kann. Ferner ist die innerhalb der Elasticitätsgrenze erfolgende Biegung so gering, daß wir $\sin\varphi$ annähernd gleich Null setzen dürfen, weshalb sich die obigen drei Gleichgewichtsbedingungen auf folgende zwei reduciren:

$$S - D = 0$$

$$Rr - Ss - Dd = 0.$$

Es ist, unter f_1 ein Element des Querschnitts F verstanden, $S = \Sigma f_1 \sigma$, und mit Benutzung von Formel 141:

$$S = \frac{E}{\varrho} \Sigma f_1 \eta.$$

Ebenso ist $D = \frac{E}{\varrho} \Sigma f_1 \eta$, worin η sich auf die unterhalb der neutralen Achse liegenden Flächenelemente bezieht. Die erste der Gleichgewichtsbedingungen erhält demnach die Form:

$$\frac{E}{\varrho} \Sigma f_1 \eta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (142)$$

worin η mit positivem oder negativem Zeichen, je nach der Lage der Flächenelemente, in Rechnung zu bringen ist. Aus der Gleichung folgt: $\Sigma f_1 \eta = 0$, d. h. aber, die neutrale Achse muß in dem Querschnitt eine solche Lage haben, daß die algebraische Summe der Momente der Flächenelemente, auf diese Linie bezogen, gleich Null werde. Dies ist aber nur der Fall, wenn die neutrale Achse durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Wir erhalten hiernach als erstes Gesetz: Die elastische Linie ist der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Querschnitte des Körpers, sie ist die gekrümmte Achse, die Mittellinie des Körpers.

Wir haben weiter $S s = \Sigma f_1 \sigma \eta = \frac{E}{\varrho} \Sigma f_1 \eta^2$, und ebenso ergiebt sich $D d = \frac{E}{\varrho} \Sigma f_1 \eta^2$, daher als zweite Gleichgewichtsbedingung:

$$R r = \frac{E}{\varrho} \Sigma f_1 \eta^2,$$

worin sich η auf alle Flächenelemente des Querschnitts F bezieht. Der Ausdruck $\Sigma f_1 \eta^2$ ist allein von der Querschnittsform abhängig und mit Hülfe höherer Mathematik für die in der Praxis vorkommenden Querschnitte zu berechnen. Derselbe wird das Trägheitsmoment des Querschnitts genannt und in der Folge mit J bezeichnet. Ersetzen wir noch das Moment $R r$ der Mittelkraft allgemein durch das Moment $Q q$ des Systems der äußeren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} Q q = \dfrac{E J}{\varrho} \\ \text{oder} \\ \varrho Q q = E J \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (143)$$

worin $\frac{E J}{\varrho}$ das Spannungsmoment des untersuchten Querschnitts genannt wird. Besteht der Körper aus demselben Material und ist derselbe, wie vorausgesetzt wurde, prismatisch, so ist das Product $E J$ und damit $\varrho Q q$ für alle Querschnitte constant. Das letztere Product $\varrho Q q$ besteht aber aus zwei veränderlichen Factoren ϱ und $Q q$, die also in der Beziehung zu einander stehen, daß einer Zunahme von ϱ eine Abnahme von $Q q$ und umgekehrt entspricht. Indem man den Körper in Bezug auf diese Veränderlichkeit der beiden maßgebenden Factoren in den einzelnen Querschnitten einer Untersuchung unterwirft, kann für einen oder mehrere derselben ϱ ein Minimum und $Q q$ dadurch zu einem Maximum werden. Dieser betreffende Querschnitt wird, da hier die elastische Linie am stärksten gekrümmt ist, wahrscheinlicherweise zuerst seinen Zusammenhang aufgeben, in ihm wird die Zertheilung des Körpers beginnen, und er wird deshalb der gefährliche Querschnitt genannt. Handelt es sich um die Berechnung der Dimensionen eines belasteten Körpers, so wird man, nach Aufstellung der Gleichung 143 den gefährlichen

Querschnitt zu suchen und für diesen die weitere Rechnung auszuführen haben. Für den gefährlichen Querschnitt ist demnach die Ausgangsgleichung:

$$Max\, Q\, q = \frac{E\, J}{Mini\, \varrho}.$$

Nach den Formeln 140 und 141 ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon'}{e'} = \frac{1}{E}\frac{\sigma'}{e'}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon''}{e''} = \frac{1}{E}\frac{\sigma''}{e''},$$

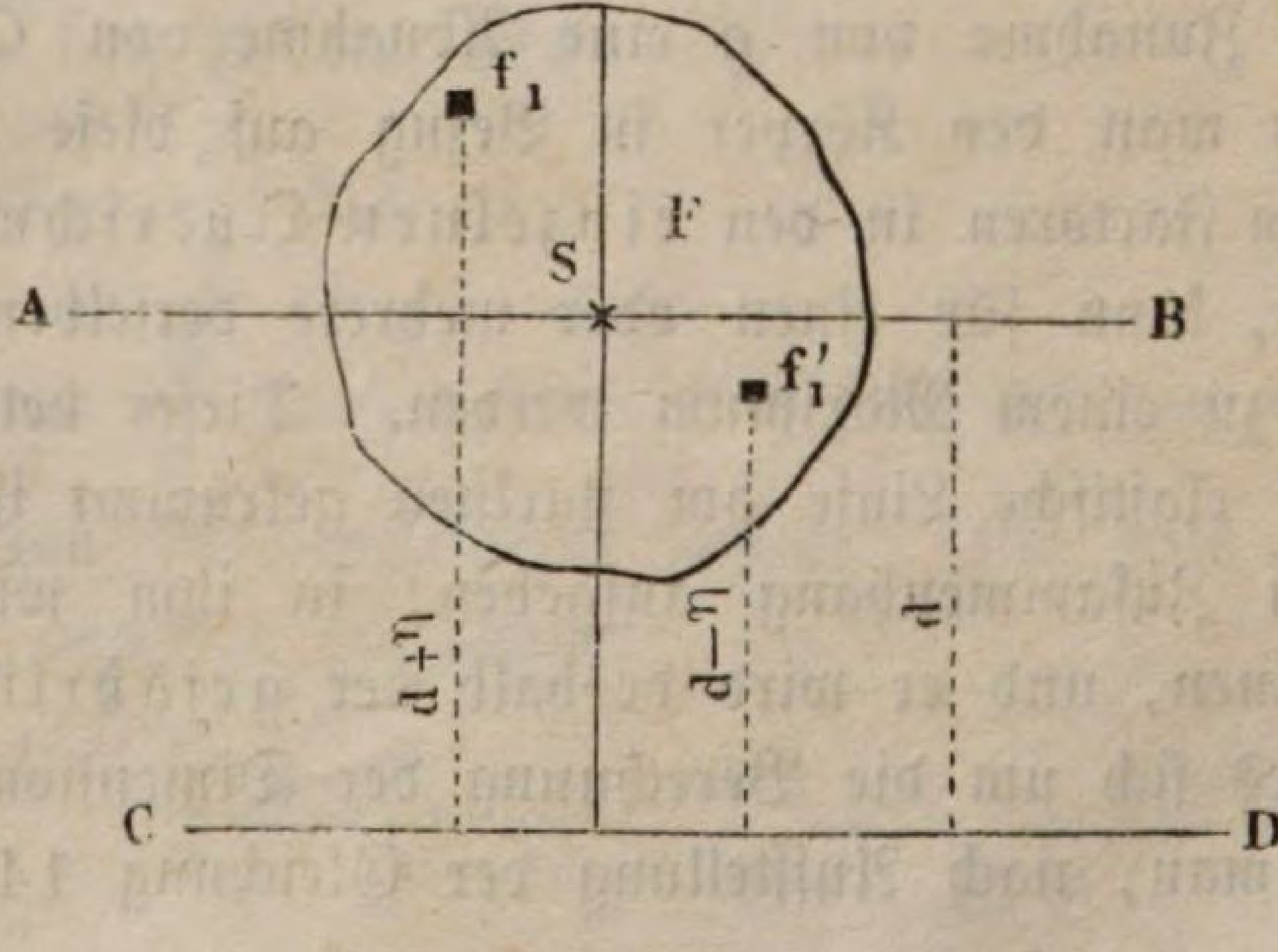
worin σ' und σ'' die Spannung und Pressung in den äußersten Faserschichten des betreffenden Querschnitts bedeuten. Dem Minimum von ϱ entspricht hiernach das Maximum von σ' oder σ'', je nachdem das Material dem Zuge oder dem Drucke größere Widerstandsfähigkeit entgegensetzt, wofür wir mit Bezug auf die Verwendung in der Praxis k' oder k'' setzen dürfen. Es ist hiernach, $Max\, Q\, q$ durch $(Q\, q)$ bezeichnet, für den gefährlichen Querschnitt:

$$(Q\, q) = \left\{ \begin{matrix} k' \dfrac{J}{e'} \\ k'' \dfrac{J}{e''} \end{matrix} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (144)$$

Diese Gleichung heißt das **Widerstandsmoment** des Körpers in Bezug auf den gefährlichen Querschnitt, und zwar ist der kleinere der beiden Werthe $k' \dfrac{J}{e'}$ oder $k'' \dfrac{J}{e''}$ zur Berechnung der Querschnittsabmessungen zu benutzen.

Bei der Berechnung des Trägheitsmomentes J von zusammengesetzten Querschnitten ist es oftmals nothwendig, das Trägheitsmoment zuerst für eine mit der neutralen Achse parallel laufende Linie zu berechnen und dann erst die Reduction auf die neutrale Achse vorzunehmen. Es sei (Fig. 322) F

Fig. 322.



ein beliebiger Querschnitt, S sein Schwerpunkt, AB die neutrale Achse und CD eine mit dieser in der Entfernung d gezogene parallele Linie. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Querschnitts für CD mit J_1, so ist für die oberhalb AB gelegenen Flächenelemente $f_1, f_2, f_3 \cdots$, die Entfernung von $CD = d + \eta$, für die unterhalb AB gelegenen $f_1', f_2', f_3' \cdots$ dagegen $d - \eta$, daher:

$$J_1 = \Sigma f_1 (d + \eta)^2 + \Sigma f_1' (d - \eta)^2$$

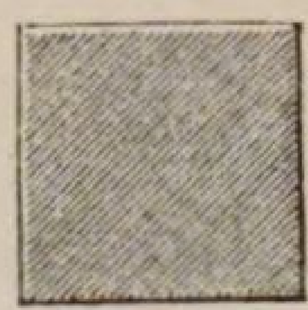
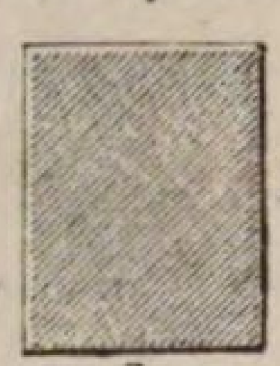
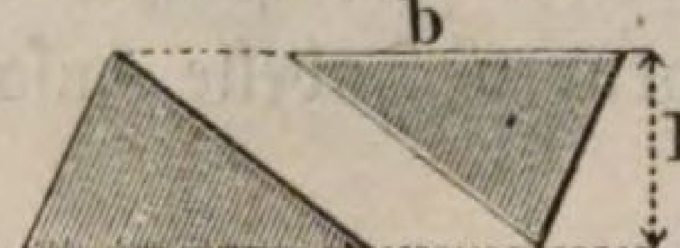
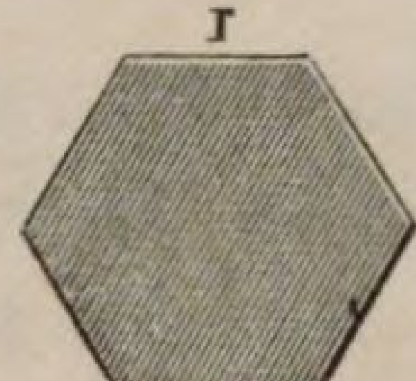
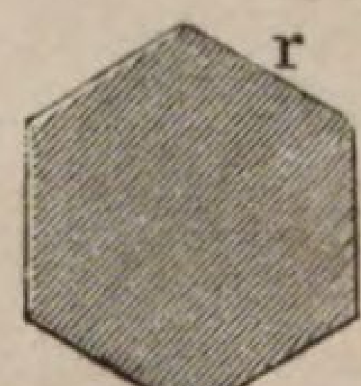
$$J_1 = \Sigma f_1 \eta^2 + \Sigma f_1' \eta^2 + d^2 (\Sigma f_1 + \Sigma f_1') + 2 d (\Sigma f_1 \eta - \Sigma f_1' \eta).$$

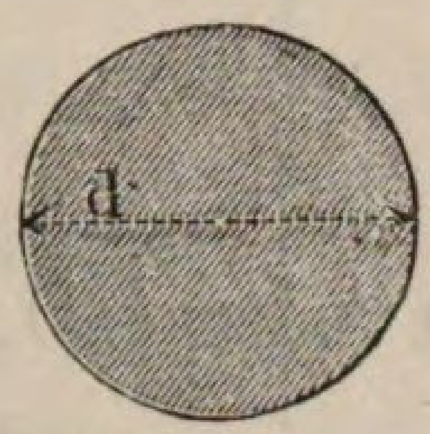
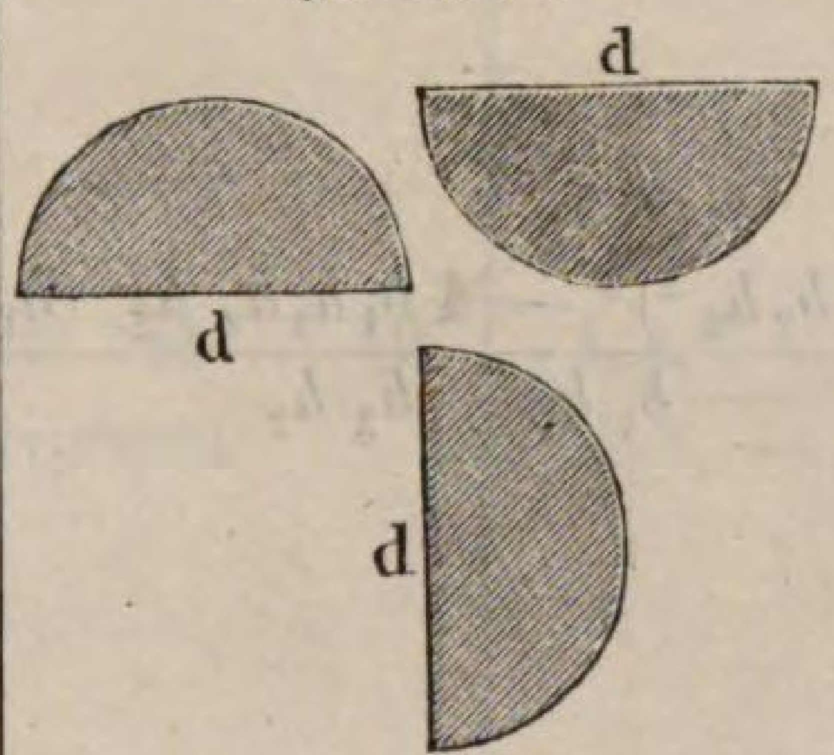
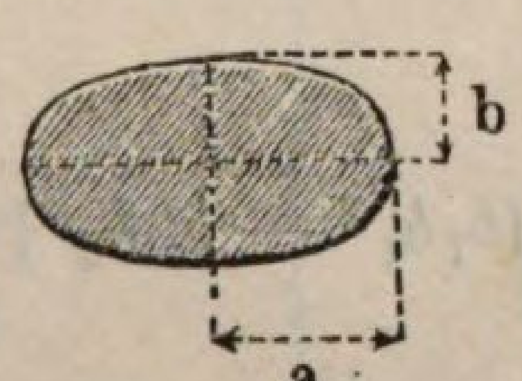
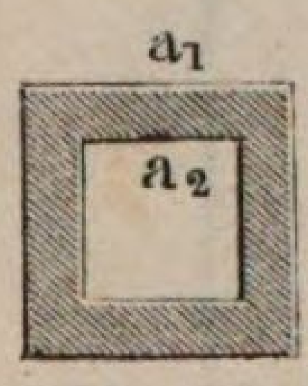
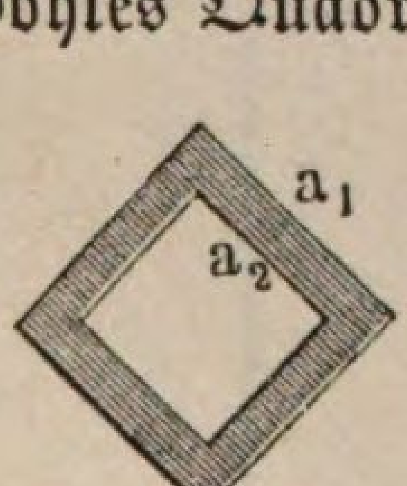
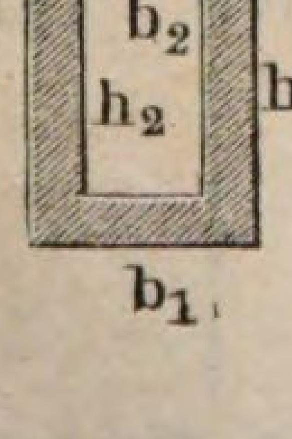
Die beiden ersten Summanden liefern das auf die neutrale Achse AB bezogene Trägheitsmoment J, der Factor des dritten Summands ist gleich der Summe aller Flächenelemente, also gleich dem Inhalte F des Querschnitts, und der vierte Summand verschwindet durch den eingeklammerten Factor, da die algebraische Summe der Momente der Flächenelemente für die Schwerpunktsachse Null ist.

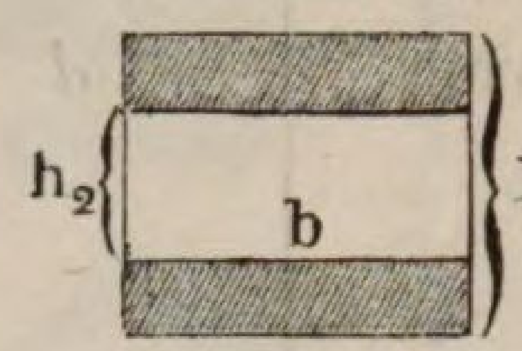
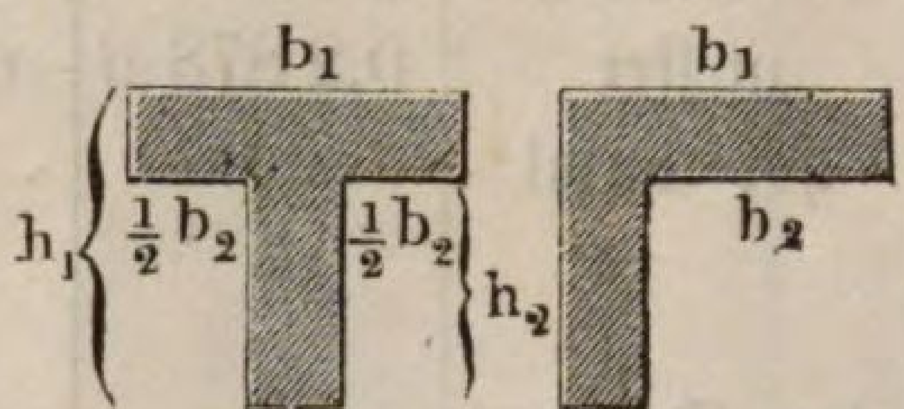
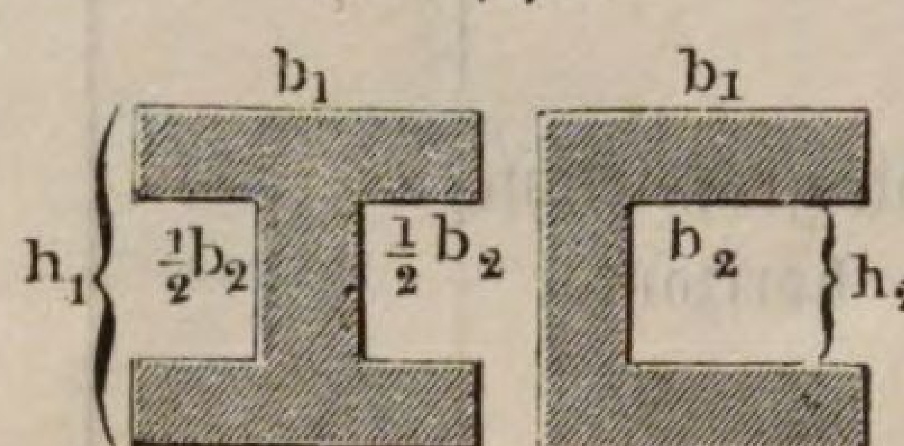
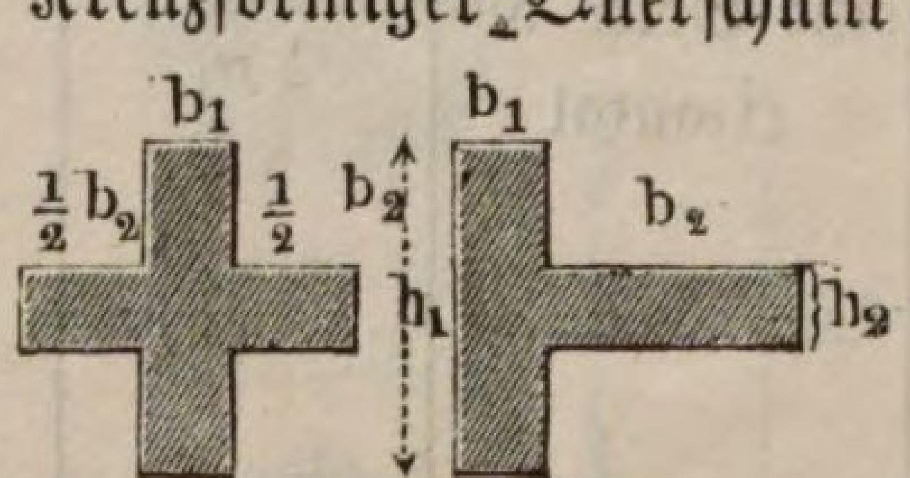
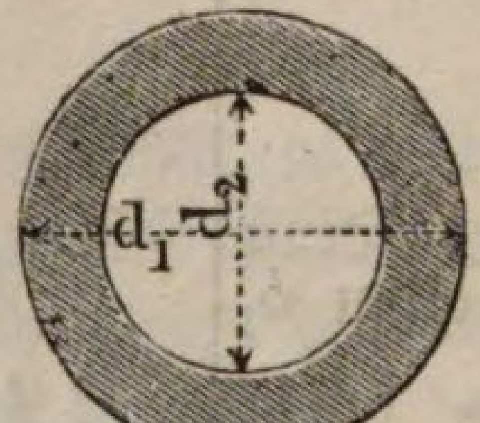
Wir haben hiernach:

$$J_1 = J + d^2 F \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (145)$$

Die Werthe von J und $\frac{J}{e}$, unter e die Entfernung der äußersten Faserschicht von der neutralen verstanden, sind für die in der Praxis in Anwendung kommenden Querschnittsformen in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

№	Form des Querschnitts.	Werth für J.	Stellung des Querschnitts zu dem verticalen Drucke.	Werth für e.	Werth für $\frac{J}{e}$.
1.			eine Seite horizontal	$\frac{a}{2}$	$\frac{1}{6} a^3$
	Quadrat	$\frac{1}{12} a^4$			
2.			eine Diagonale horizontal	$\frac{a}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$
3.	Rechteck 	$\frac{1}{12} b h^3$	die Seite h vertical	$\frac{1}{2} h$	$\frac{1}{6} b h^2$
4.	Dreieck, ungleichseitig 	$\frac{1}{36} b h^3$	die Seite b horizontal	$\frac{2}{3} h$	$\frac{1}{24} b h^2$
5.			eine Seite horizontal	$\frac{1}{2} r \sqrt{3}$	$0{,}625\ r^3$
	Sechseck, regelmäßig	$0{,}5413\ r^4$			
6.			eine Seite vertical	r	$0{,}5413\ r^3$
7.	Näherungsformeln für ein reguläres Polygon, Anzahl d. Seiten beliebig. F = Flächeninhalt r = Radius des eingeschriebenen Kreises.	$\frac{1}{4} r^2 F$	beliebig	r	$\frac{1}{4} r F$

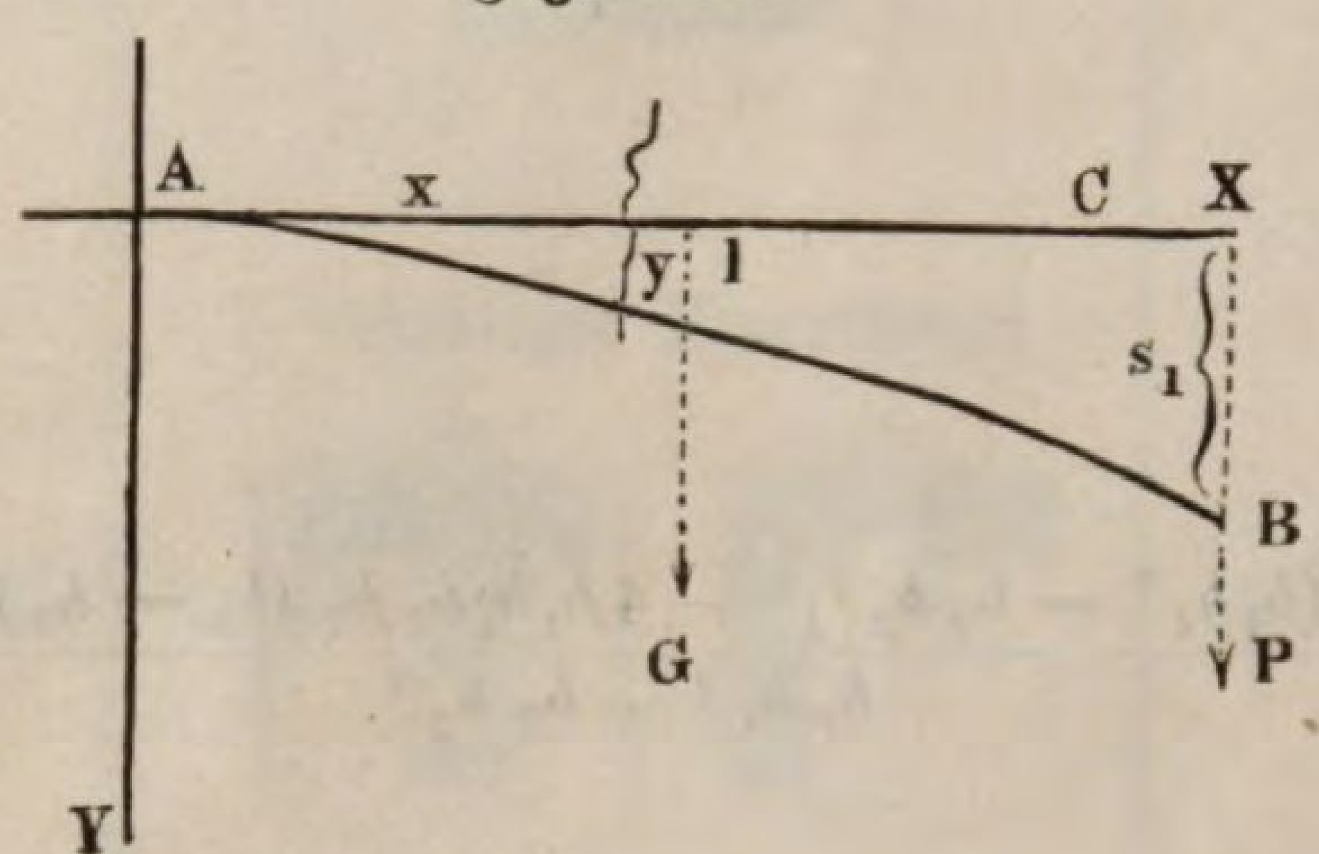
№	Form des Querschnitts.	Werth für J.	Stellung des Querschnitts zu dem verticalen Drucke.	Werth für e.	Werth für $\frac{J}{e}$.
8.	Kreis 	$\frac{1}{64}\pi d^4 = 0{,}0491\, d^4$	beliebig	$\frac{1}{2} d$	$\frac{1}{32}\pi d^3 = 0{,}0982\, d^3$
9.	Halbkreis 	$0{,}00687\, d^4$	der Durchmesser horizontal	$0{,}2878\, d$	$0{,}023875\, d^3$
		$0{,}02454\, d^4$	der Durchmesser vertical	$\frac{1}{2} d$	$0{,}0490875\, d^3$
10.		$\frac{\pi}{4} a b^3$	die große Achse horizontal	b	$\frac{\pi}{4} a b^2$
11.			eine Seite horizontal	$\frac{1}{2} a_1$	$\frac{1}{6} \frac{a_1^4 - a_2^4}{a_1}$
	Hohles Quadrat	$\frac{1}{12}(a_1^4 - a_2^4$			
12.			eine Diagonale horizontal	$\frac{1}{2} a_1 \sqrt{2}$	$\frac{1}{12}\sqrt{2}\frac{a_1^4 - a_2^4}{a_1}$
13.	Hohles Rechteck 	$\frac{1}{12}(b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3)$	die Seiten b_1 und b_2 horizontal	$\frac{1}{2} h_1$	$\frac{1}{6}\frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{h_1}$

№	Form des Querschnitts.	Werth für J.
14.	Rechteckiger Querschnitt ohne Mittelrand 	$\frac{1}{12} b (h_1{}^3 - h_2{}^3)$
15.	T-förmiger Querschnitt 	$\frac{1}{12} \frac{(b_1 h_1{}^2 - b_2 h_2{}^2)^2 - 4 b_1 h_1 b_2 h_2 (h_1 - h_2)^2}{b_1 h_1 - b_2 h_2}$
16.	Doppelt T-förmiger Querschnitt 	$\frac{1}{12} (b_1 h_1{}^3 - b_2 h_2{}^3)$
17.	Kreuzförmiger Querschnitt 	$\frac{1}{12} (b_1 h_1{}^3 + b_2 h_2{}^3)$
18.	Ringförmiger Querschnitt 	$0{,}0491 (d_1{}^4 - d_2{}^4)$

Stellung des Querschnittes für den verticalen Druck.	Werth für e.	Werth für $\frac{J}{e}$.
die beiden horizontal liegenden Theile können sich nicht nähern	$\frac{1}{2} h_1$	$\frac{1}{6} b \frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1}$
der Balken des ⊤ ist horizontal	$\frac{1}{2} \frac{b_1 h_1^2 - b_2 h_2^2}{b_1 h_1 - b_2 h_2}$	$\frac{1}{6} \frac{(b_1 h_1^2 - b_2 h_2^2)^2 - 4 b_1 h_1 b_2 h_2 (h_1 - h_2)^2}{b_1 h_1^2 - b_2 h_2^2}$
die Mittelrippe ist vertical	$\frac{1}{2} h_1$	$\frac{1}{6} \frac{b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3}{h_1}$
die Mittelrippe ist vertical	$\frac{1}{2} h_1$	$\frac{1}{6} \frac{b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3}{h_1}$
beliebig	$\frac{1}{2} d_1$	$0{,}0982 \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1}$

70 Im Folgenden gehen wir zur Berechnung von $Q\,q$ und $(Q\,q)$ für die in der Praxis hauptsächlich zu unterscheidenden Lagerungen des prismatischen Körpers über und bezeichnen die Länge der Körperachse mit l, wobei die entstandenen Krümmungen derselben so gering angenommen werden, daß die einzelnen Theile der elastischen Linie gleich ihren Horizontalprojectionen gesetzt werden dürfen. Außer den in den einzelnen Punkten wirksamen Belastungen wird das Gewicht G des Körpers als eine über die Länge l gleichmäßig vertheilte Last mit in Berücksichtigung gezogen, indem wir die Belastung pro Längeneinheit gleich p Kilogramm annehmen, demnach $G = p\,l$ setzen.

Fig. 323.



1) Der Balken ist an einem Ende A befestigt und trägt am andern Ende B die Last P (Fig. 323).

Für einen beliebigen Querschnitt, die zugehörigen Coordinaten seines Schwerpunktes mit x und y bezeichnet, wobei die Horizontale $A\,C$ als X-Achse und die durch A gehende Verticale als Y-Achse angenommen wird, ist das Spannungsmoment:

$$Q\,q = \frac{E\,J}{\varrho} = P\,(l - x) + \tfrac{1}{2}p\,(l - x)^2.$$

Der Werth desselben wird für $x = 0$ am größten, es ist daher das Widerstandsmoment:

$$(Q\,q) = P\,l + \tfrac{1}{2}p\,l^2 = P\,l + \tfrac{1}{2}G\,l$$

und der Querschnitt am Einklemmungspunkte A der gefährliche, die Brechungsebene, und deshalb die Gleichung zur Berechnung der Abmessungen des Körpers:

$$P\,l + \tfrac{1}{2}G\,l = k\frac{J}{e},$$

worin, wie schon oben angegeben, für $\frac{k}{e}$ der kleinere der beiden Werthe $\frac{k'}{e'}$ oder $\frac{k''}{e''}$ zu benutzen ist.

Berechnet man den Krümmungsradius ϱ mittelst höherer Mathematik, so liefert die Gleichung für das Spannungsmoment das Mittel, die Beziehungen zwischen den Coordinaten x und y irgend eines Punktes der elastischen Linie, d. h. deren Gleichung, zu finden. Es ist dieselbe:

$$E\,J\,y = P\frac{x^2\,(3\,l - x)}{6} + G\frac{x^2\,(6\,l^2 - 4\,l\,x + x^2)}{24\,l}.$$

Hieraus ergiebt sich für $x = l$ die Durchbiegung s_1 am Ende B, d. i. der Maximalwerth von y:

$$s_1 = \frac{l^3}{3} \frac{P + \frac{3}{8} G}{E J}.$$

a) Ist die am Ende wirksame Last P bedeutend größer als das Gewicht G, so kann man G vernachlässigen und wir haben dann:

Spannungsmoment: $$P(l - x) = \frac{E J}{\varrho},$$

Widerstandsmoment: $$P l = k \frac{J}{e},$$

Tragkraft: $$P = \frac{1}{l} k \frac{J}{e},$$

Gleichung der elastischen Linie: $$E J y = P \frac{x^2 (3 l - x)}{6},$$

Durchbiegung: $$s_2 = \frac{l^3}{3} \frac{P}{E J}.$$

b) Ist dagegen die Last P am Ende gegen die gleichmäßig vertheilte Last G zu vernachlässigen, so ergiebt sich:

Spannungsmoment: $$\tfrac{1}{2} p (l - x)^2 = \frac{E J}{\varrho},$$

Widerstandsmoment: $$\tfrac{1}{2} G l = k \frac{J}{e},$$

Tragkraft: $$G = \frac{2}{l} k \frac{J}{e},$$

Gleichung der elastischen Linie: $$E J y = G \frac{x^2 (6 l^2 - 4 l x + x^2)}{24 l},$$

Durchbiegung: $$s_3 = \frac{l^3}{8} \frac{G}{E J}.$$

Eine Vergleichung der beiden Resultate liefert für denselben Körper:

Verhältniß der Durchbiegungen: $$\frac{s_2}{s_3} = \tfrac{8}{3},$$

Verhältniß der Tragkräfte: $$\frac{P}{G} = \tfrac{1}{2}.$$

c) Sind außer der gleichförmigen Last G mehrere Lasten $P_1, P_2, P_3 \cdots$, in den Entfernungen $a_1, a_2, a_3 \cdots$ von dem Einklemmungspunkte A wirksam, so bleibt der letztere der Bruchpunkt, und es ist deshalb für diesen das Widerstandsmoment:

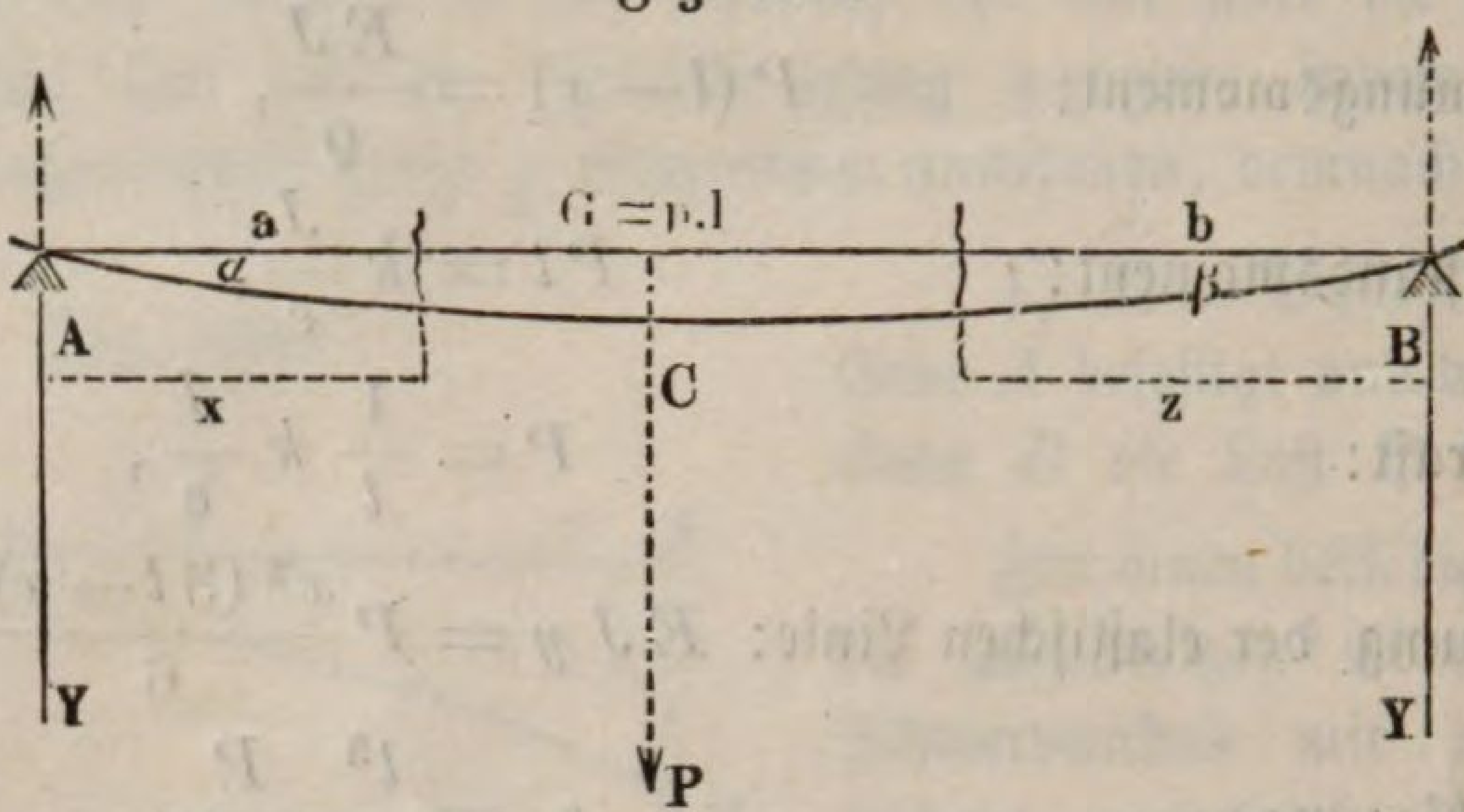
$$\tfrac{1}{2} G l + P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots = k \frac{J}{e}$$

$$\tfrac{1}{2} G l + \Sigma P a = k \frac{J}{e}.$$

2) Der Balken ist an beiden Enden A und B unterstützt und trägt in

der Entfernung a von dem Ende A, im Punkte C, die Last P (Fig. 324). Die Reactionen der Unterstützungspunkte sollen mit A und B bezeichnet werden, und für $l-a$ wollen wir b schreiben. Es ist: $A = \frac{1}{2} G + P \frac{b}{l}$ und $B = \frac{1}{2} G + P \frac{a}{l}$. Die Horizontale wird für alle Querschnitte zwischen

Fig. 324.



A und C als X-Achse, für die zwischen B und C zur Unterscheidung als Z-Achse angenommen, während die Verticalen in A und B die Y-Achsen liefern, indem einmal A als Coordinaten-Anfangspunkt, für die Untersuchung des Stückes BC der elastischen Linie dagegen, B als Anfangspunkt angenommen wird. Hiernach erhalten wir:

Für die Querschnitte zwischen A u. C.

Spannungsmoment: Qq:

$$B(l-x)-P(a-x)-\tfrac{1}{2}p(l-x)^2 = \frac{EJ}{\varrho}$$

oder: $\frac{1}{l}\left\{Pbx + \frac{1}{2}Gx(l-x)\right\} = \frac{EJ}{\varrho}$.

Der Klammerausdruck wird ein Maximum für $x = x_1 = \frac{Pb + \frac{1}{2}Gl}{G}$, woran aber die Bedingung haftet, daß $x_1 \leqq a$ sein muß,

$\frac{Pb + \frac{1}{2}Gl}{G} \leqq a$ heißt aber

$\frac{P}{G} \leqq \frac{a-b}{2b}$, wobei $a > b$ sein muß.

Das Widerstandsmoment für den Querschnitt in der Entfernung x_1 ist:

$(Qq) = \frac{A^2}{2p} = k\frac{J}{e}$ und für den Querschnitt im Aufhängepunkt C der Last P:

$$(Qq) = (P + \tfrac{1}{2}G)\frac{ab}{l} = k\frac{J}{e}.$$

Für die Querschnitte zwischen B u. C.

Spannungsmoment: Qq:

$$A(l-z)-P(b-z)-\tfrac{1}{2}p(l-z)^2 = \frac{EJ}{\varrho}$$

oder: $\frac{1}{l}\left\{Paz + \frac{1}{2}Gz(l-z)\right\} = \frac{EJ}{\varrho}$.

Der Klammerausdruck wird ein Maximum für $z = z_1 = \frac{Pa + \frac{1}{2}Gl}{G}$, woran aber die Bedingung haftet, daß $z_1 \leqq b$ sein muß,

$\frac{Pa + \frac{1}{2}Gl}{G} \leqq b$ heißt aber

$\frac{P}{G} \leqq \frac{b-a}{2a}$, wobei $b > a$ sein muß.

Das Widerstandsmoment für den Querschnitt in der Entfernung z_1 ist:

$(Qq) = \frac{B^2}{2p} = k\frac{J}{e}$ und für den Querschnitt im Aufhängepunkt C der Last P:

$$(Qq) = (P + \tfrac{1}{2}G)\frac{ab}{l} = k\frac{J}{e}.$$

Der Bruchpunkt liegt hiernach entweder in dem Aufhängepunkte C der Last oder in dem größeren Abschnitt des Balkens, d. h. zwischen C und der Mitte desselben. Es sei $a > b$ und $\frac{P}{G} \geqq \frac{a-b}{2b}$, so ist in C der gefährliche Querschnitt, und es ist $(P + \frac{1}{2} G) \frac{ab}{l}$ als Widerstandsmoment bei der Berechnung der Querschnittsdimensionen zu benutzen. Ist dagegen $\frac{P}{G} \leqq \frac{a-b}{2b}$, so liegt der gefährliche Querschnitt in der Entfernung x_1 von A und es ist $\frac{A^2}{2p}$ als Widerstandsmoment bei der Berechnung der Querschnittsdimensionen in Anwendung zu bringen. Der einzige Punkt größter Durchbiegung liegt in der größeren Abtheilung AC, für die sich als Gleichung der elastischen Linie ergiebt, wenn wir mit α den Winkel bezeichnen, den dieselbe bei A mit der Horizontalen bildet und wegen der Kleinheit des Winkels $tang\, \alpha = arc\, \alpha$ setzen:

$$EJ(\alpha x - y) = \frac{Ax^3}{6} - \frac{px^4}{24}.$$

Dem größten Werth von y gleich s entspreche die Abscisse x_2, so hat man:

$$EJ\alpha = \frac{A x_2^2}{2} - \frac{p x_2^3}{6}$$

zur Berechnung von x_2, und

$$EJs = x_2^3 \left(\frac{A}{3} - \frac{p x_2}{8}\right)$$

zur Bestimmung der größten Durchbiegung s.

Die Winkel α und β bestimmen sich durch folgende Gleichungen:

$$EJ\alpha = P \frac{ab(a + 2b)}{6l} + G \frac{l^2}{24}$$

$$EJ\beta = P \frac{ab(2a + b)}{6l} + G \frac{l^2}{24}.$$

Endlich ergiebt sich die Durchbiegung s' im Aufhängepunkt der Last, wenn wir in der Gleichung der elastischen Linie $x = a$ setzen und y entwickeln:

$$EJs' = EJa\alpha - \frac{Aa^3}{6} + \frac{pa^4}{24} \text{ oder}$$

$$EJs' = \frac{a^2 b^2}{3l}\left(P + G \frac{l^2 + ab}{8ab}\right).$$

a) Sehen wir von dem Gewichte G des Balkens, gegenüber der Last P ab, so erhalten wir $G = 0$ gesetzt: $A = P\frac{b}{l}$, $B = P\frac{a}{l}$, die Spannungsmomente: $P\frac{b}{l}x = \frac{EJ}{\varrho}$ und $P\frac{a}{l}z = \frac{EJ}{\varrho}$.

Diese werden für $x = a$ oder $z = b$ ein Maximum, es liegt daher in C der Bruchpunkt, demnach das Widerstandsmoment:

$$(Q\,q) = P\frac{a\,b}{l} = k\,\frac{J}{e};$$

Gleichung der elastischen Linie für das Stück $A\,C$:

$$EJ\,(\alpha\,x - y) = \frac{A\,x^3}{b}; \text{ für das Stück } B\,C\text{: } E\,J\,(\beta\,z - y) = \frac{B\,z^3}{b};$$

die Winkel α und β berechnen sich aus:

$$E\,J\,\alpha = P\frac{ab(a+2b)}{6\,l};\; E\,J\,\beta = P\frac{ab\,(2a+b)}{6\,l}.$$

Die Abscisse x_2 der größten Durchbiegung ist unter der Annahme $a > b$:

$$x_2 = \sqrt{\frac{2\,E\,J\,\alpha}{A}} = \sqrt{\frac{a\,(a+2\,b)}{3}}.$$

Die größte Durchbiegung s_1 selbst aber:

$$s_1 = \frac{x_2^{\,3}}{3}\,\frac{A}{EJ} = \frac{P}{EJ}\,\frac{b}{l}\,\frac{x_2^{\,3}}{3},$$

dagegen die Durchbiegung s'_1 im Aufhängepunkte der Last, also für $x = a$:

$$s'_1 = a\,\alpha - \frac{A\,a^3}{6\,E\,J} = \frac{P}{EJ}\,\frac{a^2\,b^2}{3\,l}.$$

b) Rückt die Last P in die Mitte des Körpers und nehmen wir auf das Gewicht desselben oder auf eine andere gleichmäßig vertheilte Last G Rücksicht, so zeigt die elastische Linie eine gleichmäßige Krümmung und es ergiebt sich für $a = b = \frac{l}{2}$: $A = B = \frac{P+G}{2}$,

Spannungsmoment: $\frac{1}{2}\,P\,x + \frac{1}{2}\,p\,x\,(l - x) = \frac{E\,J}{\varrho}$.

Der Bruchpunkt liegt in der Mitte, für $x = \frac{l}{2}$ ist also das Widerstandsmoment:

$$(Q\,q) = \left(P + \frac{G}{2}\right)\frac{l}{4} = k\,\frac{J}{e}.$$

Es ist ferner $E\,J\,\alpha = E\,J\,\beta = \frac{l^2}{16}\,(P + \frac{2}{3}\,G)$, die Gleichung zur Bestimmung der Winkel α und β.

Gleichung der elastischen Linie für $A\,C$ oder $B\,C$:

$$E\,J\,(\alpha\,x - y) = \frac{P+G}{2}\,\frac{x^3}{6} - p\,\frac{x^4}{24} \text{ oder}$$

$$E\,J\,y = P\frac{3\,l^2 x - 4\,x^3}{48} + G\frac{l^3 x - 2\,l\,x^3 + x^4}{24\,l}.$$

Die größte Durchbiegung s_2 ist gleich der Durchbiegung s'_2 in der Mitte des Balkens, also für $x = \frac{l}{2}$ und es ist demnach:

$$s_2 = s'_2 = \frac{l^3}{48} \frac{P + \frac{5}{8} G}{E J}.$$

c) Vernachlässigen wir im letzten Falle die gleichmäßig vertheilte Last G gegen die Einzellast P, so ist für $a = b = \frac{l}{2}$ und $G = 0$; $A = B = \frac{P}{2}$.

Spannungsmoment: $\frac{1}{2} P x = \frac{E J}{\varrho}$,

Widerstandsmoment: $\frac{1}{4} P l = k \frac{J}{e}$.

Die Tragkraft ist in diesem Falle:

$$P = \frac{4}{l} k \frac{J}{e}.$$

Weiter ist zur Berechnung der Winkel α und β:

$$E J \alpha = E J \beta = \frac{P l^2}{16}.$$

Gleichung der elastischen Linie $E J y = P \frac{3 l^2 x - 4 x^3}{48}$. Die größte Durchbiegung s_3 stimmt mit der im Aufhängepunkte der Last überein, es ist demnach:

$$s_3 = s'_3 = \frac{l^3}{48} \frac{P}{E J}.$$

d) Wird endlich von der Einzellast abgesehen, also nur die gleichmäßig vertheilte Last G in Rechnung gebracht, so ist die elastische Linie ebenfalls gleichmäßig gekrümmt, und wir erhalten, $P = 0$ gesetzt: $A = B = \frac{1}{2} G$.

Spannungsmoment: $\frac{1}{2} p x (l - x) = \frac{E J}{\varrho}$,

Widerstandsmoment: $\frac{1}{8} G l = k \frac{J}{e}$,

Tragkraft: $G = \frac{8}{l} k \frac{J}{e}$,

Winkelgleichung: $E J \alpha = E J \beta = \frac{G l^2}{24}$,

Gleichung der elastischen Linie: $E J y = G \frac{l^3 x - 2 l x^3 + x^4}{24 l}$,

Größte Durchbiegung in der Mitte: $s'_4 = \frac{5}{384} \frac{G l^3}{E J}$.

Eine Vergleichung der beiden letzten Resultate liefert:

Verhältniß der Tragkräfte: $\frac{P}{G} = \frac{1}{2}$,

Verhältniß der Durchbiegungen: $\frac{s'_3}{s'_4} = \frac{8}{5}$.

e) Wird der Körper, außer von seinem Gewichte G, von mehreren isolirten Lasten $P_1, P_2, P_3 \ldots$, in den Punkten $C_1, C_2, C_3 \ldots$ der Achse wirksam, in Anspruch genommen, wobei die Abstände dieser Angriffspunkte von A mit $a_1, a_2, a_3 \ldots$, und die von B mit $b_1, b_2, b_3 \ldots$ bezeichnet werden sollen, so ergeben sich die Reactionen A und B der Unterstützungspunkte auf ebenso einfache Weise wie oben, nämlich:

$$A = \Sigma P \frac{b}{l} + \tfrac{1}{2} G \text{ und } B = \Sigma P \frac{a}{l} + \tfrac{1}{2} G.$$

Zur Bestimmung des Bruchpunktes, der sowohl zwischen zwei aufeinander folgenden Angriffspunkten der Einzelkräfte, als auch in einem derselben liegen kann, muß man die Spannungsmomente für die Querschnitte in den einzelnen Abtheilungen $A\,C_1$, $C_1\,C_2$, $C_2\,C_3 \ldots$ aufstellen und den oder die Maximalwerthe derselben bestimmen, wie es oben bei Annahme einer Last P für die Strecke $A\,C$ und $B\,C$ durchgeführt worden ist. Führen wir das z. B. für die Abtheilung $C_3\,C_4$ durch, so ist, den Querschnitt in der Entfernung x von A angenommen, das Spannungsmoment für denselben:

$$P_1 (x - a_1) + P_2 (x - a_2) + P_3 (x - a_3) + \tfrac{1}{2} p\, x^2 - Ax = \frac{EJ}{\varrho} \text{ oder:}$$

$$(\sum_1^3 P - A)\, x + \tfrac{1}{2} p\, x^2 - \sum_1^3 P a = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Der Ausdruck wird zu einem Maximum für $x = x_1 = \frac{A - \sum_1^3 P}{p}$.

Diese Entfernung muß aber noch, wenn sie zur Entwickelung des Widerstandsmomentes benutzt werden soll, der Bedingung genügen, daß der dazu gehörige Querschnitt in Wirklichkeit zwischen den Angriffspunkten C_3 und C_4 liegt, daß also in diesem Falle $x_1 > a_3$ und zugleich $< a_4$ ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so geht das obige Spannungsmoment durch Substitution dieses Werthes von x in seinen Maximalwerth über, welcher dadurch zum Widerstandsmoment wird und der betreffende Querschnitt ist der gefährliche. Für $x_1 = a_4$ liegt der Bruchpunkt in C_4 selbst. Sieht man von der gleichmäßigen Belastung ab, setzen wir also $p = 0$, so ist das Spannungsmoment:

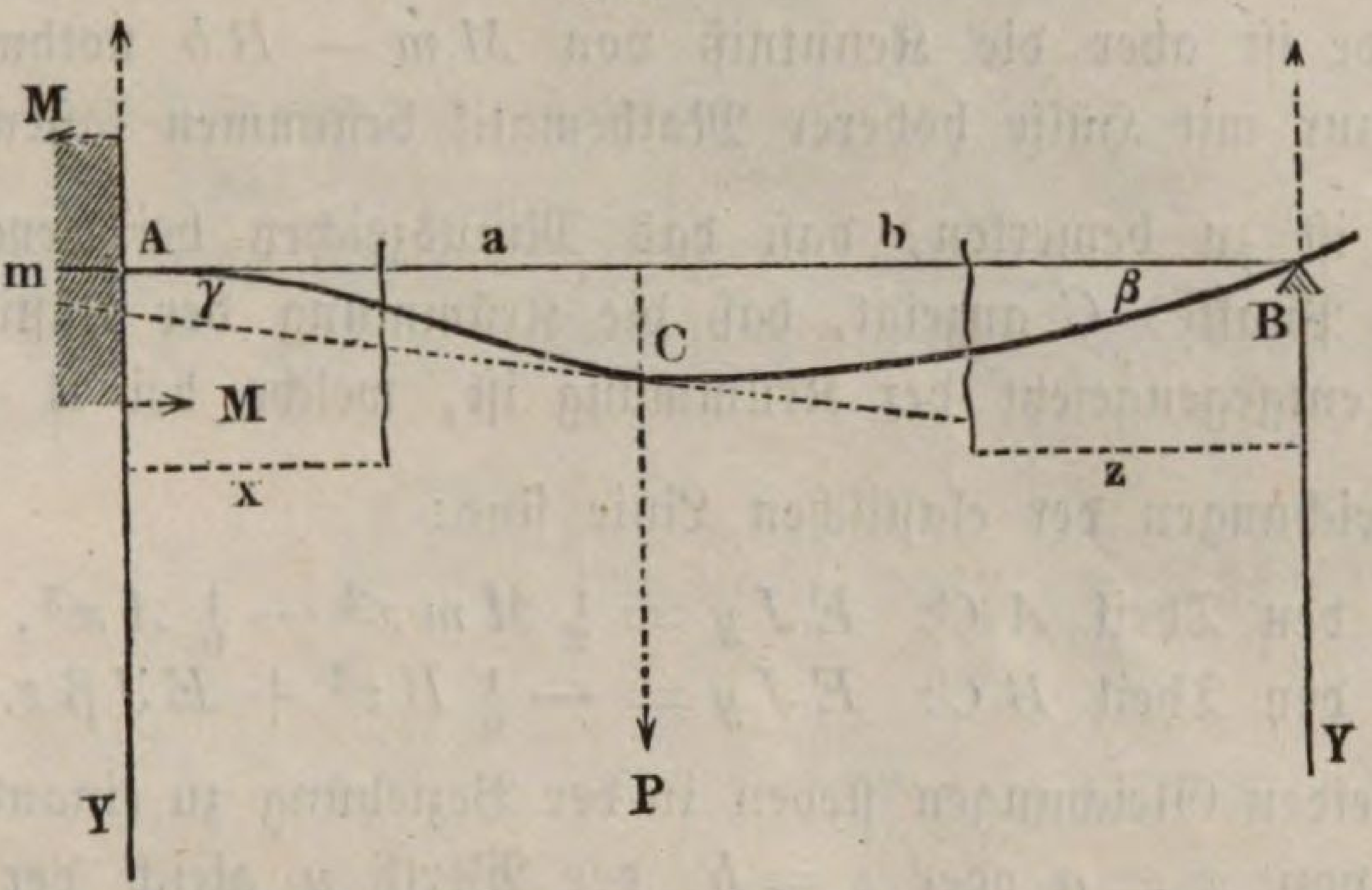
$$(\sum_1^3 P - A)\, x - \sum_1^3 P a = \frac{EJ}{\varrho},$$

welches für $x = a_4$ seinen Maximalwerth erhält, so daß hier der Bruchpunkt jedesmal in einem der Angriffspunkte liegen wird. Ist in dem letztern Falle

$\sum_1^3 P = A$, so fallen die für die einzelnen Querschnitte zwischen C_3 und C_4 aufgestellten Spannungsmomente gleich groß aus, es ist also $\frac{EJ}{\varrho}$ für diese Abtheilung constant, und da bei prismatischen Körpern aus demselben Material EJ ebenfalls constant ist, so wird also ϱ in der Strecke $C_3\,C_4$ seinen Werth nicht ändern, d. h. die elastische Linie ist zwischen C_3 und C_4 nach einem Kreise vom Halbmesser ϱ gekrümmt.

3) Der Körper sei bei A horizontal eingemauert, das andere Ende B aber einfach unterstützt und dabei $A\,B$ horizontal (Fig. 325). In der Entfernung a von dem eingeklemmten Ende wirke die Last P, $l - a$ werde gleich

Fig. 325.



b gesetzt, der Winkel, den die elastische Linie bei B mit $A\,B$ bildet, sei gleich β, und die Reaction des Unterstützungspunktes werde mit B bezeichnet. Um die Einklemmung zu ersetzen, müssen wir eine Reaction A und ein Kräftepaar Mm annehmen, deren vereinte Wirkung im Stande sein muß, das Ende des Stabes in die verlangte horizontale Lage zu bringen. Die elastische Linie des Körpers besteht in diesem Falle aus zwei verschiedenartig gekrümmten Linien, die im Angriffspunkt der Last stetig ineinander übergehen, hier also eine gemeinschaftliche Tangente haben. Für den Theil $A\,C$ nehmen wir $A\,B$ als X-Achse, für den Theil $B\,C$ dagegen als Z-Achse, die in A und B gezogenen Verticalen seien wieder die zugehörigen Y-Achsen. A und B selbst also Coordinaten-Anfangspunkte.

a) Wir sehen von der gleichmäßig vertheilten Last G ab, dann ist:

1) $A + B - P = 0$ und 2) $Mm - A\,a + B\,b = 0$.

Für die Querschnitte zwischen A und C erhält man das Spannungsmoment Qq:

$$Mm - Ax = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Dasselbe erreicht seinen Maximalwerth für $x = 0$; im eingeklemmten Punkte A liegt also ein gefährlicher Querschnitt und es ist für diesen das Widerstandsmoment $(Qq) = Mm$.

Für die Querschnitte zwischen B und C erhält man das Spannungsmoment Qq:

$$-Bz = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Dasselbe erreicht seinen Maximalwerth für $z = b$, im Aufhängepunkte C der Last liegt also ein gefährlicher Querschnitt, und es ist für diesen das Widerstandsmoment $(Qq) = -Bb$.

Es ist demnach eine Vergleichung zwischen Mm und $-Bb$ nothwendig, um zu erfahren, ob sich in A oder in C der wahrscheinliche Bruchpunkt findet. Zu dem Ende ist aber die Kenntniß von $Mm - Bb$ nothwendig, welche Werthe sich nur mit Hülfe höherer Mathematik bestimmen lassen.

Hierbei ist zu bemerken, daß das Minuszeichen bei dem Spannungsmomente des Punktes C anzeigt, daß die Krümmung der elastischen Linie an dieser Stelle entgegengesetzt der Krümmung ist, welche bei A vorhanden ist.

Die Gleichungen der elastischen Linie sind:

für den Theil AC: $EJy = \frac{1}{2} Mm x^2 - \frac{1}{6} A x^3$,
für den Theil BC: $EJy = -\frac{1}{6} B z^3 + EJ\beta z$.

Diese beiden Gleichungen stehen in der Beziehung zu einander, daß durch Substitution von $x = a$ oder $z = b$, der Werth y gleich der Durchbiegung s' im Aufhängepunkte der Last wird. Führt man dies aus, so erhält man:

$$3)\ \frac{1}{2} Mm a^2 - \frac{1}{6} A a^3 = -\frac{1}{6} B b^3 + EJ\beta b = EJ s'.$$

Eine vierte Beziehung zwischen den unbekannten Größen findet sich bei Berücksichtigung, daß beide elastische Linien in dem Aufhängepunkte der Last P eine gemeinschaftliche Tangente haben. Bildet diese mit der Horizontalen AB den Winkel γ, so ist für die beiden Theile der in C übergehenden elastischen Linien *tang* γ gleich aber entgegengesetzt:

$$4)\ Mm a - \frac{1}{2} A a^2 = \frac{1}{2} B b^2 - EJ\beta = EJ\gamma.$$

Aus den vier numerirten Gleichungen findet sich:

$$A = P\frac{(3a^2 + 6ab + 2b^2)b}{2l^3};\ B = P\frac{(2a + 3b)a^2}{2l^3},$$

$$Mm = P\frac{ab(a + 2b)}{2l^2};\ EJ\beta = P\frac{a^2 b}{4l}.$$

Das Verhältniß der beiden Maximalwerthe läßt sich nun bestimmen: Es ist

$$\frac{Mm}{-Bb} = l\frac{a + 2b}{(2a + 3b)a}$$

und hiernach liegt der gefährliche Querschnitt im Einklemmungspunkte A, wenn:

$$(a + 2b)\,l > (2a + 3b)\,a,$$
$$(a + 2b)\,(a + b) > (2a + 3b)\,a, \text{ d. h.}$$
$$b > a\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

im entgegengesetzten Falle erfolgt der Bruch wahrscheinlich im Aufhängepunkte C der Last; die hier stattfindende Durchbiegung s' bestimmt sich durch die Gleichung:

$$E J s' = P \frac{a^3 b^2 (3a + 4b)}{12\,l^3},$$

sowie γ gefunden wird durch:

$$E J \gamma = P \frac{a^2 b\,(2b^2 - a^2)}{4\,l^3}.$$

Hiernach ist γ d. i. $tang\,\gamma$ positiv, sobald $2b^2 > a^2$ oder $b > a\sqrt{\frac{1}{2}}$, in welchem Falle der Theil BC der elastischen Linie mehr als AC durchgebogen ist. Die Coordinaten der größten Durchbiegung in diesem Theile bezeichnen wir mit z' und s_2 und erhalten dafür aus der Gleichung der elastischen Linie:

$$z' = \sqrt{\frac{2EJ}{B}\beta} = l\sqrt{\frac{b}{2a + 3b}} \text{ und}$$
$$E J s_2 = \frac{z'}{6}(6EJ\beta - B z'^2) = \frac{B}{3} z'^3.$$

Ist dagegen γ negativ, also $b < a\sqrt{\frac{1}{2}}$, so findet in dem Theile AC die größte Durchbiegung statt, deren Coordinaten mit x' und s_1 bezeichnet werden sollen. Aus der Gleichung der elastischen Linie, für den Theil AC ergiebt sich:

$$x' = 2\frac{Mm}{A} = l\frac{2a(a + 2b)}{3a^2 + 6ab + 2b^2} \text{ und}$$
$$E J s_1 = \frac{x'^2}{6}(3Mm - A x') = \frac{A}{12} x'^3.$$

Setzt man endlich den Werth des Spannungsmomentes für den Theil AC gleich Null, so ist damit die Stelle der elastischen Linie in Betracht gezogen, an welcher dieselbe zu einer geraden Linie, ϱ also unendlich groß geworden, d. h. hier geht die convexe in die concave Krümmung über. Bezeichnet man die Abscisse dieses Punktes (Inflexionspunkt) mit x'', so ist:

$$Mm - A x'' = 0 \text{ und } x'' = \frac{Mm}{A} = \frac{x'}{2}.$$

b) Ist die Last P in der Mitte des Körpers wirksam, so haben wir in den vorigen Resultaten $a = b$ zu setzen. Da b bei dieser Annahme größer als $a\sqrt{\frac{1}{2}}$, so liegt der gefährliche Querschnitt im Einklemmungspunkt

und es ist deshalb das Widerstandsmoment $(Q\,q)$:

$$(Q\,q) = M\,m = \frac{3}{16}\,P\,l = k\,\frac{J}{e}$$

und die Tragkraft: $$P = \frac{16}{3}\,\frac{1}{l}\,k\,\frac{J}{e}.$$

Weiter ist der Druck an der Unterstützung $B = \frac{5}{16}\,P$, der an der Einklemmungsstelle: $A = \frac{11}{16}\,P$.

Die Coordinaten x'', y'' des Inflexionspunktes sind:

$$x'' = \frac{3}{11}\,l;\ y'' = \frac{9}{1936}\,\frac{P\,l^3}{E\,J}.$$

Die Coordinaten x', s_1 der größten Durchbiegung in dem Theile $A\,C$:

$$x' = \frac{6}{11}\,l;\ s_1 = \frac{9}{968}\,\frac{P\,l^3}{E\,J}.$$

Die Coordinaten z', s_2 der größten Durchbiegung in dem Theile $B\,C$, d. i. die absolut größte:

$$z' = \frac{l}{5}\sqrt{5}\,;\ s_2 = \frac{\sqrt{5}}{240}\,\frac{P\,l^3}{E\,J} \text{ und } \frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{1{,}0021}.$$

Die Durchbiegung s' im Aufhängepunkte der Last, für $x = a = \frac{l}{2}$:

$$s' = \frac{7}{768}\,\frac{P\,l^3}{E\,J},\ \frac{s'}{s_1} = \frac{1}{1{,}286},\ \frac{s'}{s_2} = \frac{1}{1{,}289}$$

$$E\,J\,\beta = \frac{1}{32}\,P\,l^2 \text{ und } E\,J\,\gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{32}\,P\,l^2,\ \text{d. h. } \gamma = \frac{1}{4}\,\beta.$$

Die Spannungsmomente sind nach dem Vorigen für die einzelnen Querschnitte folgenden Veränderungen unterworfen. Für $x = 0$ an der Einklemmungsstelle ist $Q\,q = M\,m$, nimmt von hier aus proportional dem Werthe x ab, bis zum Inflexionspunkte, wo $Q\,q = 0$ wird, nimmt von hier aus wieder, in absoluter Hinsicht proportional der Entfernung x, zu bis $x = a$ oder $z = b$, wo es seinen zweiten Maximalwerth $B\,b$ erreicht, und nimmt endlich von hier aus stetig ab bis zum Unterstützungspunkte B, in welchem $Q\,q$ wieder zu Null wird. Errichtet man auf einer Linie $A\,B = l$ (Fig. 326) Normalen, welche dem Spannungsmomente proportional sind, so liefert die Linie $H\,D\,L\,B$ ein deutliches Bild von der Veränderlichkeit dieser Spannungsmomente. Für einen beliebigen Punkt M der elastischen Linie ist also die Normale $M\,N$ dem Spannungsmomente an dieser Stelle proportional, $A\,H$ und $C\,L$ repräsentiren die Maxima der Spannungsmomente, und in D, wo die betreffende Normale verschwindet, also ein Spannungsmoment nicht vor-

handen ist, liegt der Inflexionspunkt der elastischen Linie, d. h. hier findet der Uebergang der einen Krümmung in die entgegengesetzte statt und dabei ist $AD = \frac{3}{11} l$.

Fig. 326.

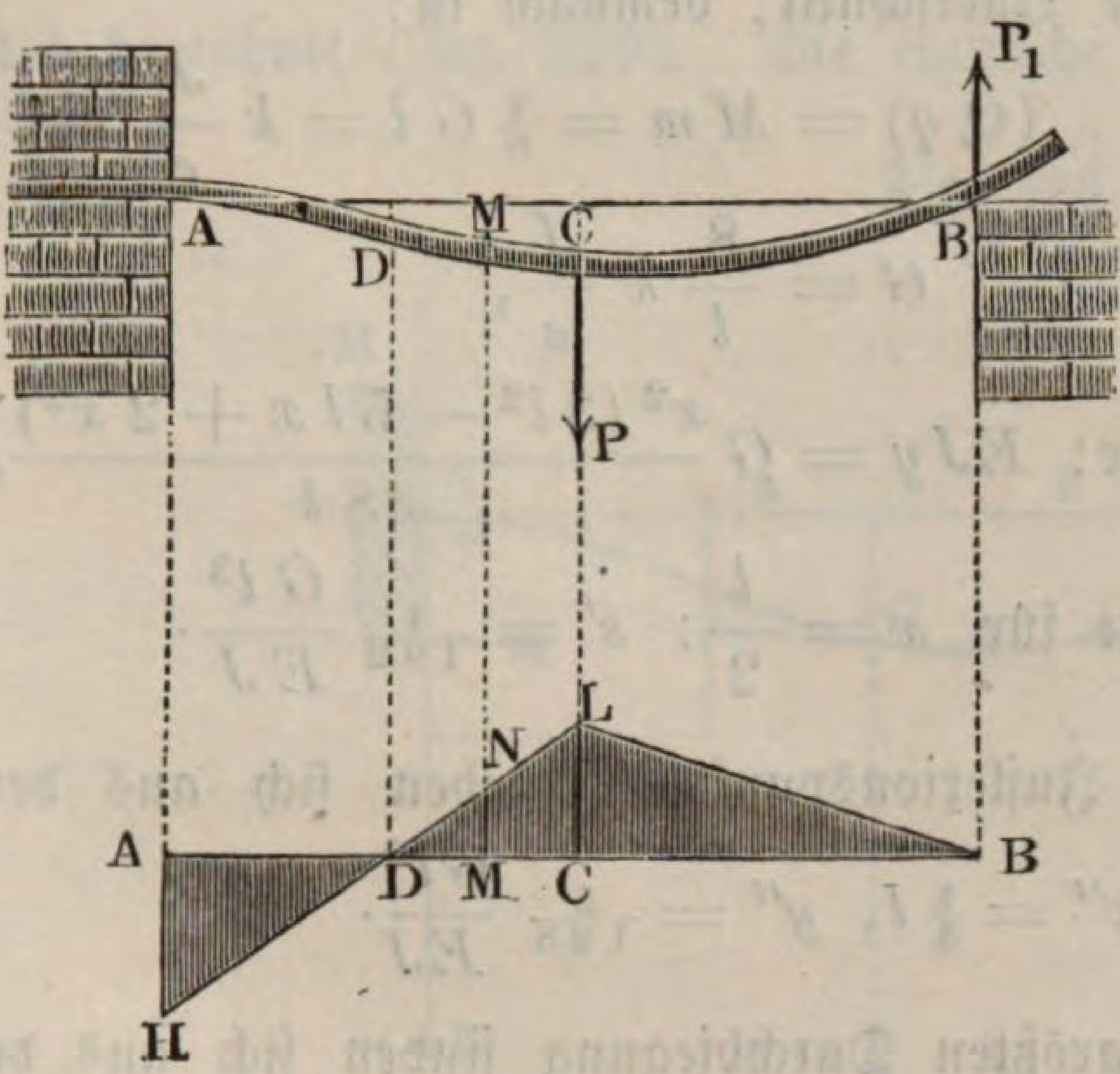
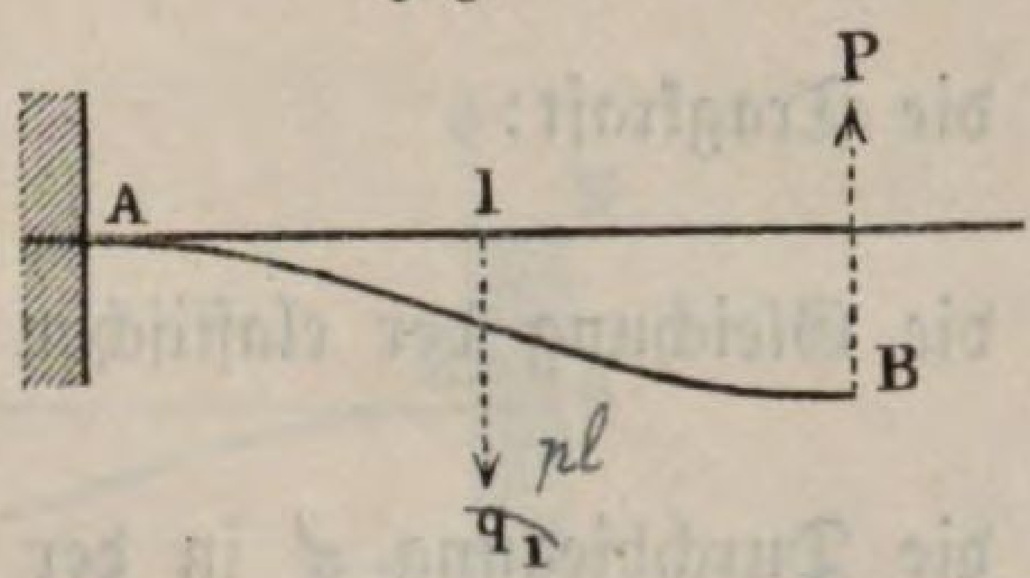


Fig. 327.



c) Der Körper habe eine gleichmäßig vertheilte Last $G = p\,l$ zu tragen. Die Untersuchung müßte in diesem Falle in gleicher Weise wie unter 3a dieses Paragraphen geführt werden, man kann jedoch auch von 1 dieses Paragraphen ausgehen, die dort nach unten, am Ende, vertical abwärts wirkende Last P, entgegengesetzt wirkend annehmen, und dieselbe so groß werden lassen, daß die dort gefundene Durchbiegung s_1 zu Null wird, der Endpunkt also mit dem Einklemmungspunkte A in derselben Horizontalen zu liegen kommt. Nennen wir diesen aufwärts wirkenden Druck vorläufig ebenfalls P (Fig. 327), so ist für einen beliebigen Querschnitt, A als Coordinaten-Anfangspunkt angenommen:

das Spannungsmoment:

$$Q\,q = \tfrac{1}{2}\,p\,(l-x)^2 - P\,(l-x) = \frac{E\,J}{\varrho},$$

die Gleichung der elastischen Linie:

$$E\,J\,y = G\,\frac{x^2\,(6\,l^2 - 4\,l\,x + x^2)}{24\,l} - P\,\frac{x^2\,(3\,l - x)}{6},$$

die Durchbiegung am Ende des Körpers:

$$E\,J\,s_1 = \frac{l^3}{3}\,(\tfrac{3}{8}\,G - P).$$

Soll diese zu Null werden, so muß P, was jetzt zu der Reaction des Unterstützungspunktes wird, der Bezeichnung in dieser Nummer gemäß, B genannt werden, und es ist:

$$B = \tfrac{3}{8}\,G \text{ und } A = \tfrac{5}{8}\,G.$$

Bei Benutzung dieses Werthes ist:

das Spannungsmoment: $Q\,q = G\,\frac{(l-x)\,(l-4\,x)}{8\,l} = \frac{E\,J}{\varrho}$.

Dasselbe erhält seinen größten Werth für $x = 0$, d. h. am Einklemmungspunkte A liegt der gefährliche Querschnitt, demnach ist:

das Widerstandsmoment: $(Q\,q) = M\,m = \frac{1}{8}\,G\,l = k\,\frac{J}{e}$ und

die Tragkraft: $G = \frac{8}{l}\,k\,\frac{J}{e}$,

die Gleichung der elastischen Linie: $E\,J\,y = G\,\frac{x^2\,(3\,l^2 - 5\,l\,x + 2\,x^2)}{48\,l}$,

die Durchbiegung s' in der Mitte für $x = \frac{l}{2}$: $s' = \frac{1}{192}\,\frac{G\,l^3}{E\,J}$.

Die Coordinaten x'', y'' des Inflexionspunktes ergeben sich aus dem Spannungsmoment für $\varrho = \infty$; $x'' = \frac{1}{4}\,l$, $y'' = \frac{5}{128}\,\frac{G\,l^3}{E\,J}$.

Die Coordinaten x_1, s der größten Durchbiegung finden sich aus der Gleichung der elastischen Linie:

$$x_1 = 0{,}578 \cdot l,\quad s = 0{,}26\,\frac{G\,l^3}{48\,E\,J},\quad \frac{s'}{s} = \frac{1}{1{,}04}.$$

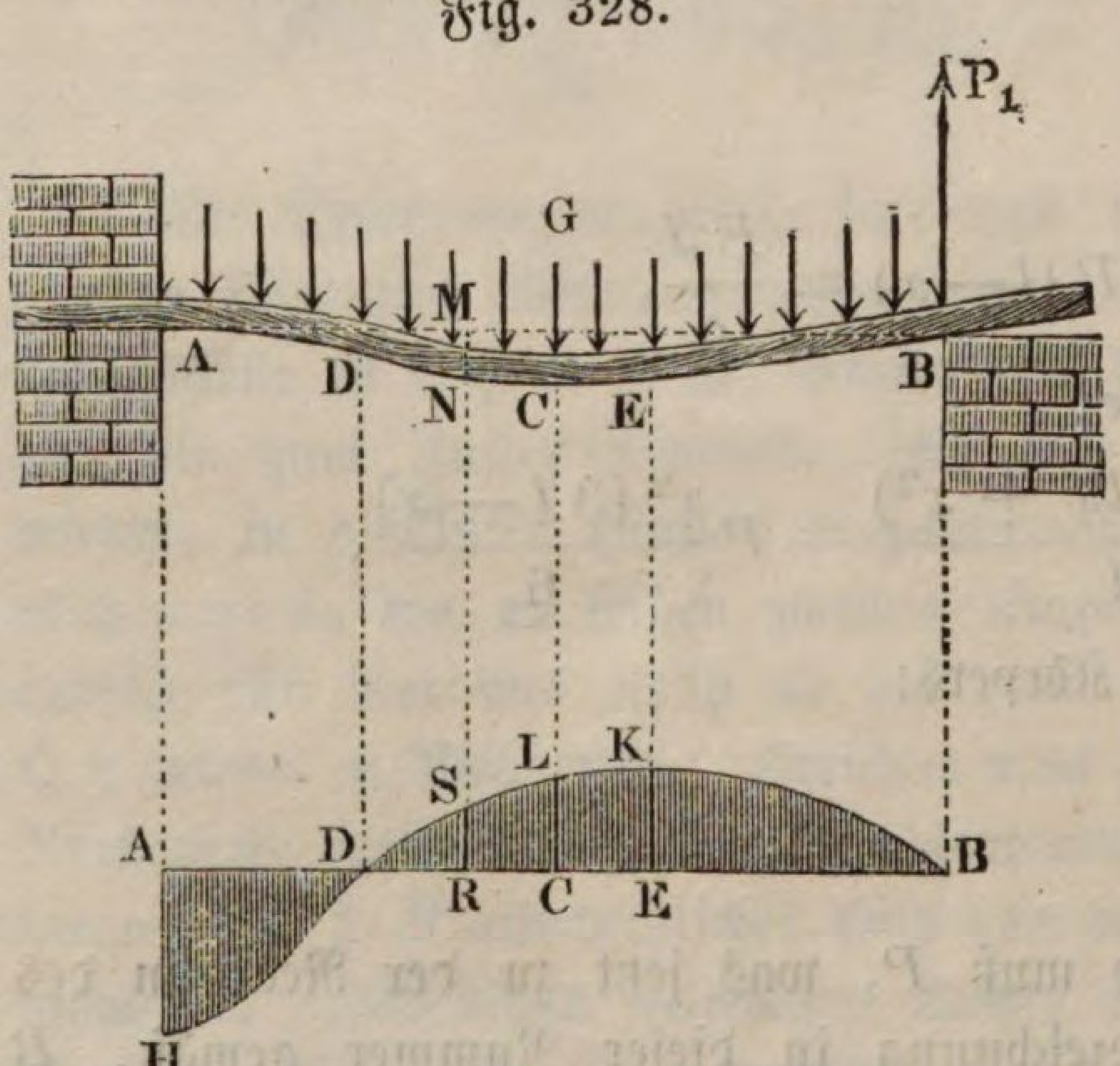
Ferner ergiebt sich mittelst höherer Mathematik:

$$E\,J\,\beta = \frac{1}{48}\,G\,l^2 \text{ und } E\,J\,\gamma = \frac{1}{192}\,G\,l^2,$$

so daß $\gamma = \frac{1}{4}\,\beta$ ist.

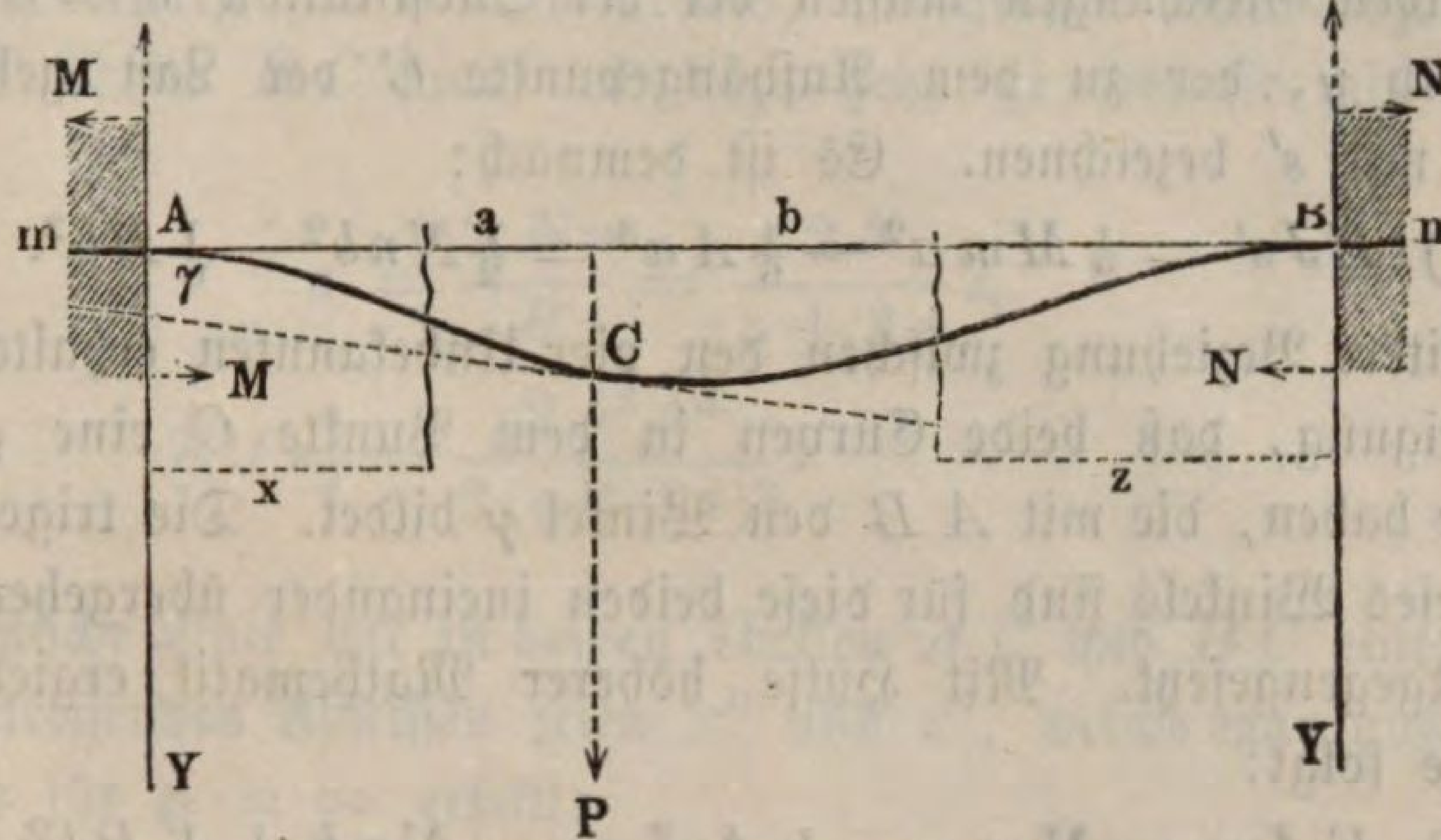
In Figur 328 sind zu $A\,B = l$ Normalen errichtet worden, welche den Spannungsmomenten in den einzelnen Querschnitten des Körpers proportional sind. Dieselben sind nicht der einfachen Entfernung x von dem eingeklemmten Ende proportional, sondern dem Ausdrucke $(l-x)\,(l-4\,x)$, d. i. einem in Bezug auf x quadratischen Ausdrucke. Die Endpunkte dieser Normalen sind deshalb nicht, wie bei dem vorigen Falle, durch gebrochene gerade Linien, sondern durch krumme Linien begrenzt. Hier repräsentiren $A\,H$ und $K\,E$ die beiden Maxima, dabei ist $A\,H$ der absolut größte Werth, $C\,L$ ist dem Spannungsmomente in der Mitte proportional und bei D liegt wieder der Inflexionspunkt der elastischen Linie, wobei $A\,D = \frac{1}{4}\,l$ ist.

Fig. 328.



4) Der Körper von der Länge l sei mit beiden Enden A und B in horizontaler Lage eingeklemmt und trage in der Entfernung a von dem Ende A im Punkte C die Last P. Die Einklemmungen werden bei dem Endpunkte A durch das Kräftepaar Mm und die Kraft A, bei B dagegen durch das Kräftepaar Nn und die Kraft B ersetzt und dabei $l - a$ wieder mit b bezeichnet (Fig. 329). Die elastische Linie des Körpers besteht aus zwei

Fig. 329.



verschiedenartig gekrümmten Theilen AC und BC, welche in C stetig ineinander übergehen, hier also eine gemeinschaftliche Tangente haben, welche mit AB den Winkel γ bilden mag. Für den Theil AC der elastischen Linie sei AB, X-Achse und die in A dazu errichtete Normale Y-Achse; für den Theil BC der Curve sei BA, Z-Achse und die in B errichtete Normale Y-Achse; A und B sind demnach die Anfangspunkte der beiden Coordinaten-Systeme.

a) Es sei P die einzige Belastung des Körpers, von der gleichmäßigen Belastung $G = pl$ werde also abgesehen, dann ist:

1) $A + B - P = 0$ und 2) $Mm - Aa - Nn + Bb = 0$.

Für die Querschnitte zwischen A und C ergiebt sich das Spannungsmoment Qq zu:

$$Mm - Ax = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Dasselbe erreicht seinen Maximalwerth für $x = 0$; im eingeklemmten Punkte A liegt also ein gefährlicher Querschnitt und es ist für diesen das Widerstandsmoment $(Qq) = Mm$.

Für die Querschnitte zwischen B und C ergiebt sich das Spannungsmoment Qq zu:

$$Nn - Bz = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Dasselbe erreicht seinen Maximalwerth für $z = 0$; im eingeklemmten Punkte B liegt also ein gefährlicher Querschnitt und es ist für diesen das Widerstandsmoment $(Qq) = Nn$.

Es ist ferner noch der Querschnitt im Aufhängepunkte C der Last P in Bezug auf seine Widerstandsfähigkeit zu untersuchen, daher ist das hier statt-

findende Spannungsmoment $Vv = Mm - Aa$ oder $Nn - Bb$, bei der Aufsuchung des absolut gefährlichsten Querschnittes in Betracht zu ziehen. Zu dem Ende ist die Kenntniß von Mm, Nn, A und B nothwendig, welche Werthe sich nur mit Hülfe höherer Mathematik bestimmen lassen.

Die Gleichungen der elastischen Linie sind:

für den Theil AC: $EJy = \frac{1}{2} Mm x^2 - \frac{1}{6} A x^3$,

für den Theil BC: $EJy = \frac{1}{2} Nn z^2 - \frac{1}{6} B z^3$.

Diese beiden Gleichungen müssen bei der Substitution $x = a$ und $z = b$ denselben Werth y, der zu dem Aufhängepunkte C der Last gehört, liefern und den wir mit s' bezeichnen. Es ist demnach:

$$3)\ EJs' = \tfrac{1}{2} Mm a^2 - \tfrac{1}{6} A a^3 = \tfrac{1}{2} Nn b^2 - \tfrac{1}{6} B b^3.$$

Eine weitere Beziehung zwischen den vier Unbekannten erhalten wir durch die Berücksichtigung, daß beide Curven in dem Punkte C eine gemeinschaftliche Tangente haben, die mit AB den Winkel γ bildet. Die trigonometrischen Tangenten dieses Winkels sind für diese beiden ineinander übergehenden Curven gleich und entgegengesetzt. Mit Hülfe höherer Mathematik ergiebt sich diese Beziehung wie folgt:

$$4)\ EJ\gamma = Mm a - \tfrac{1}{2} A a^2 = - Nn b + \tfrac{1}{2} B b^2.$$

Aus den vier numerirten Gleichungen erhalten wir:

$$A = P \frac{b^2 (3a + b)}{l^3};\ B = P \frac{a^2 (a + 3b)}{l^3};\ Mm = P \frac{a b^2}{l^2};\ Nn = P \frac{a^2 b}{l^2}$$

$$\text{und } Vv = Mm - Aa = - P \frac{2 a^2 b^2}{l^3}.$$

Das negative Zeichen bei Vv giebt an, daß die elastische Linie bei C eine Krümmung hat, welche der bei A und B entgegengesetzt ist. Aus den obigen Werthen folgt:

$$b \,.\, Mm = P \frac{a b^3}{l^2};\ a \,.\, Nn = P \frac{a^3 b}{l^2};\ - l \,.\, Vv = P \frac{2 a^2 b^2}{l^2}.$$

Die Addition dieser Ausdrücke liefert eine bemerkenswerthe Beziehung zwischen den Spannungsmomenten der Querschnitte in A, B und C:

$$b \,.\, Mm + a \,.\, Nn - l \,.\, Vv = Pab.$$

Um den gefährlichen Querschnitt zu finden, sind die relativ größten Spannungsmomente Mm, Nn, $-Vv$ mit einander zu vergleichen. Dies liefert:

$$Mm : -Vv : Nn = \frac{1}{2a} : \frac{1}{l} : \frac{1}{2b}.$$

Ist hierbei $a < b$, so ist Mm am größten, daher das Widerstandsmoment $(Qq) = Mm = k \frac{J}{e}$; für $a = b$ wird $Mm = -Vv = Nn = \frac{1}{8} Pb$, d. h. die drei Querschnitte in A, B und C sind gleich gefährlich, und ist $a > b$, so ist Nn am größten, daher das Widerstandsmoment $(Qq) = Nn = k \frac{J}{e}$.

Die Durchbiegung s' im Aufhängepunkte C der Last findet sich aus:

$$E J s' = P \frac{a^3 b^3}{3 l^3}.$$

Der Winkel γ bestimmt sich aus der Gleichung:

$$E J \gamma = P \frac{a^2 b^2 (b - a)}{2 l^3}.$$

Dieser Werth ist für $a < b$ positiv, die größte Durchbiegung s_2 findet dann in dem Theile $B C$ statt, die dazu gehörige Abscisse mit z' bezeichnet, liefert:

$$z' = \frac{2 N n}{B} = \frac{2 b}{a + 3 b} l,$$

$$E J s_2 = \frac{2 a^2 b^3}{3 (a + 3 b)^2}.$$

Die elastische Linie hat in beiden Theilen $A C$ und $B C$ einen Inflexionspunkt, die betreffenden Abscissen seien x'' und z'', welche man aus dem Spannungsmoment für $\varrho = \infty$ erhält:

$$x'' = \frac{M m}{A} = \frac{a}{3 a + b} l \text{ und } z'' = \frac{N n}{B} = \frac{b}{a + 3 b} l = \tfrac{1}{2} z'.$$

b) Rückt die Last P in die Mitte, so ist die elastische Linie nach beiden Seiten in gleicher Weise gekrümmt, und man erhält die betreffenden Resultate, wenn man in den obigen Ausdrücken $b = a$ setzt:

$$A = B = \tfrac{1}{2} P; \; M m = - V v = N n = \tfrac{1}{8} P l$$

gleich dem Widerstandsmoment $(Q q)$ also:

$$\tfrac{1}{8} P l = k \frac{J}{e},$$

daher die Tragkraft:

$$P = \frac{8}{l} k \frac{J}{e},$$

die Gleichung der elastischen Linie:

$$E J y = \tfrac{1}{48} P x^2 (3 l - 4 x) = \tfrac{1}{48} P z^2 (3 l - 4 z).$$

Es ist ferner $E J \gamma = 0$, daher im Aufhängepunkte der Last die größte Durchbiegung s', und es ist in diesem Falle:

$$E J s' = \tfrac{1}{192} P l^3.$$

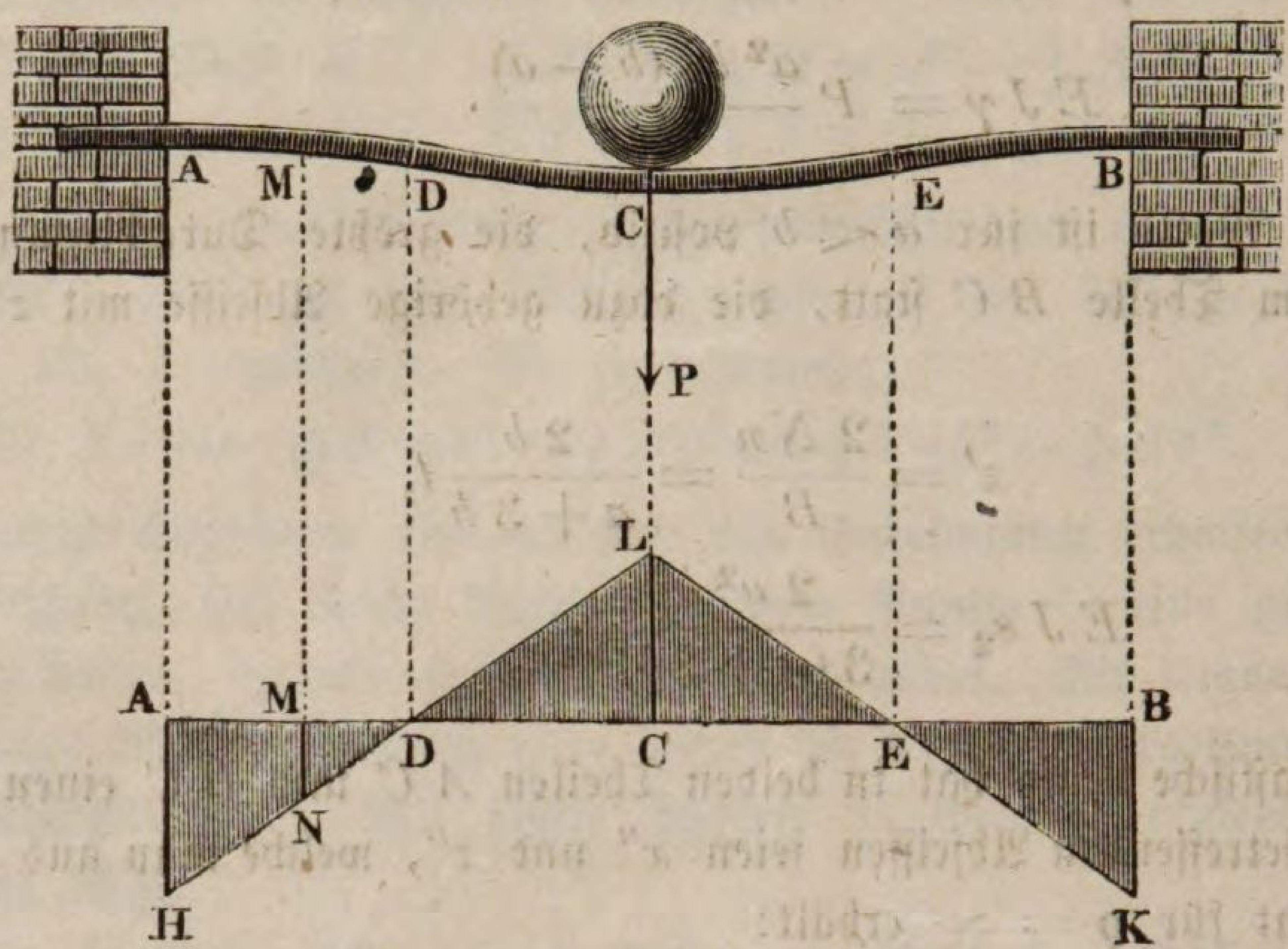
Die Coordinaten $x'' y'$ und $z'' y''$ der Inflexionspunkte werden dabei:

$$x'' = z'' = \tfrac{1}{4} l; \; E J y' = E J y'' = \tfrac{1}{2} E J s'.$$

In der Figur 330 (a. f. S.) sind die Spannungsmomente der einzelnen Querschnitte normal zu $A B = l$ aufgetragen worden und es stellt demnach die gebrochene Linie $H D L E K$ die Veränderlichkeit dieser Momente dar.

Die drei Maximalwerthe, durch AH, CL, BK dargestellt, sind hier gleich groß; bei D und E liegen die Inflexionspunkte der elastischen Linie und zwar ist $AD = BE = \frac{1}{4} l$.

Fig. 330.



c) Der Körper habe eine gleichmäßig vertheilte Last $G = p$ zu tragen. Die Untersuchungen werden unter denselben Annahmen wie bei a geführt, wobei sich gleich übersehen läßt, daß die Krümmungsverhältnisse in beiden Theilen AC und BC der elastischen Linie dieselben sind, unter C die Mitte derselben verstanden.

Wir erhalten als Spannungsmomente für jeden beliebigen Querschnitt der elastischen Linie, in der Entfernung x von dem Einklemmungspunkte A, der als Coordinaten-Anfangspunkt angenommen wird:

$$Q q = M m - A x + \frac{1}{2} p x^2 = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Hieraus ergiebt sich mittelst höherer Mathematik, wenn man mit γ den Winkel bezeichnet, den die Tangente in dem betreffenden Punkte mit AB bildet:

$$M m x - \frac{1}{2} A x^2 + \frac{1}{6} p x^3 = EJ\gamma.$$

Als Gleichung der elastischen Linie findet sich hieraus:

$$\frac{1}{2} M m x^2 - \frac{1}{6} A x^3 + \frac{1}{24} p x^4 = EJy.$$

Die beiden letzten Gleichungen müssen für $x = l$ zu Null werden, da die elastische Linie bei B eine horizontale Lage haben und der Punkt B in der X-Achse AB liegen soll. Es ist demnach:

$$M m l - \frac{1}{2} A l^2 + \frac{1}{6} p l^3 = 0,$$
$$\frac{1}{2} M m l^2 - \frac{1}{6} A l^3 + \frac{1}{24} p l^4 = 0$$

und hieraus ergiebt sich:

$$A = \frac{1}{2} G = B;\ M m = \frac{1}{12} G l = N n.$$

Bei Benutzung dieser Werthe finden wir das Spannungsmoment

$$Q\,q = \tfrac{1}{12}\,G\,l - \tfrac{1}{2}\,G\,x + \tfrac{1}{2}\,p\,x^2 = \frac{E\,J}{\varrho},$$

und daraus erhalten wir das für den mittleren Querschnitt C:

$$V\,v = \tfrac{1}{12}\,G\,l - \tfrac{1}{2}\,G\frac{l}{2} + \tfrac{1}{2}\,p\left(\frac{l}{2}\right)^2 = -\,\tfrac{1}{24}\,G\,l.$$

Es ist zu ersehen, daß die Querschnitte an den eingeklemmten Punkten die gefährlichen sind, und wir haben daher das Widerstandsmoment:

$$(Q\,q) = \tfrac{1}{12}\,G\,l = k\,\frac{J}{e} \text{ und die Tragkraft } G = \frac{12}{l}\,k\,\frac{J}{e}.$$

Die Gleichung der elastischen Linie ist:

$$E\,J\,y = \tfrac{1}{24}\,G\,l\,x^2 - \tfrac{1}{12}\,G\,x^3 + \tfrac{1}{24}\,p\,x^4,$$

für $x = \dfrac{l}{2}$ nimmt y seinen Maximalwerth an, den wir wieder mit s' bezeichnen:

$$E\,J\,s' = \tfrac{1}{384}\,G\,l^3.$$

Die Abscissen x' und x'' der beiden Inflexionspunkte ergeben sich, wenn wir das Spannungsmoment $Q\,q = 0$ setzen:

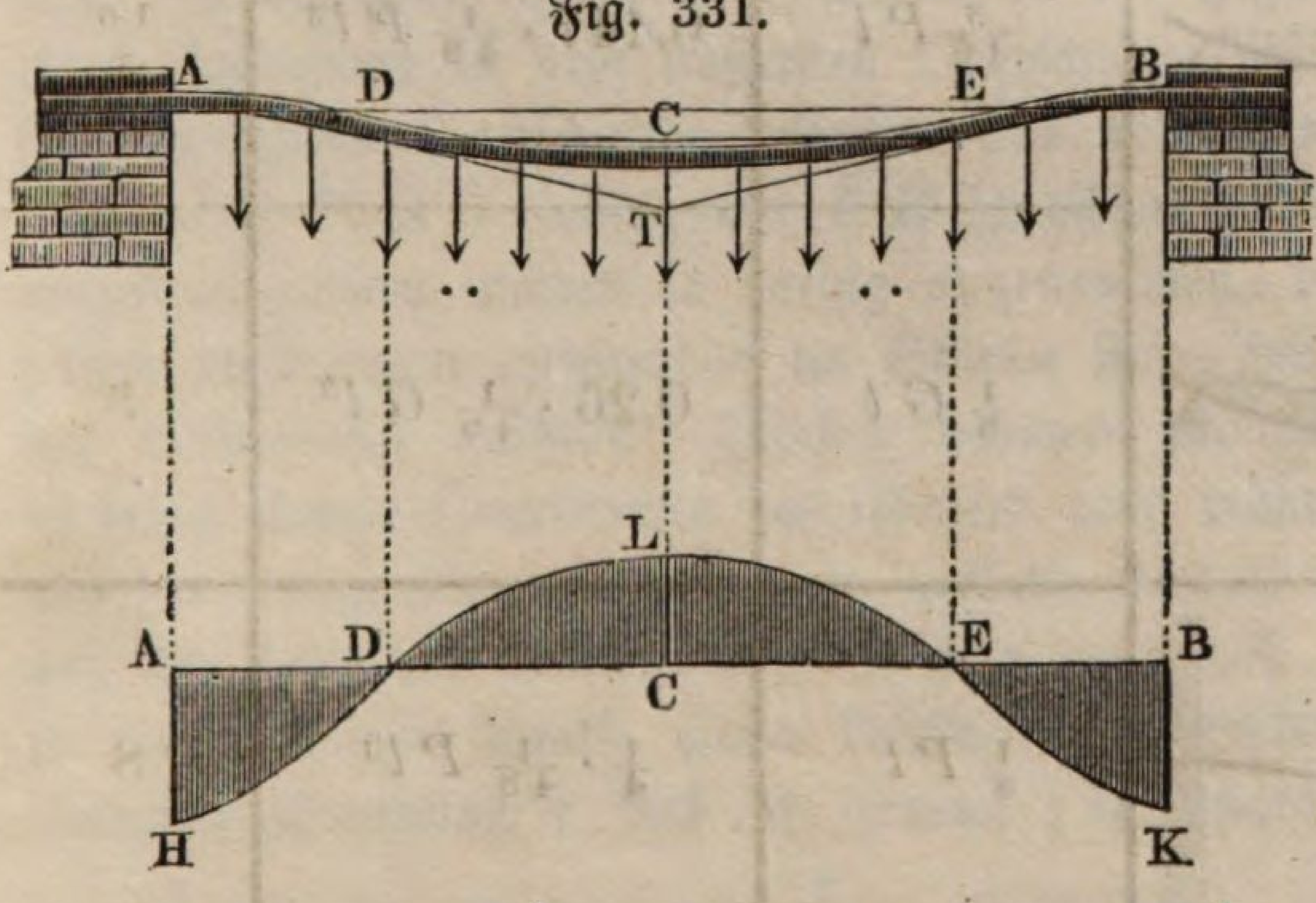
$$\tfrac{1}{12}\,G\,l - \tfrac{1}{2}\,G\,x + \tfrac{1}{2}\,p\,x^2 = 0 \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{12}\,p\,l^2 - \tfrac{1}{2}\,p\,l\,x + \tfrac{1}{2}\,p\,x^2 = 0,$$

$$x' = \frac{l}{6}\,(3 - \sqrt{3});\quad x'' = \frac{l}{6}\,(3 + \sqrt{3}).$$

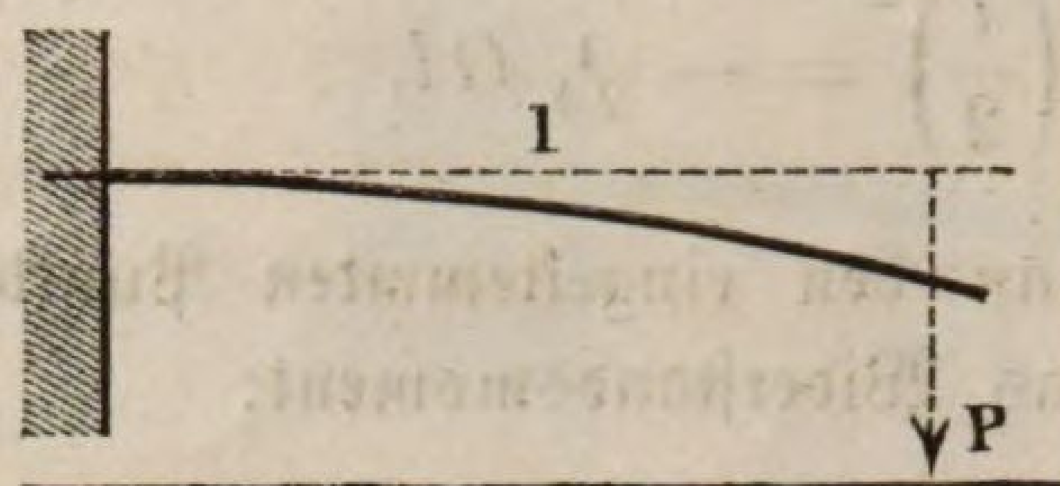
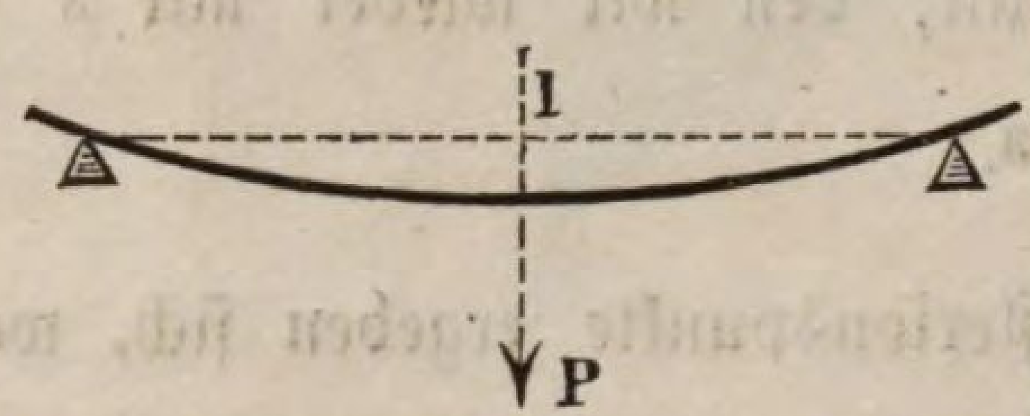
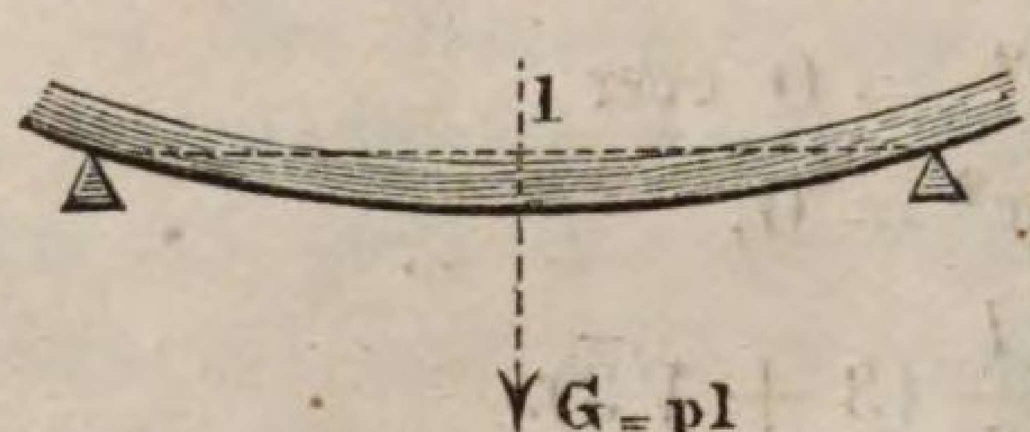
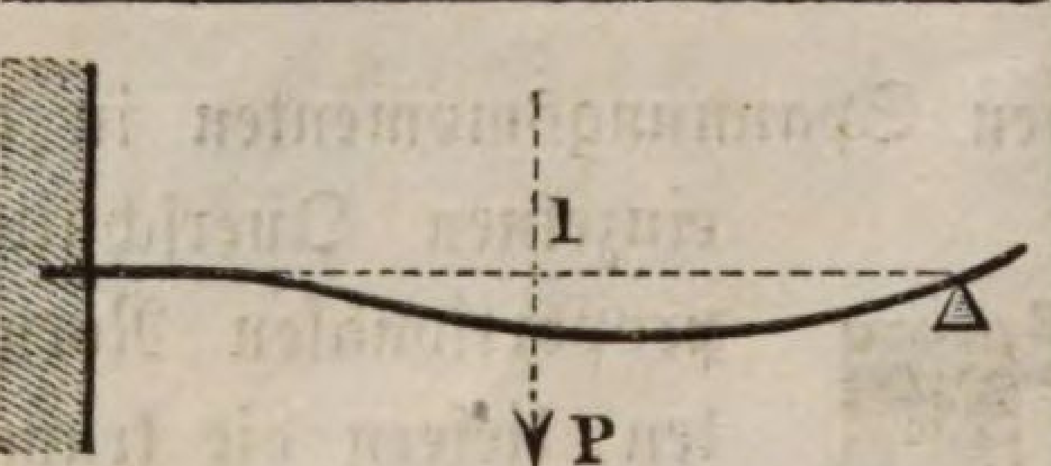
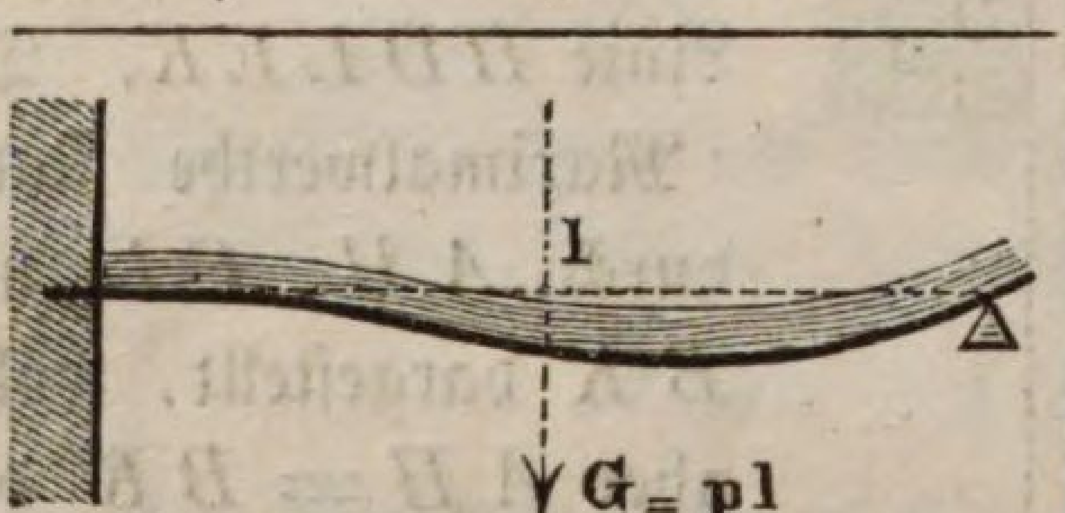
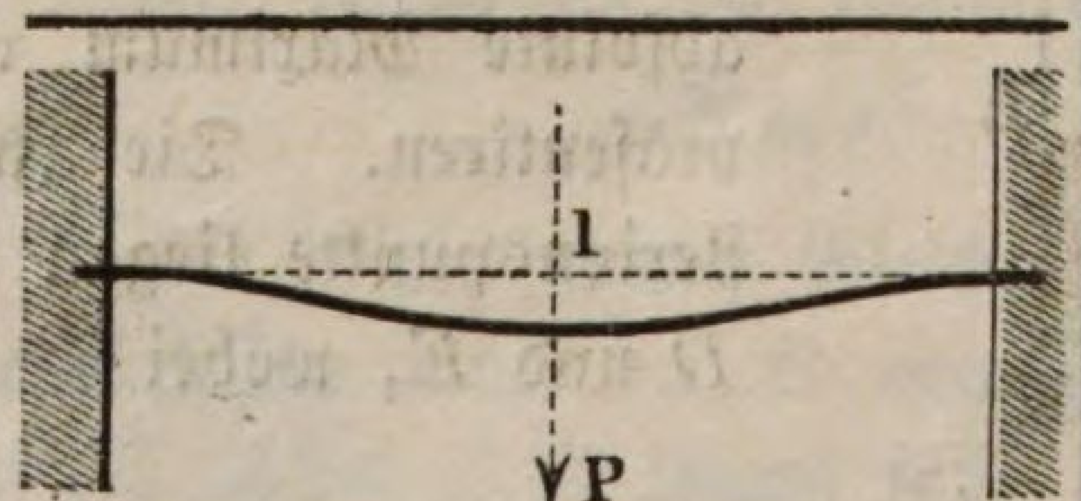
Die in Fig. 331 zu $A\,B$ errichteten, den Spannungsmomenten in den einzelnen Querschnitten proportionalen Normalen, liefern die krumme Linie $HDLEK$. Die Maximalwerthe sind durch $A\,H$, $C\,L$ und $B\,K$ dargestellt, wobei aber $A\,H = B\,K$ das absolute Maximum repräsentiren. Die Inflexionspunkte liegen in D und E, wobei

Fig. 331.



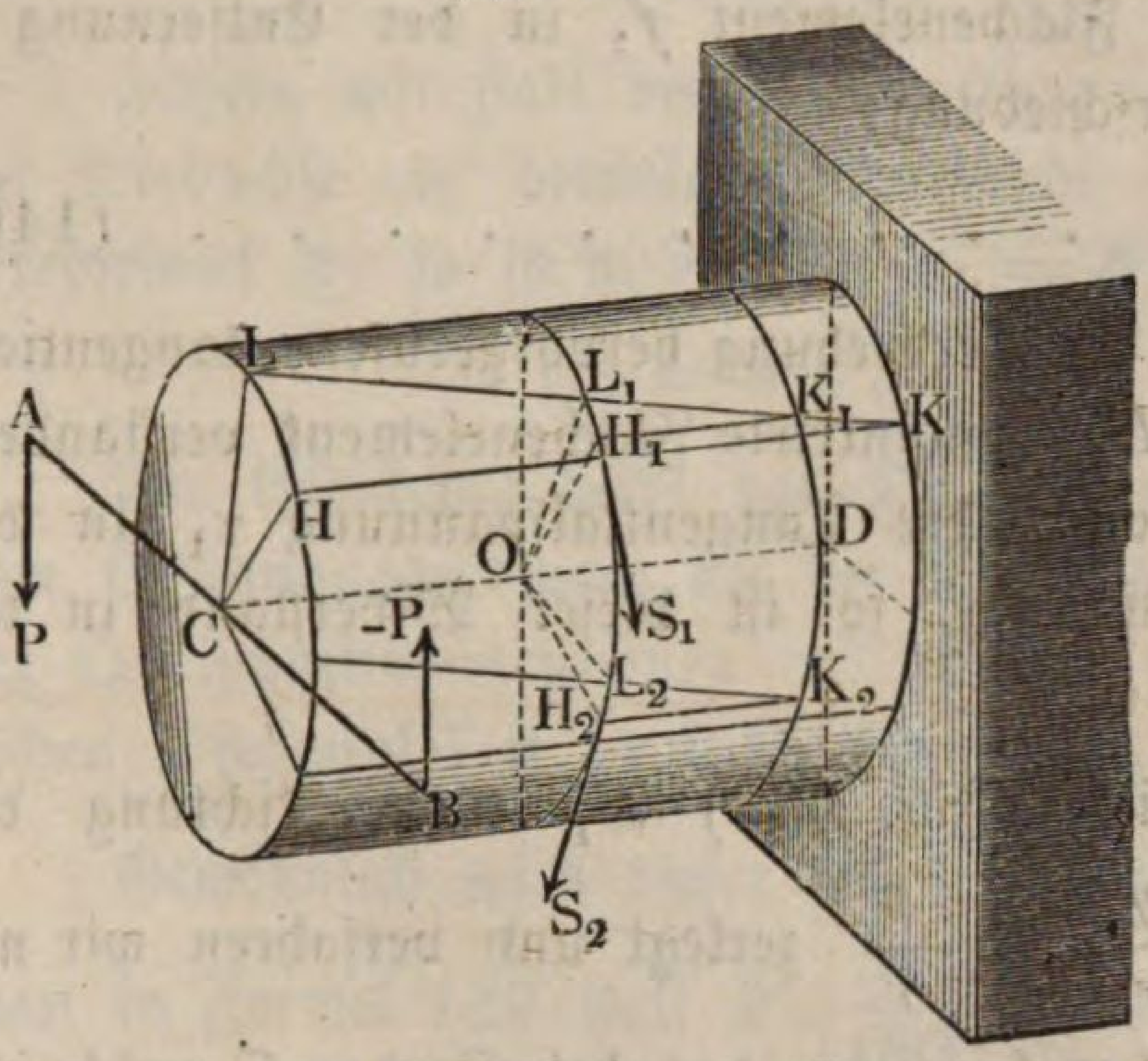
$$A\,D = \frac{l}{6}\,(3 - \sqrt{3}) \text{ und } A\,E = \frac{l}{6}\,(3 + \sqrt{3}) \text{ ist.}$$

In der folgenden Tabelle sind die Werthe der Widerstandsmomente $(Q\,q)$, der Tragkräfte und der größten Durchbiegungen s für die unter 1^a, 1^b, 2^c, 2^d, 3^b, 3^c, 4^b und 4^c behandelten Fälle zur Vergleichung zusammengestellt:

	$(Q\,q)$	$E\,J\,s$	Tragkraft $= m\,\frac{1}{l}\,k\,\frac{J}{e}$. Werth von m
	$P\,l$	$\frac{1}{3}\,P\,l^3$	1
	$\frac{1}{2}\,G\,l$	$\frac{1}{8}\,G\,l^3$	2
	$\frac{1}{4}\,P\,l$	$1 \cdot \frac{1}{48}\,P\,l^3$	4
	$\frac{1}{8}\,G\,l$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{48}\,G\,l^3$	8
	$\frac{3}{16}\,P\,l$	$0{,}447 \cdot \frac{1}{48}\,P\,l^3$	$\frac{16}{3}$
	$\frac{1}{8}\,G\,l$	$0{,}26 \cdot \frac{1}{48}\,G\,l^3$	8
	$\frac{1}{8}\,P\,l$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{48}\,P\,l^3$	8
	$\frac{1}{12}\,G\,l$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{48}\,G\,l^3$	12

Drehungs-Elasticität und Festigkeit. Ein prismatischer Körper von der 71
Länge l (Fig. 332) werde durch Kräfte, welche in Ebenen normal zur geometrischen Achse CD des Körpers liegen und deren Richtungslinie, die Achse, nicht schneiden, angegriffen. Denkt man jede Kraft in ihrer Ebene parallel mit sich, an den Durchschnittspunkt der Achse mit dieser Ebene verschoben, so entstehen Kräftepaare, welche in den Querschnittsebenen des Körpers liegen und außerdem Kräfte, welche die Achse normal schneiden, den Körper also auf Biegungselasticität und Festigkeit in Anspruch nehmen. Von diesen letzteren, sowie von dem Gewichte des Körpers sehen wir hier ganz ab, berücksichtigen also nur die in den Querschnitten gelegenen Kräftepaare. Dieselben haben das Bestreben, die im ursprünglichen Zustande des Körpers mit der Achse CD parallel laufenden Fasern um die Achse zu drehen, der Faser KH also z. B. die Lage KL zu geben. Da die Kräftepaare in fest mit einander verbundenen parallelen Ebenen liegen, so läßt sich deren Gesammtwirkung durch die algebraische Summe ihrer Momente ersetzen, wobei für jeden einzelnen zu untersuchenden Querschnitt die von hier bis an das Ende des Körpers vorkommenden Kräftepaare in Rechnung zu bringen sind. Das resultirende Moment der äußeren Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Querschnitt des Körpers, soll in der Folge mit Vv bezeichnet werden. Ist, wie in der Figur angegeben, nur ein einziges Kräftepaar in dem äußersten Querschnitte des Körpers vorhanden, so ist für sämmtliche Querschnitte desselben das resultirende Moment Vv constant und gleich $P . AC$, wofür wir PR schreiben wollen. Die Verdrehungen der einzelnen Fasern werden so gering angenommen, daß die inneren Kräfte dieselben vollkommen aufzuheben im Stande sind, sobald die äußere Einwirkung auf Verdrehung aufhört. Hierbei nehmen wir an, daß die vor der Verdrehung ebenen Querschnitte des Körpers auch während derselben eben bleiben, daß die Längenfasern eine um so größere Verdrehung erfahren, je weiter sie von der Achse des Körpers entfernt sind, und daß zwischen der Verschiebung γ in irgend einem Punkte eines beliebigen Querschnitts und der zugehörigen Tangentialspannung τ das in Formel 133 angegebene constante Verhältniß stattfindet, daß also jederzeit $\frac{\tau}{\gamma} = C$ ist.

Fig. 332.



Bedeuten $H_1 H_2$ und $K_1 K_2$ zwei aufeinander folgende Querschnitte in dem Körper, so ist die Verschiebung γ des Punktes $H_1 = \frac{H_1 L_1}{H_1 K_1}$. Es ist aber

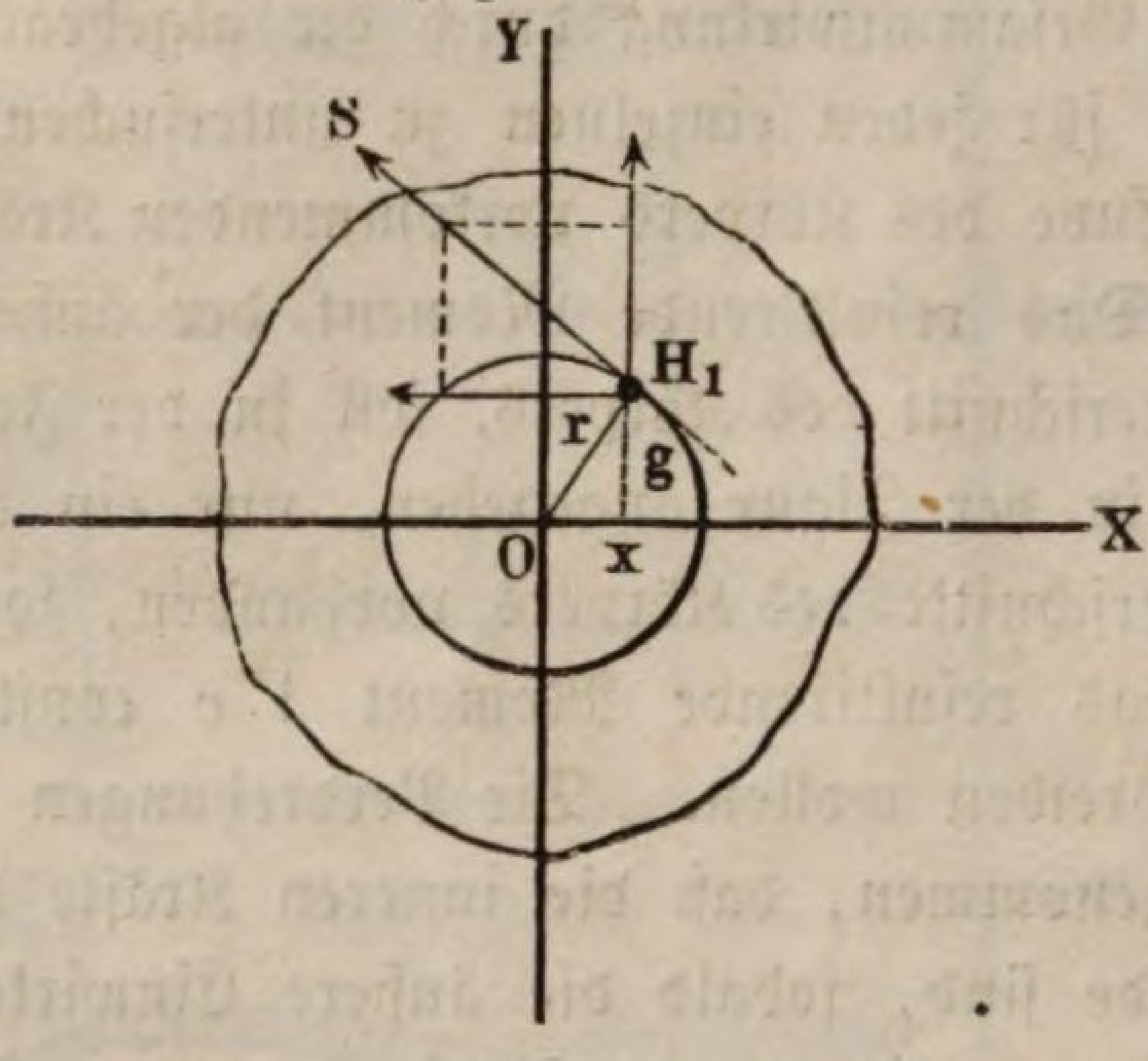
$\frac{H_1 L_1}{H_1 K_1} = \frac{H L}{H K}$, d. h. die Verschiebungen sind für die verschiedenen Punkte derselben Faser constant, so daß hier unter γ die specifische Verschiebung, d. i. die für die Längeneinheit, in der Entfernung $O H_1$ von der Drehachse, verstanden werden kann. Die specifische Verschiebung in der Entfernung 1 von der Drehachse wird der specifische Drehwinkel genannt und mit ϑ bezeichnet. Es ist hiernach für ein Flächenelement f, in der Entfernung r von der Drehachse, die specifische Verschiebung:

$$\gamma = r\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (146)$$

Der in dem Punkte H_1 durch die Verdrehung hervorgerufene tangentiale Widerstand S_1 ist, unter f das in H_1 concentrirte Flächenelement verstanden, gleich $f\tau$, oder wenn wir auch hierbei die Tangentialspannung τ_1 in der Entfernung 1 von der Drehachse einführen, so ist dieser Widerstand in der Entfernung r von derselben: $S_1 = \tau_1 f r$.

Denken wir in dem Querschnitte (Fig. 333) S_1 nach Richtung der Achsen in die Componenten $-S_1 \frac{y}{r}$, $S_1 \frac{x}{r}$ zerlegt und verfahren wir mit den Widerständen in sämmtlichen Flächenelementen des betreffenden Querschnitts in gleicher Weise, so erhalten wir die drei Gleichgewichtsbedingungen:

Fig. 333.



1) $\left(\Sigma - S_1 \frac{y}{r}\right) = 0$,

2) $\Sigma S_1 \frac{x}{r} = 0$,

3) $\Sigma S_1 r - V v = 0$.

Aus den beiden ersten Gleichungen erfahren wir die schon bekannte Thatsache, daß O der Schwerpunkt des betreffenden Querschnitts ist und daß die geometrische Achse keine Verdrehung erfährt. Die dritte Gleichung formen wir mit Benutzung des angegebenen Werthes für S_1, folgendermaßen um und erhalten:

$$V v = \Sigma \tau_1 . f r^2 = \tau_1 \Sigma f r^2.$$

Den Factor $\Sigma f r^2$, der nur von der Form des Querschnitts abhängig ist, nennt man das polare Trägheitsmoment desselben und bezeichnet ihn mit J_p. Aus der letzten Figur ergiebt sich $r^2 = x^2 + y^2$, also $f r^2 = f x^2 + f y^2$, und deshalb $\Sigma f r^2 = \Sigma f x^2 + \Sigma f y^2$. Die Ausdrücke $\Sigma f x^2$ und $\Sigma f y^2$ stellen die bei der Biegung eines prismatischen Körpers maßgebenden Trägheitsmomente J, bezogen auf zwei durch den Schwerpunkt O des Querschnitts gezogene, auf einander normal stehende Linien vor und können deshalb mit

J_y und J_x bezeichnet werden, so daß wir ganz allgemein erhalten:

$$J_p = J_x + J_y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (147)$$

wonach zur Berechnung des polaren Trägheitsmomentes J_p, die in §. 69 verzeichneten Tabellenwerthe benutzt werden können. Die einzige Gleichgewichtsbedingung bei der Drehungselasticität und Festigkeit ist nach dem Obigen:

$$Vv = \tau_1 \cdot J_p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (148)$$

Führen wir statt der Tangentialspannung τ_1, in der Entfernung 1 von der Drehachse die betreffende specifische Verschiebung ein, d. i. der specifische Drehwinkel ϑ, so ist n. F. 133 $\tau_1 = \vartheta\, C$ zu setzen und wir erhalten deshalb:

$$Vv = \vartheta\, C J_p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (149)$$

Die Gleichung heißt das **Torsions-Biegungsmoment**, entsprechend dem Spannungsmoment bei der Biegungsfestigkeit, und kann zur Berechnung der Querschnittsdimensionen des Körpers benutzt werden, sobald für den specifischen Drehwinkel ϑ praktisch brauchbare Annahmen gemacht werden.

Gewöhnlich wird dieser Winkel in Graden angegeben, in welchem Falle man in Formel 149 statt ϑ, $\frac{\pi}{180}\,\vartheta^0$ einzuführen hat. Bezeichnet man endlich noch den Verdrehungswinkel im Bogenmaß, in Bezug auf die ganze Länge l des Körpers mit α, so ist $\alpha = \vartheta\, l$, und es ist deshalb das Torsions-Biegungsmoment darstellbar durch:

$$Vv = \vartheta^0 \frac{\pi}{180}\, C J_p \quad \ldots \ldots \ldots \quad (149\,a)$$

$$Vv = \frac{\alpha}{l}\, C J_p = \alpha^0 \frac{\pi}{180} \frac{1}{l}\, C J_p \quad \ldots \quad (149\,b)$$

Führen wir andererseits in Formel 148 statt τ_1 die größte Tangentialspannung (τ) ein, welche in den äußersten Fasern auftritt, und bezeichnen die Entfernung derselben von der Drehachse mit e, so ist:

$$Vv = (\tau)\, \frac{J_p}{e}\,.$$

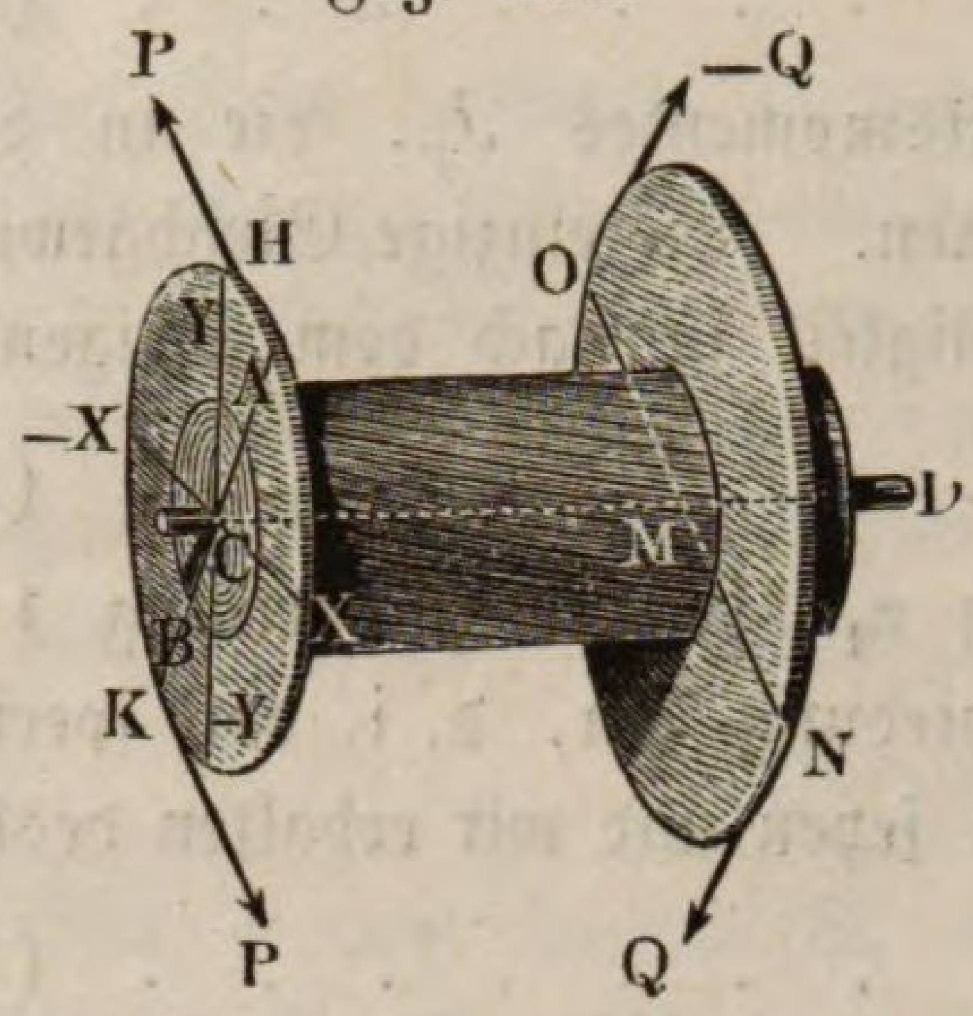
Diese größte Tangentialspannung (τ) darf bei praktischen Ausführungen niemals größer als der in §. 66 angegebene Sicherheitsmodul t ausfallen, so daß wir t für (τ) substituiren müssen, wenn wir das **Torsions-Widerstandsmoment** für den oder die betreffenden Querschnitte erhalten wollen. Dasselbe ist hiernach, den entsprechenden, für die Praxis in Anwendung zu bringenden, Maximalwerth von Vv mit (Vv) bezeichnend:

$$(Vv) = t\, \frac{J_p}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (150)$$

Die betreffenden, von dem Material abhängigen Constanten C und t, welche in den Formeln 149 und 150 auftreten, sind in §. 65 und 66 in ihrer Abhängigkeit von E und k und T angegeben.

Die Torsions-Elasticität und Festigkeit kommt hauptsächlich bei den Wellen im Maschinenbau zur Anwendung, und zwar treten hier gewöhnlich (Fig. 334) zwei sich das Gleichgewicht haltende, nach entgegengesetzter Richtung wirksame Kräftepaare $P\,p$ und $Q\,q$ auf. Es ist gleichgiltig, welches der beiden Paare man als Drehungsmoment $V\,v$ benutzt, unter l ist dagegen die Entfernung CM der leitenden Paarebenen zu verstehen.

Fig. 334.

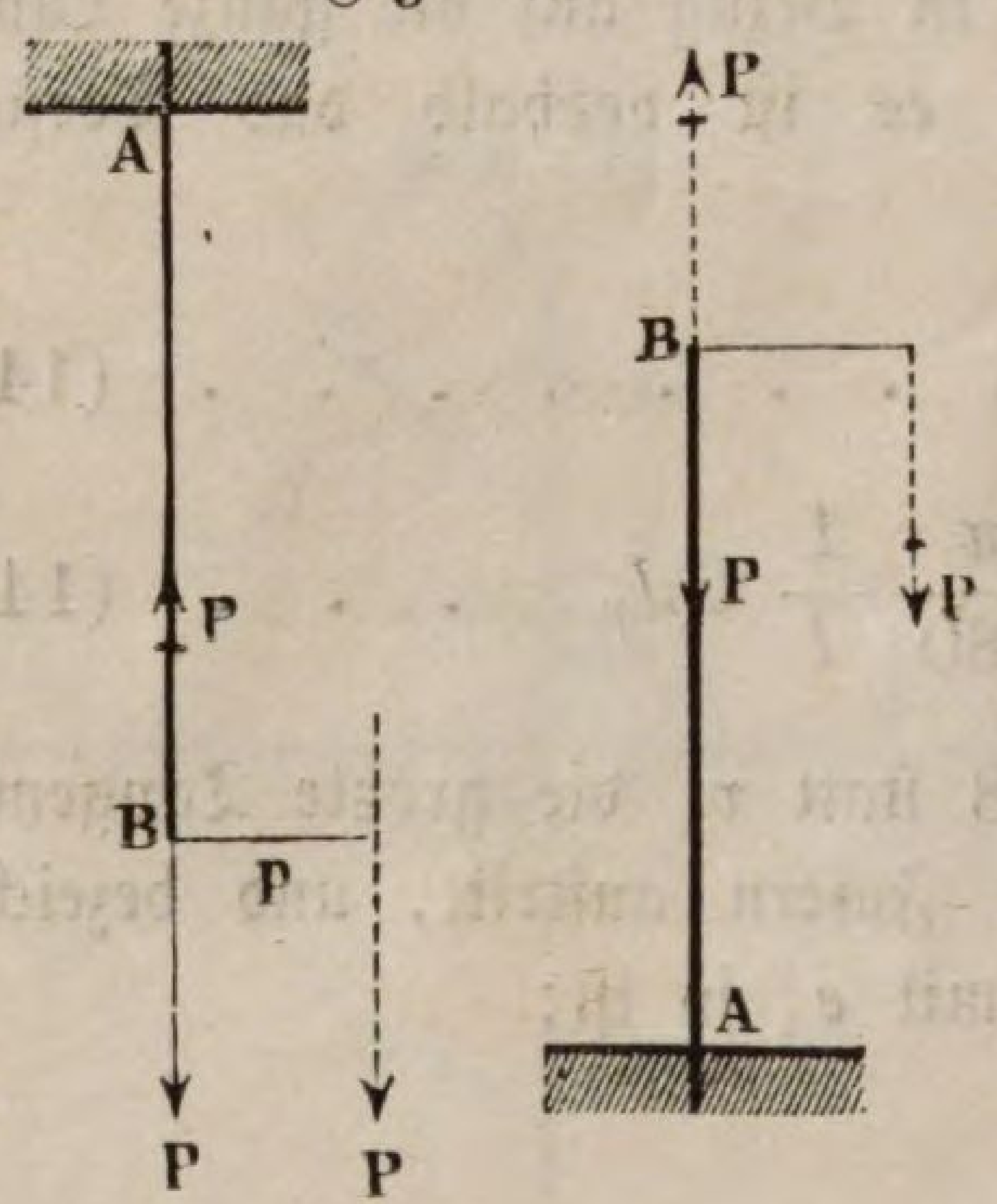


72 **Zusammengesetzte Biegungs-Elasticität und Festigkeit.**

I. Excentrische Zug- oder Druckbelastung.

1) Ein prismatischer Körper sei an einem Ende A (Fig. 335) in verticaler Lage befestigt und durch eine Kraft P, welche parallel der Achse in der Entfernung p von derselben wirksam ist, belastet. Man verlege die Kraft P parallel ihrer Richtung in die Achse des Körpers, so ist derselbe durch die Kraft P auf absolute oder rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen, während das Kräftepaar $P\,p$ den Körper auf Biegungselasticität und Festigkeit beansprucht. Die durch die Kraft P hervorgerufenen Spannungen oder Pressungen werden, wie in §. 67, als gleichförmig vertheilt im Querschnitt angenommen, sind also gleich $\frac{P}{F}$ zu setzen, unter F den Flächeninhalt des Querschnitts verstanden.

Fig. 335



Das Kräftepaar $P\,p$ behält für sämmtliche Querschnitte seinen Werth, erzeugt also in den einzelnen Querschnitten gleich große Spannungen und Pressungen, die dem Abstande von der elastischen Faserschicht proportional sind, sodaß die in §. 69 gefundenen Resultate hierauf unmittelbare Anwendung finden werden, wenn wie dort, die zulässigen Biegungen als klein vorausgesetzt werden. Bezeichnen wir die aus der Kraft P und dem Kräftepaare $P\,p$ hervorgehende Zugspannung mit σ' und die entsprechende Druckspannung mit σ'', so ist:

a) wenn P auf Zug wirkt:

für die convexe Seite des Körpers $\sigma' = \frac{P\,p\,e'}{J} + \frac{P}{F}$,

für die concave Seite des Körpers $\sigma'' = \frac{P\,p\,e''}{J} - \frac{P}{F}$,

b) wenn P auf Druck wirksam ist:

für die convexe Seite des Körpers $\sigma' = \frac{P p e'}{J} - \frac{P}{F}$,

für die concave Seite des Körpers $\sigma'' = \frac{P p e''}{J} + \frac{P}{F}$.

In jedem einzelnen Falle sind die Belastungen so zu wählen, daß die größten Werthe von σ' und σ'' höchstens gleich k' und k'' werden, wobei es sich ereignen kann, daß diese Maximalwerthe in zwei verschiedenen Querschnitten auftreten. Die Gleichungen, aus denen die Abmessungen des Körpers bei gegebener Belastung zu berechnen, sind daher:

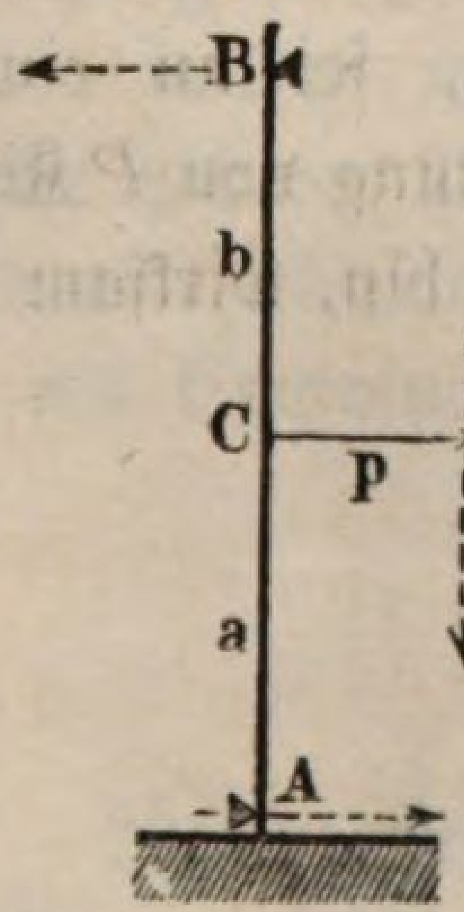
$$k' = P\left(\frac{p e'}{J} \pm \frac{1}{F}\right)$$

$$k'' = P\left(\frac{p e''}{J} \mp \frac{1}{F}\right),$$

worin die oberen Zeichen für P als Zugkraft gelten, die unteren dagegen für P als Druckkraft in Rechnung zu bringen sind.

2) Ein prismatischer Körper (Fig. 336) von der Länge l sei in verticaler Stellung von unten und an den Endpunkten A und B von der Seite gestützt. In dem Punkte C sei ein Seitenarm $CD = p$ angeordnet, an dessen Ende die Kraft P angebracht ist, welche parallel der Achse vertical abwärts, also auf Druck wirkt. Die Drucke auf die seitlichen Unterstützungspunkte seien A und B, beide müssen nach entgegengesetzter Richtung wirken, ihre Summe muß gleich Null sein:

Fig. 336.



$$A + B = 0.$$

Nehmen wir A negativ an, so ist, wenn wir Pp verschieben, so daß die Kraft normal zur Körperachse wirkt, und dem Paare die Breite l geben:

$$B = -A = P\frac{p}{l}.$$

Wird wieder, wie früher, AC mit a, BC mit b bezeichnet, so ist das Spannungsmoment Qq für jeden Querschnitt von AC in der Entfernung x, von A:

$$-P\frac{p}{l}x = \frac{EJ}{\varrho}$$

und das Spannungsmoment, für jeden Querschnitt von BC, in der Entfernung z von B:

$$P\frac{p}{l}z = \frac{EJ}{\varrho}.$$

Die verschiedenen Zeichen der Spannungsmomente zeigen, daß die elastische Linie bei C plötzlich ihre Krümmung ändert, daß also oberhalb oder unterhalb

von C der gefährliche Querschnitt liegen wird. Die beiden relativ größten Werthe der Spannungsmomente sind unmittelbar unter C gleich $-Pp\frac{a}{l}$ und unmittelbar über C gleich $Pp\frac{b}{l}$, sodaß das absolute Maximum von dem Verhältniß zwischen a und b abhängig. Für $a > b$ liegt der gefährliche Querschnitt unterhalb C, daher das Widerstandsmoment $(Q\,q)$ gleich:

$$Pp\frac{a}{l}.$$

In diesem Querschnitt findet also die größte Zug- und Druckspannung statt, welche letztere noch durch die in Richtung der Achse wirksame Druckkraft P vermehrt wird. Es ist daher für diesen gefährlichen Querschnitt:

$$\sigma' = Pp\frac{a}{l}\frac{e'}{J} - \frac{P}{F},$$

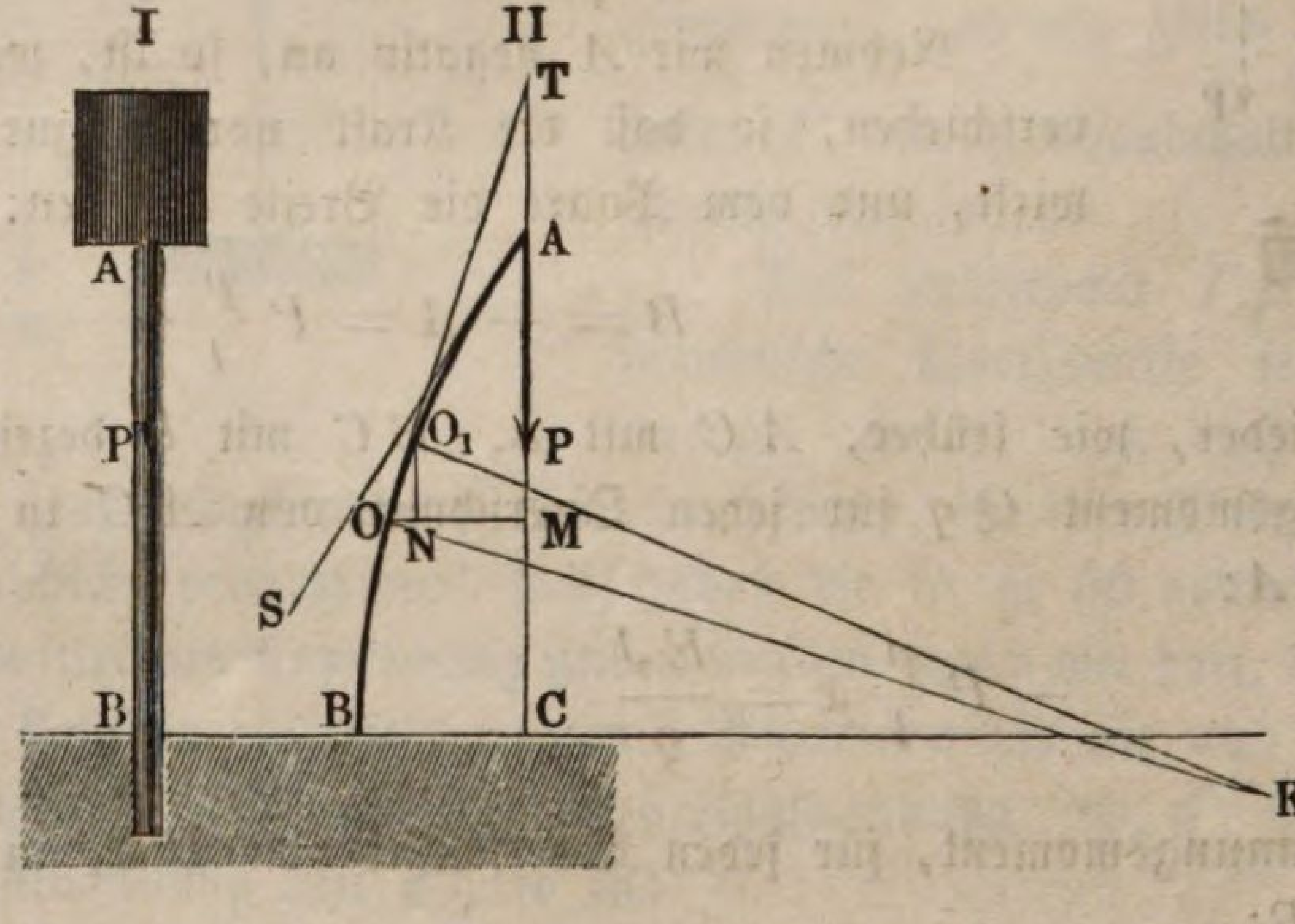
$$\sigma'' = Pp\frac{a}{l}\frac{e''}{J} + \frac{P}{F}.$$

Diese Gesammtspannungen und Pressungen dürfen wieder höchstens die praktisch zulässigen Werthe k' und k'' erreichen.

II. Zerknickungsfestigkeit.

1) Ein prismatischer Körper AB (Fig. 337), dessen Länge l die Querschnittsdimensionen um ein Bedeutendes an Größe überragt, sei an einem Ende B befestigt und erfahre an dem andern Ende A eine Belastung von P Kilogramm, welche in Richtung der Achse, nach dem befestigten Ende hin, wirksam ist.

Fig. 337.



Unter der Voraussetzung, daß die Mittellinie des Körpers auch bei der Belastung ihre gerade Richtung behauptet, wird die Kraft P in den einzelnen Punkten des Körpers gleiche Zusammendrückungen hervorrufen, die sich für jeden Querschnitt zu der Gesammtpressung $\frac{P}{F}$ zusammensetzen, unter F die

Größe des Querschnitts verstanden. Findet dagegen durch irgend einen Umstand, eine Biegung der Körperachse statt, sei es durch einen seitlichen Druck, sei es in Folge der ungleichen Beschaffenheit des Körpers, so wird die Kraft P diese Biegung zu vergrößern suchen, und es wird bei fortgesetzter Belastung die Zerstörung des Körpers durch Zerknicken erfolgen. In dem Folgenden setzen wir eine derartige sehr geringe Biegung der Körperachse voraus, sehen bei der weiteren Untersuchung von dem Gewichte des Körpers ab und bestimmen die geringste Last P, welche das Zerknicken des Körpers zur Folge haben kann. Für einen beliebigen Querschnitt O ist das Spannungsmoment $Q\,q$ in derselben Weise, wie bei der relativen Festigkeit:

$$Q\,q = \frac{E\,J}{\varrho},$$

worin wir statt $Q\,q$ das Moment $P\,.\,M\,O$ einzuführen haben. Dieses Moment ändert sich für denselben Querschnitt mit der Größe der Durchbiegung $M\,O$, während das entsprechende Moment für den auf relative Festigkeit in Anspruch genommenen Körper, bei den in der Praxis zulässigen Biegungen, für denselben Querschnitt einen constanten Werth behält. Die größte Biegung findet jedenfalls an der eingeklemmten Stelle B statt, es ist demnach der Querschnitt in B der gefährliche, sein Krümmungsradius der kleinste und das für diesen Querschnitt aufgestellte Spannungsmoment müßte als Bestimmungsgleichung für die Zerknickungskraft P benutzt werden. Zur Berechnung derselben benutzt man jedoch die Gleichung der elastischen Linie, die sich nur mit Hülfe höherer Mathematik finden läßt. Bezeichnen wir $M\,O$ mit y, $M\,A$ mit x und den Maximalwerth von y, d. i. $B\,C$ mit s, so ist diese Gleichung für A als Coordinaten-Anfangspunkt:

$$\frac{y}{s} = 1 - cos\left(x\sqrt{\frac{P}{E\,J}}\right).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn wir $x = l$ und damit y zugleich $= s$ setzen, für den gefährlichen Querschnitt in B:

$$1 = 1 - cos\left(l\sqrt{\frac{P}{E\,J}}\right), \text{ d. h.}$$

$$cos\left(l\sqrt{\frac{P}{E\,J}}\right) = 0 \text{ oder}$$

$$P = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{E\,J}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Es bedeutet hierin J das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts, für irgend eine neutrale Achse, da angenommen werden muß, daß die Biegung nach der Richtung erfolgt, für welche der Widerstand dagegen am kleinsten ist. In dem rechteckigen Querschnitt, für welchen $J = \frac{1}{12}\,b\,h^3$, ist demnach hier unter h die kleinere der beiden Rechtecksseiten zu verstehen.

In dem erhaltenen Werthe für die Zerknickungskraft P ist die größte Durchbiegung s nicht enthalten, so daß also bei jeder beliebigen Durchbiegung die Belastung P das Zerknicken des Körpers veranlassen müßte. Außerdem bleibt es auch unerklärlich, wie sich der Körper verhalten wird, wenn man auf ihn eine kleinere oder größere Kraft als P, einwirken läßt. Es ist dies als ein Mangel unserer Kenntniß über die hier obwaltenden Vorgänge anzusehen und wir sind deshalb bei diesem Falle der praktischen Festigkeitslehre fast allein auf die aus der Erfahrung entlehnten Ergebnisse angewiesen.

2) Denken wir in dem vorigen Falle die beiden Enden A und A_1 des Körpers abgerundet und die Einklemmung durch eine einfache Unterstützung ersetzt (Fig. 338), so wird die elastische Linie eine symmetrische Krümmung erhalten und jede Hälfte des Körpers wird in Bezug auf die Biegung mit dem vorigen Fall übereinstimmen. Dasselbe wird eintreten, wenn beide Enden in Zapfen drehbar sind, wie es bei den Schubstangen der Fall ist. Die Enden der elastischen Linie werden in der Richtungslinie von P liegen, dagegen eine beliebige Neigung gegen dieselbe haben können. Bezeichnen wir wieder die Länge des Körpers mit l, so erhalten wir die Zerknickungskraft P, wenn wir in §. 151 l durch $\frac{l}{2}$ ersetzen, daher:

$$P = \pi^2 \frac{E J}{l^2}.$$

Fig. 338.

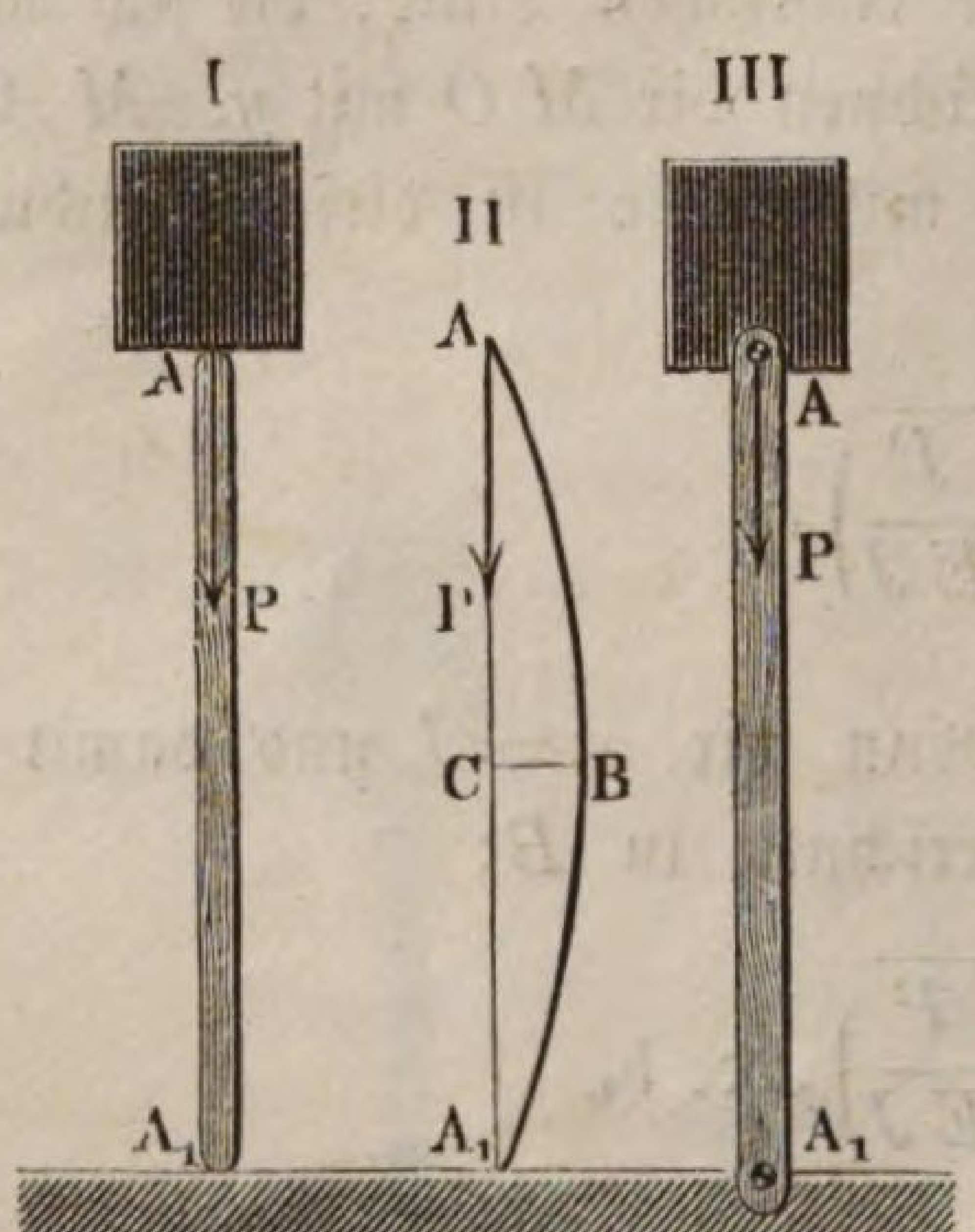
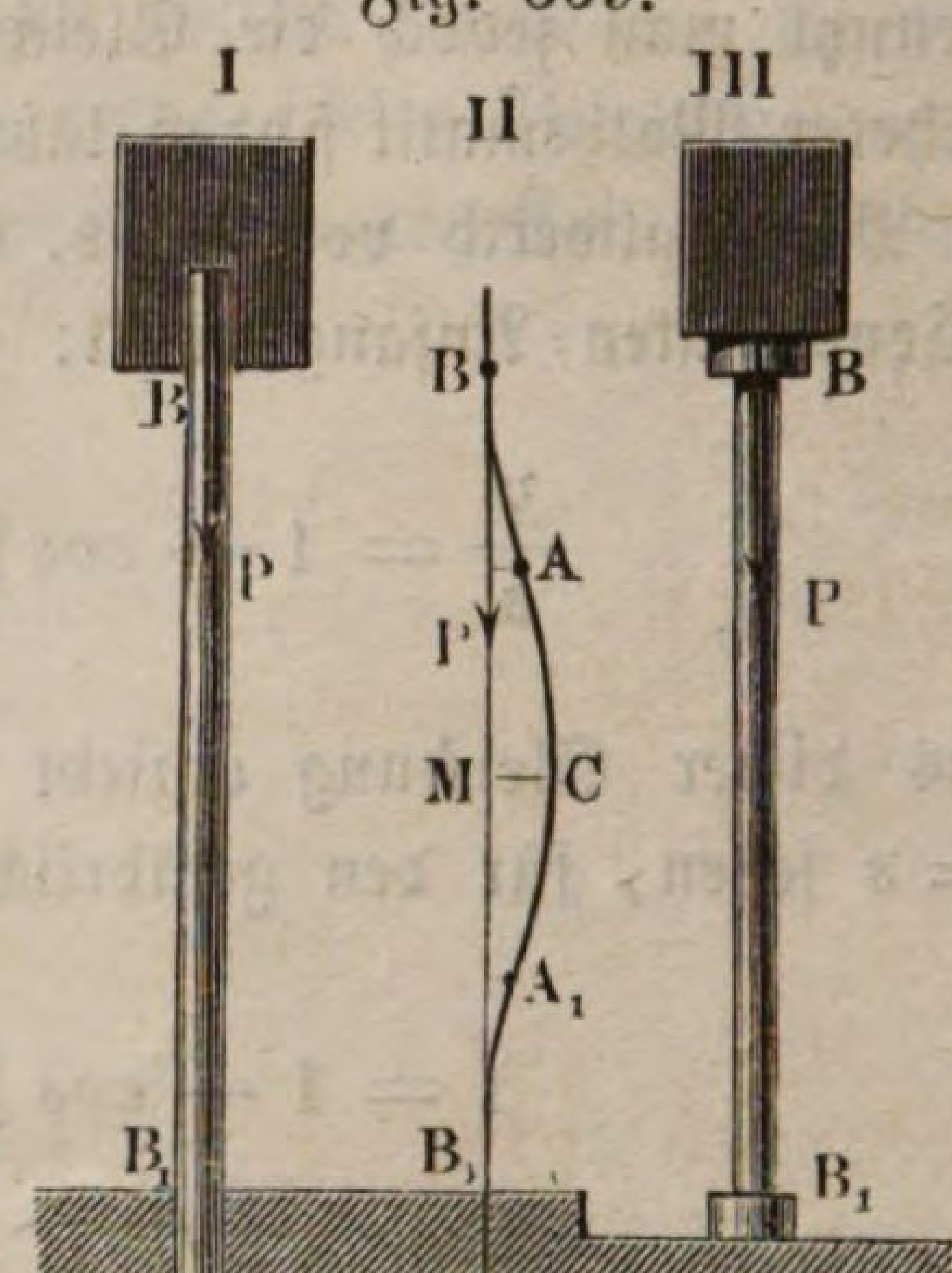


Fig. 339.



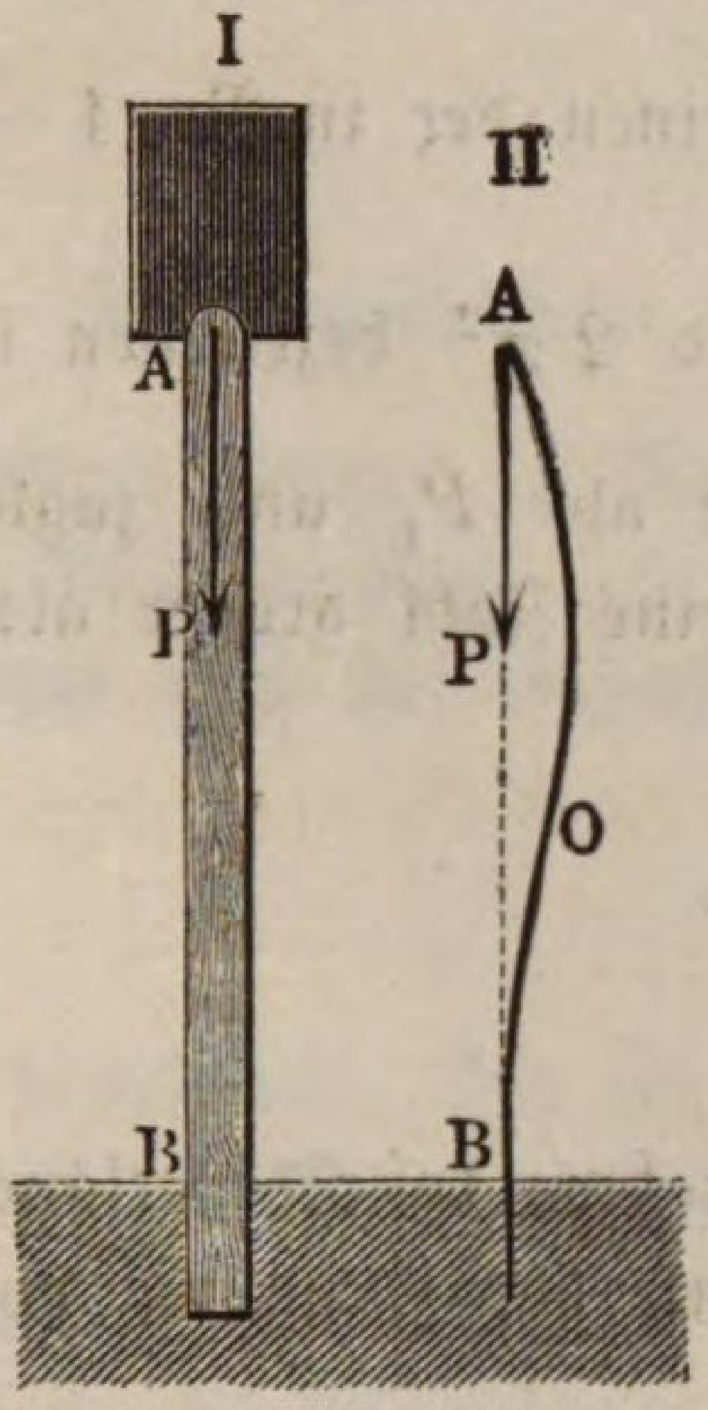
3) Ist der Körper von der Länge l mit beiden Enden B und B_1 (Fig. 339) eingeklemmt, oder sind beide Enden flach abgeschnitten und stützen sie sich gegen Ebenen, so bleiben die Enden der elastischen Linie wieder in Richtung von P, berühren aber zugleich die Richtungslinien der Kraft an diesen Stellen. Die elastische Linie zeigt hiernach zwei Wendepunkte A und A_1, welche um $\frac{l}{4}$ von den Einklemmungspunkten entfernt sind. Wir erhalten

demnach die entsprechende Zerknickungskraft P, wenn wir in F. 151 l durch $\frac{l}{4}$ ersetzen. Es ist hier also:

$$P = (2\pi)^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

4) Findet endlich der Fall statt, daß das eine Stabende A sich wie unter Nr. 2, das andere Ende B aber wie unter Nr. 3 verhält (Fig. 340), daß also beide Enden zwar in der Richtungslinie von P bleiben, die elastische Linie aber bloß bei B von der Richtungslinie berührt wird, dagegen bei A eine beliebige Neigung hat, wie sich der Fall bei den Kolbenstangen findet, so ist für l in Formel 147 $\frac{l}{2\sqrt{2}}$ einzuführen, und es ist demnach die Kraft P zum Zerknicken:

Fig. 340.



$$P = 2\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

5) Die aufgestellten Formeln für die Zerknickungskraft P sind zur Berechnung der Querschnittsdimensionen in Anwendung zu bringen, so lange dieselbe **kleiner** als die einfache Zerdrückungskraft $P_1 = K'' F$ ausfällt, wobei man, zur Sicherstellung gegen das Zerknicken in der Praxis, statt der Belastung P, die $n$fache Belastung einzuführen hat, unter n eine auf Erfahrung beruhende Zahl verstanden. Für den Fall, daß P und P_1 gleich groß ausfallen, befindet sich der Körper auf der Grenze der beiden in Betracht zu ziehenden Festigkeiten, und die sich daraus ergebende Gleichung kann zur Berechnung des Verhältnisses zwischen der Länge l und einer Querschnittsdimension des Körpers für diesen Grenzfall benutzt werden. Es ist z. B. für den unter Nr. 4 behandelten Fall:

$$K'' F = 2\pi^2 \frac{EJ}{l^2}.$$

Setzen wir hierbei einen kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d voraus, so ist $F = \frac{\pi}{4} d^2$ und $J = \frac{\pi}{64} d^4$, daher:

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{2K''}}.$$

Für Schmiedeeisen ist $E = 2000000$ und $K'' = 3500$ Kilogramm, also:

$$\frac{l}{d} = 26{,}55,$$

d. h. ist die Länge l einer Kolbenstange das 26- bis 27fache des Durchmessers d, so darf man dieselbe noch auf einfache Druckfestigkeit berechnen.

6) Da es erfahrungsmäßig eine bestimmte Länge l des Körpers giebt, von welcher ab die Bruchbelastung desselben plötzlich von der Länge l abhängig wird, während sie bis dahin unabhängig von l gewesen, so ist das in der vorigen Nummer angegebene Verfahren, die Grenze der beiden möglichen Berechnungsweisen zu bestimmen, nicht als absolut richtig anzusehen, vielmehr muß man eine allgemeine empirische Formel für die Bruchbelastung aufstellen, die sich für alle Verhältnisse zwischen der Länge l des Körpers und einer seiner Querschnittsdimensionen als brauchbar erweist. Bezeichnen wir die Bruchbelastung für einfache Druckfestigkeit mit $P_1 = K'' F$, und nennen die für die Zerknickungsfestigkeit $P_2 = m\frac{EJ}{l^2}$, worin m einen der in Nr. 1 — 4 angegebenen Zahlencoefficienten $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, π^2, $(2\pi)^2$ und $2\pi^2$ bezeichnen soll, so muß die wirkliche Bruchbelastung P jederzeit kleiner als P_1 und zugleich kleiner als P_2 sein. Wir können demnach, unter v eine Zahl größer als 1 verstanden, für P setzen:

$$P = \frac{P_1}{1+v}.$$

Dabei muß v so gewählt werden, daß es mit Zunahme der Körperlänge l selbst größer und größer wird, weshalb wir, da P_2 mit der Zunahme von l abnimmt, $v = \frac{w}{P_2}$ setzen dürfen. Es ist demnach die empirische Function für die Bruchbelastung P:

$$\text{a)}\quad P = \frac{P_1}{1+\frac{w}{P_2}},$$

welcher Ausdruck für die Abnahme von l größer und größer wird und für die Annahme, daß l sehr klein, $P = P_1$, d. h. die Belastung der einfachen Druckfestigkeit liefert. Mit der Zunahme von l wird dagegen $\frac{w}{P_2}$ größer und größer, die Bruchbelastung P nimmt daher ab und erreicht bei sehr großem Werthe von l, wo P_2 zu Null wird, selbst den Werth o.

Zur weiteren Umformung der Gleichung a), speciell zur Bestimmung des Werthes w, setzen wir fest, daß die Bruchbelastung P bei einer solchen Länge des Stabes, für welche sich nach Nr. 5 $P_1 = P_2$ ergiebt, nur $\frac{1}{a}$ der Belastung P_1 für einfache Druckfestigkeit betragen soll. Es ist hiernach:

$$\frac{1}{a} P_1 = \frac{P_1}{1+\frac{w}{P_1}} \text{ und } w = (a-1)\, P_1.$$

Bei Benutzung dieses Werthes von w geht die Gleichung a über in:

$$\text{b)}\quad P = \frac{P_1\, P_2}{P_2 + (a-1)\, P_1},$$

welcher Ausdruck aber auch jederzeit kleiner als P_2 sein muß. Es ist daher zur Bestimmung von a:

$$\frac{P_1\, P_2}{P_2 + (a-1)\, P_1} < P_2 \quad \text{oder}$$

$$a > 2 - \frac{P_2}{P_1}.$$

Wenn wir aber a größer als $2 - \frac{P_2}{P_1}$ nehmen müssen, so ist a wenigstens gleich dem Maximalwerthe 2, dieses Ausdrucks zu setzen und es ist die Bruchbelastung P für einen auf Zerknicken in Anspruch genommenen Körper nach der empirischen Formel:

$$\text{c)}\quad P = \frac{P_1\, P_2}{P_1 + P_2}$$

zu berechnen. Hat ein derartig in Anspruch genommener Körper die Belastung P in Wirklichkeit auszuhalten, so ist statt P in der obigen Gleichung $n\,P$ einzuführen, wobei für n ein auf Erfahrung beruhender Zahlenwerth, größer als **1**, zu substituiren ist. Es ist demnach die zur Berechnung der Querschnittsdimensionen zu benutzende Formel:

$$n\,P = \frac{K''\, F . m \frac{E\,J}{l^2}}{K''\; F + m\, \frac{E\,J}{l^2}}.$$

Uebungen.

1. Welche Belastung bringt bei einem quadratischen Stahlstabe von 2,6 ^{cm} Seite und 3,14^{m} Länge eine Dehnung von 0,002^{m} hervor?

$$P = EF\frac{\lambda}{l} = 2250000 \,.\, 2{,}6^2 \frac{0{,}002}{3{,}14} = 9688 \text{ Kilogr.}$$

2. Welche Ausdehnung erleidet ein Eisendraht von 2 □ ^{cm} Querschnitt und einer Länge von 6,3^{m}, durch ein Gewicht von 1000 Kilogramm?

$$\lambda = 1{,}5^{mm}.$$

3. Wie groß ist der Durchmesser einer schmiedeeisernen Stange, welche bei 15000 Kilogrammen Belastung höchstens eine Ausdehnung von $\frac{1}{3000}$ ihrer Länge erleiden soll?

$$F = 22{,}5 \,\square^{cm}, \text{ daher } d = 5{,}35^{cm}.$$

4. Wie groß ist die Verlängerung eines Eisendrahtes von 30^{m} Länge bei einer Spannung von 1000 Kilogramm und bei der Elasticitätsgrenze?

$$\lambda_1 = \frac{1000 \,.\, 30}{2100000} = 1{,}4^{cm};\ \lambda_2 = \frac{2400 \,.\, 30}{2100000} = 3{,}4^{cm}.$$

5. Wie groß ist die Belastung in Kilogrammen pro □ ^{cm}, wenn dieselbe pro □ Zoll m Pfunde beträgt?

x Kilogr. = 1 □ ^{cm},
1 □ ^{cm} = 0,14618 □ Zoll,
1 □ Zoll = m Pfund,
2 Pfund = 1 Kilogr.

Die Multiplication dieser Gleichungen ergiebt:

$$x = 0{,}07309 \,.\, m.$$

6. Wie groß ist die Belastung in Pfunden pro □ Zoll, wenn dieselbe pro □ ^{cm}, m Kilogramme beträgt?

x Pfund = 1 □ Zoll,
1 □ Zoll = 6,841 □ ^{cm},
1 □ ^{cm} = m Kilogr.,
1 Kilogr. = 2 Pfund.

Die Multiplication dieser Gleichungen ergiebt:

$$x = 13{,}682 \,.\, m.$$

7. Eine Stange von 3,2^{cm} Durchmesser hat einer Zugkraft von 5300 Kilogramm mit Erfolg widerstanden. Wie groß ist die Spannung in der Stange pro □^{cm}?

$$\frac{5300}{8{,}04} = 659 \text{ Kilogr.}$$

8. Ein Dachstuhl übt an seinem Fußende einen Horizontalschub von 10000 Kilogramm aus, der durch eine horizontale schmiedeeiserne cylindrische Querstange aufgenommen wird. Wie groß ist der Durchmesser der letzteren, welche Ausdehnung erleidet dieselbe bei einer Länge von 35^{m}, wenn die zulässige Spannung pro □^{cm} zu 500 Kilogramm angenommen wird?

$$d = \sqrt{\frac{10000}{500} \cdot \frac{4}{\pi}} = 5^{cm}; \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{500}{2000000}$$

$$\lambda = 0{,}875^{cm}.$$

9. Welche Stärke erhalten die vier Säulen einer hydraulischen Presse, deren Preßstempel 30^{cm} Durchmesser hat, wenn der größte Druck im Preßcylinder 270 Atmosphären beträgt?

Der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratzoll preußisch beträgt 14 Pfund, daher ist derselbe pro □^{cm} in Kilogrammen gleich $14 \,.\, 0{,}0731 = 1{,}0234$ Kilogr. Bezeichnen wir den Durchmesser einer Säule mit d und nehmen die zulässige Spannung zu 700 Kilogr., so ist:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \,.\, 30^2 \,.\, 1{,}0234 \,.\, 270 = \frac{\pi}{4} \,.\, d^2 \,.\, 700,$$

$$d = 9{,}4^{cm}.$$

10. Welche Kraft ist nothwendig, um einen cylindrischen Stab aus Schmiedeeisen von 3,9^{cm} Durchmesser zu zerreißen, und welche Last kann derselbe mit Sicherheit tragen?

$$P = K' F = 4000 \,.\, 3{,}9^2 \,.\, \frac{\pi}{4} = 47784 \text{ Kilogr.},$$

$$P_1 = k' F = 700 \,.\, 3{,}9^2 \,.\, \frac{\pi}{4} = 8362 \text{ Kilogr.}$$

11. Bei welcher Belastung zerreißt eine hölzerne Säule von rechteckigem Querschnitt mit den Seiten 13,7^{cm} und 19,6^{cm}? Welche Belastung kann dieselbe mit Sicherheit tragen?

$$P = 800 \,.\, 13{,}7 \,.\, 19{,}6 = 214816 \text{ Kilogr.},$$

$$P_1 = 80 \,.\, 13{,}7 \,.\, 19{,}6 = 21482 \text{ Kilogr.}$$

12. Hat die Säule in der vorigen Aufgabe eine Länge von 15,7^{m} und nimmt man das specifische Gewicht des Holzes zu 0,62, so ergeben sich als Belastungen, bei Berücksichtigung des eigenen Gewichtes?

$$P = 214816 - 1{,}37 \cdot 1{,}96 \cdot 157 \cdot 0{,}62 = 214555 \text{ Kilogr.},$$

$$P_1 = 21482 - 1{,}37 \cdot 1{,}96 \cdot 157 \cdot 0{,}62 = 21221 \text{ Kilogr.},$$

woraus ersichtlich, daß bei derartigen Fragen das Gewicht des Körpers unberücksichtigt bleiben kann.

13. Wie stark ist das quadratische schmiedeeiserne Gestänge einer nach Art der gewöhnlichen Hubpumpen construirten Schachtpumpe mit seitlichem Druckrohr, zu 30^{cm} Kolbendurchmesser und 140^{m} Förderhöhe zu nehmen?

Während des Kolbenaufganges ist das Gestänge am stärksten und zwar auf Zugfestigkeit in Anspruch genommen. Die Zugkraft ist gleich dem Gewicht der auf den Kolben lastenden Wassersäule, vermehrt um die beim Aufgange auftretenden Widerstände. Nimmt man die letzteren zu $\frac{1}{6}$ des Wassergewichtes, so ist:

$$P = \frac{7}{6} \frac{\pi}{4} . 30^2 . 14 \text{ Kilogr. (da 1 Kubikdecimeter Wasser 1 Kilogr. wiegt)}$$
$$= 11545 \text{ Kilogr.}$$

Wird die Spannung in dem Gestänge zu 650 Kilogr. angenommen und das Gewicht desselben, bei einer Länge gleich 1,12 der Förderhöhe und dem specifischen Gewicht 7,8 berücksichtigt, so ist der Querschnitt des Gestänges:

$$F = \frac{11545}{650 - 15{,}68 . 7{,}8} = 21{,}88 \; \square^{cm} \text{ und}$$

die Seite des quadratischen Querschnitts $4{,}7^{cm}$.

14. Es soll die Länge einer Stange aus Blei gefunden werden, bei der dieselbe vermöge ihres Gewichtes ohne weitere Belastung zerreißt.

Nehmen wir das specifische Gewicht des Bleies zu 11,4, so ist das Gewicht G einer Bleistange von l^{m} Länge und $F \; \square^{cm}$ Querschnitt:

$$G = F l . 1{,}14 \text{ Kilogr.}$$

Da nun $P + G = K' F$ ist und die Belastung $P = 0$ sein soll, so haben wir:

$$G = F l . 1{,}14 = K' F, \text{ daher}$$
$$l = \frac{K'}{1{,}14} = \frac{130}{1{,}14} = 114^{m}.$$

15. Es ist der Durchmesser d eines Hanfseiles zu berechnen, das eine Last von P Kilogramm tragen soll.

Für stehende Seile nehme man $k' = 102$ Kilogramm, dann ist:

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 . 102 = 80 \, d^2 \text{ und } d = \sqrt{\frac{P}{80}}.$$

Für Förderseile nehme man $k' = 37$ Kilogr., daher:

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 . 37 = 29 \, d^2 \text{ und } d = \sqrt{\frac{P}{29}}.$$

16. Ein Drahtseil (Fig. 341) bestehe aus i Drähten vom Durchmesser δ. Wie groß ist δ, resp. der Durchmesser d des Seiles bei P Kilogramm Belastung?

Für stehende Seile ist $k' = 1400$ Kilogramm, daher:

$P = i \frac{\pi}{4} \delta^2 . 1400 = 39600 \, \delta^2$, wenn man, wie es gewöhnlich der Fall

ist, $i = 36$ setzt; $\delta = \sqrt{\frac{P}{39600}}$. Nimmt man hierbei annähernd $d = 10\,\delta$, so ist $P = 396\,d^2$ und $d = \sqrt{\frac{P}{396}}$.

Für Förderseile $k' = 365$ Kilogr. gesetzt, erhält man unter denselben Voraussetzungen $P = 10320\,\delta^2 = 103\,d^2$:

$$\delta = \sqrt{\frac{P}{10320}} \text{ und } d = \sqrt{\frac{P}{103}}.$$

Fig. 341.



Fig. 342.



17. Es ist der Durchmesser d des Rundeisens zu bestimmen, das zu den Schaken einer geschweißten Kette (Fig. 342) verwendet werden muß, damit dieselbe eine Last von P Kilogramm trage.

Die Zerstörung wird in zwei gegenüberstehenden Querschnitten zugleich erfolgen, weshalb der Berechnung die Formel $P = k' \, . \, 2\,F$ zu Grunde zu legen ist. Wir nehmen $k' = 700$ Kilogr. und haben dann

$$P = 2 \, . \, \frac{\pi}{4}\, d^2 \, . \, 700 = 1100\, d^2 \text{ und } d = \sqrt{\frac{P}{1100}}.$$

Bei Ketten, deren einzelne Glieder durch Querstege verstärkt sind, darf man $k' = 1000$ Kilogr. nehmen, und es ist deshalb für diese Stegketten

$$P = 1571\, d^2 \text{ und } d = \sqrt{\frac{P}{1571}}.$$

18. Bei einer Befestigungsschraube sei d der Spindeldurchmesser, h die Ganghöhe, n Anzahl der Gänge, die sich auf einer Länge gleich dem Durchmesser d vorfinden und d_1 der Kerndurchmesser, dann ist $h = \frac{d}{n}$; $\frac{h}{d\,\pi} = tang\,\alpha$, unter α den Winkel verstanden, den die mittlere Schraubenlinie mit der Horizontalen bildet, wobei $tang\,\alpha$ kleiner als der Reibungscoefficient μ sein muß.

Zur Berechnung des Spindeldurchmessers d, bei einer Zugbelastung von P Kilogramm nehme man $k' = 100$ Kilogr., dann erhalten wir:

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 . 100 = 78{,}54\, d^2 \text{ und } d = \sqrt{\frac{P}{79}}.$$

Der Kerndurchmesser d_1 bestimmt sich annähernd, bei Zugrundelegung des Whitworth'schen Schraubensystems, durch die empirische Formel:

$$d_1 = 0{,}9\, d - 0{,}13^{cm}.$$

19. Es ist die Breite b eines Riemen zu bestimmen, der eine Dicke von δ^{cm} erhalten und im Umfange der Riemscheibe einen Druck von P Kilogramm übertragen soll.

Der Riemen hat die Spannung T des ziehenden Endes auszuhalten, deren Werth sich nach Nr. 49 der Uebungen des dritten Capitels bestimmt zu:

$$T = P \frac{e^{\mu \alpha}}{e^{\mu \alpha} - 1}.$$

Für gewöhnliche Fälle bei fetten Riemen und gußeisernen Scheiben ist $\mu = 0{,}28$ und $arc\, \alpha = \pi$. Demnach ist $e^{\mu \alpha} = 2{,}41$ unter e die Basis 2,718 der natürlichen Logarithmen verstanden und

$$T = 1{,}7\, P.$$

Dieser für den Gleichgewichtszustand entwickelte Werth reicht jedoch für die Bewegung nicht aus und wir setzen deshalb $T = 2\, P$.

Zur Berechnung der Riemenbreite haben wir hiernach die Gleichung:

$$2\, P = b\, \delta\, k'.$$

Die Spannung k' pro $\square^{cm}$ nehme man für Schafleder zu 22 Kilogr., für Kalbleder gleich 25 Kilogr., für Roßleder gleich 44 Kilogr. und für Kuhleder gleich 54 Kilogr., dann ist für Riemen aus Kuhleder:

$$b\, \delta = \frac{P}{27}$$

und bei einer constanten Dicke von $0{,}4^{cm}$ ergiebt sich:

$$b = \tfrac{1}{11} P.$$

20. Welche Verkürzung erleidet eine 3^m hohe Säule aus Gußeisen, wenn der $\square^{cm}$ mit 400 Kilogr. belastet ist und eine Biegung nicht stattfinden kann?

$$\lambda = \frac{400 . 300}{1000000} = 0{,}12^{cm}.$$

21. Mit welchem Gewicht kann man den $\square^{cm}$ Querschnittsfläche einer Säule aus Eichenholz belasten, wenn die Verkürzung $\frac{1}{1200}$ der Länge betragen darf?

$$k'' = 120000 . \tfrac{1}{1200} = 100 \text{ Kilogr.}$$

22. Welche Last kann ein Würfel von Granit von $1{,}1^m$ Seite mit Sicherheit tragen?

$$P = 110^2 . 37 = 447700 \text{ Kilogr.}$$

23. Welchen äußeren Durchmesser d erhält eine gußeiserne Säule, die 10000 Kilogr. mit Sicherheit, ohne eine Biegung zu erleiden, tragen soll, und wenn der innere Durchmesser $d_1 = 0,6\,d$ angenommen wird?

$$10000 = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2).750 = \frac{\pi}{4}(1 - 0,6^2).750\,d^2$$

$$d = 5,21^{cm} \text{ und } d_1 = 3,13^{cm}.$$

24. Welche Last kann eine cylindrische Säule aus festem Sandstein bei $31,4^{cm}$ Durchmesser mit Sicherheit tragen, wenn ihre Länge eine Biegung nicht befürchten läßt?

$$P = \frac{\pi}{4}\,31,4^2\,.\,29 = 22457 \text{ Kilogr.}$$

25. Welches ist die größte zulässige Höhe einer Säule aus festem Basalt vom specifischen Gewicht 2,8?

$$P = Fk'' - G = 0,$$

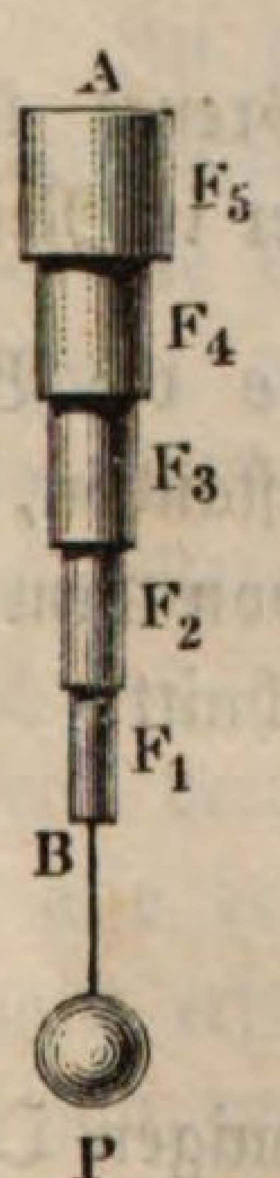
$$G = Fl\,.\,0,028, \text{ daher } F(k'' - 0,028\,l) = 0$$

und wenn wir $k'' = 197$ Kilogr. nehmen:

$$l = \frac{197}{0,028} = 7036^{dm}.$$

26. Haben Körper, die auf Zug- oder einfache Druckfestigkeit in Anspruch genommen sind, eine sehr große Länge, so darf das Gewicht derselben nicht vernachlässigt werden und es haben dann die einzelnen Querschnitte nicht mehr dieselbe, sondern verschiedene Belastungen auszuhalten. Hieraus folgt, daß es fehlerhaft sein würde, derartige Körper prismatisch zu gestalten, vielmehr muß man ihnen eine solche Form geben, daß die Spannung pro $\square^{cm}$ in jedem Querschnitt gleich groß ausfällt.

Fig. 343.



Ein derartig hergestellter Körper wird ein Körper von gleichem Widerstande genannt. Es sei der in Fig. 343 dargestellte Körper mit Rücksicht auf die Zunahme des Gewichtes von unten nach oben mit größer werdenden Querschnitten construirt, die mit $F_1, F_2, F_3 \cdots$ bezeichnet werden sollen. Die aneinander gesetzten Prismen mögen sämmtlich dieselbe Länge λ haben, wobei wir die Länge l des Körpers gleich $n\lambda$ nehmen. Für die Belastung P ist die allgemein zu Grunde zu legende Gleichung $P + G = Fk$, aus welcher wir, indem wir $G = Fl\gamma$ setzen, unter γ das Gewicht von 1 Kubikcentimeter des Körpers verstanden, erhalten:

$$F = \frac{P}{k - \gamma\,l} = \frac{P}{k}\,\frac{k}{k - \gamma\,l}.$$

Wenden wir letztere Formel auf die einzelnen Querschnitte an, so ergiebt sich:

$$F_1 = \frac{P}{k} \frac{k}{k - \gamma\lambda},$$

$$F_2 = \frac{P + F_1 \lambda\gamma}{k} \frac{k}{k - \gamma\lambda} = F_1 \frac{k}{k - \gamma\lambda} = \frac{P}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^2,$$

$$F_3 = \frac{P + F_1 \lambda\gamma + F_2 \lambda\gamma}{k} \frac{k}{k - \gamma\lambda} = F_2 \frac{k}{k - \gamma\lambda} = \frac{P}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^3$$

u. s. w., also ganz allgemein:

$$F_n = \frac{P}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^n.$$

Bezeichnen wir das Volumen des prismatischen Körpers von der Länge l mit V_1 und dasjenige des Körpers, der durch die Figur dargestellt wird mit V_2, so ist

$$V_1 = F l = \frac{P}{k} \frac{k}{k - \gamma l} l \text{ und}$$

$$V_2 = \frac{P}{k} \lambda \left\{ \frac{k}{k - \gamma\lambda} + \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^2 + \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^3 + \cdots \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^n \right\}$$

$$= \frac{P}{\gamma} \left\{ \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^n - 1 \right\} = \frac{F_n - F_0}{\gamma} k,$$

daher die Volumenersparniß $V = V_1 - V_2 = \dfrac{P l}{k - \gamma l} - \dfrac{F_n - F_0}{\gamma} k.$

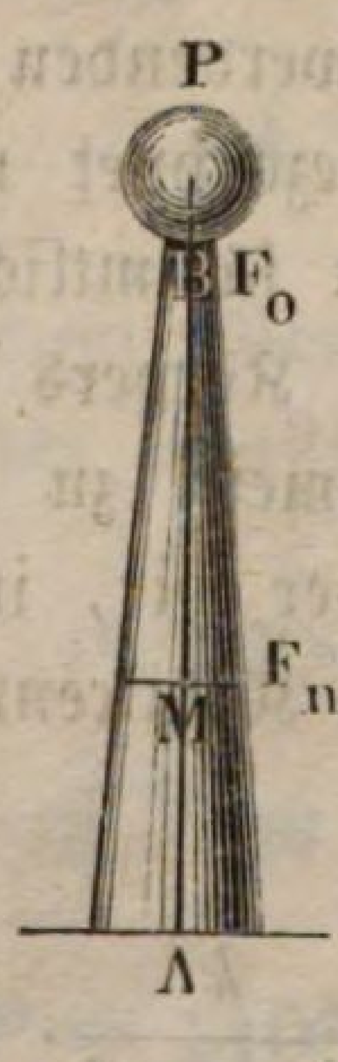
Lassen wir in dem Körper die Querschnitte allmälig ineinander übergehen, nehmen wir also λ unendlich klein und n unendlich groß, so geschieht die Längenbegrenzung des Körpers durch eine krumme Linie (Fig. 344 und 345), deren Form sich aus dem oben entwickelten Werthe von F_n ergiebt, wenn wir darin $n = \infty$ und $\lambda = \dfrac{l}{n}$ setzen. Es ist:

$$F_n = \frac{P}{k} \left(\frac{k}{k - \gamma\lambda}\right)^n = \frac{P}{k} \frac{1}{\left(1 + \frac{-\gamma l : k}{n}\right)^n}.$$

Fig. 344.



Fig. 345.



Geht man hierin zur Grenze über, setzt also $n = \infty$, so wird aus der im Nenner stehenden Potenz $e^{-\frac{\gamma l}{k}}$ unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden, daher der in der Entfernung l von dem belasteten Ende befindliche Querschnitt:

$$F_n = \frac{P}{k} e^{\frac{\gamma l}{k}}.$$

Wählen wir einen kreisförmigen Querschnitt, nennen dessen Halbmesser y und die

entsprechende Entfernung von dem belasteten Ende x, so erhalten wir:

$$y^2 = \frac{4}{\pi}\frac{P}{k}\left(e^{\frac{\gamma}{k}}\right)^x.$$

27. Für das in Aufgabe 13 berechnete Gestänge ergiebt sich, wenn wir dasselbe aus 14 Stücken à 10^m zusammengesetzt denken:

$$\frac{k}{k-\gamma\lambda} = \frac{650}{650-7{,}8} = \frac{650}{642} \text{ und } \frac{P}{k} = \frac{11545}{650}.$$

$$F_0 = \frac{11545}{650} = 17{,}76 \,\square^{cm},\; F_1 = 17{,}76\,\frac{650}{642} = 17{,}98 \,\square^{cm};$$

$$F_2 = 17{,}76\left(\frac{650}{642}\right)^2 = 18{,}21 \,\square^{cm},\; F_6 = 17{,}76\left(\frac{650}{642}\right)^6 = 19{,}13 \,\square^{cm};$$

$$F_{10} = 17{,}76\left(\frac{650}{642}\right)^{10} = 20{,}10 \,\square^{cm},\; F_{14} = 17{,}76\left(\frac{650}{642}\right)^{14} = 21{,}12 \,\square^{cm}.$$

28. Die allgemeine für Zug- und Druckelasticität, innerhalb der Elasticitätsgrenze giltige Formel 138:

$$P = E F \frac{\lambda}{l}$$

bringen wir auf die Form:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{E}\frac{P}{F}\left(\text{d. i. } \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma\right) \text{ und}$$

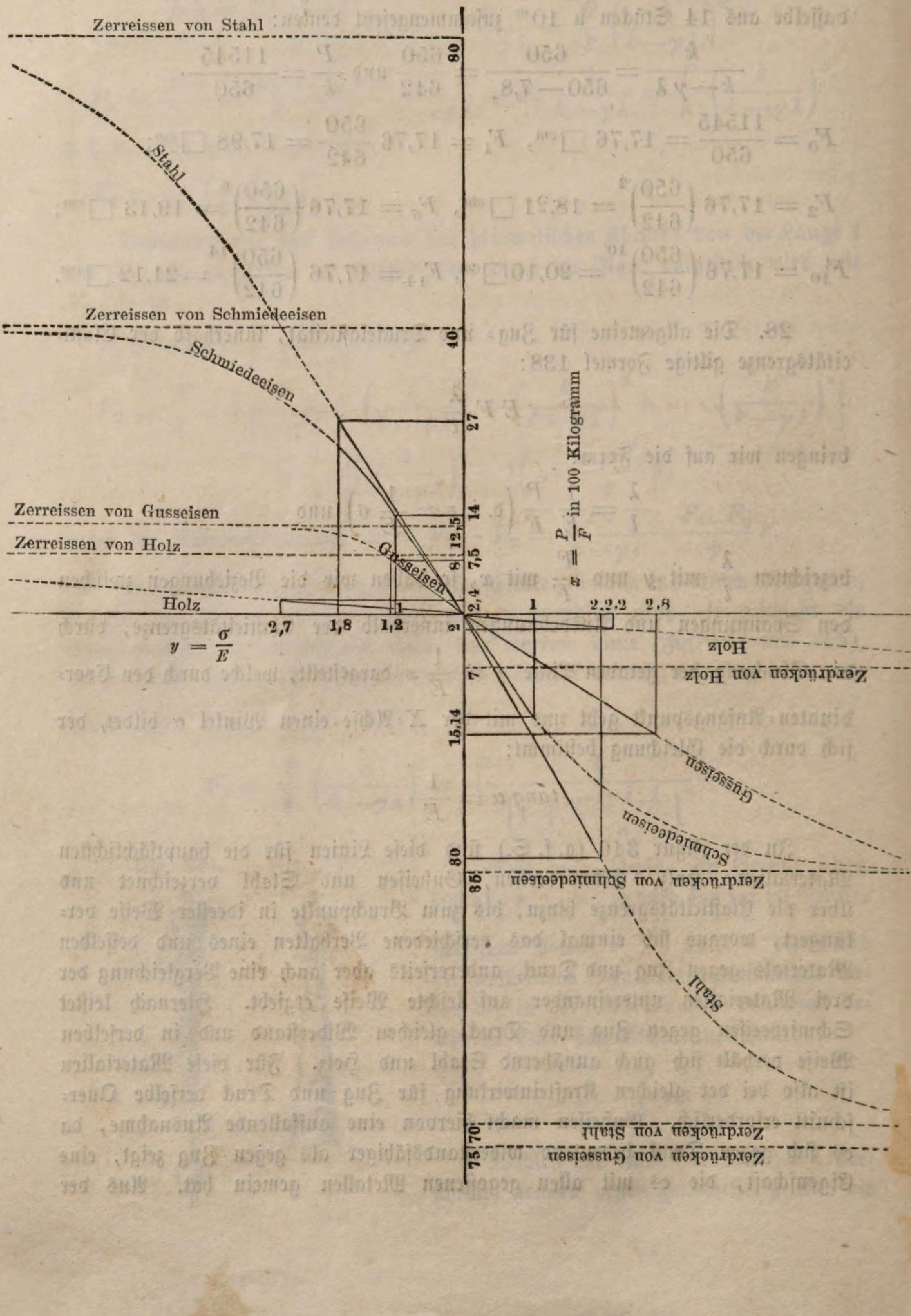
bezeichnen $\frac{\lambda}{l}$ mit y und $\frac{P}{F}$ mit x, so haben wir die Beziehungen zwischen den Spannungen und Ausdehnungen innerhalb der Elasticitätsgrenze, durch die Gleichung der geraden Linie $y = \frac{1}{E}x$ dargestellt, welche durch den Coordinaten-Anfangspunkt geht und mit der X-Achse einen Winkel α bildet, der sich durch die Gleichung bestimmt:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{E}.$$

In der Figur 346 (a. f. S.) sind diese Linien für die hauptsächlichsten Materialien, Holz, Schmiedeeisen, Gußeisen und Stahl verzeichnet und über die Elasticitätsgrenze hinzu, bis zum Bruchpunkte in ideeller Weise verlängert, woraus sich einmal das verschiedene Verhalten eines und desselben Materials gegen Zug und Druck, andererseits aber auch eine Vergleichung der drei Materialien untereinander auf leichte Weise ergiebt. Hiernach leistet Schmiedeeisen gegen Zug und Druck gleichen Widerstand und in derselben Weise verhält sich auch annähernd Stahl und Holz. Für diese Materialien ist also bei der gleichen Krafteinwirkung für Zug und Druck derselbe Querschnitt erforderlich. Gußeisen macht hiervon eine auffallende Ausnahme, da es sich gegen Druck bedeutend widerstandsfähiger als gegen Zug zeigt, eine Eigenschaft, die es mit allen gegossenen Metallen gemein hat. Aus der

Formel $P = F(\sigma)$, unter (σ) die Spannung bei Erreichung der Elasticitätsgrenze verstanden, ergiebt sich, daß die Querschnitte für die einzelnen Materialien, bei gleicher Belastung sich umgekehrt wie die betreffenden Spannungen (σ)

Fig. 346.



verhalten. Setzt man den Querschnitt eines Holzstabes gleich 1, so ist bei derselben Belastung:

a) für Zugkräfte:

der Querschnitt eines Stabes aus Schmiedeeisen $= \frac{2,4}{14} = \frac{1}{6}$,

» » » » » Gußeisen $= \frac{2,4}{7,5} = \frac{1}{3}$

» » » » » Stahl $= \frac{2,4}{27} = \frac{1}{11}$;

b) für Druckkräfte:

der Querschnitt eines Stabes aus Schmiedeeisen $= \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

» » » » » Gußeisen $= \frac{2}{15} = \frac{1}{7,5}$,

» » » » » Stahl $= \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

Außer diesen Festigkeitsverhältnissen sind bei der Wahl des Materials noch die specifischen Gewichte, sowie die Preise des rohen und bearbeiteten Stoffes in Berücksichtigung zu ziehen.

29. Es sollen zwei Blechplatten nach der in Fig. 347 angegebenen Weise durch drei gleich starke Niete verbunden werden. Welchen Durchmesser erhalten dieselben, wenn die in Richtung der Blechplatten wirksame Abscheerungskraft 5100 Kilogramm beträgt?

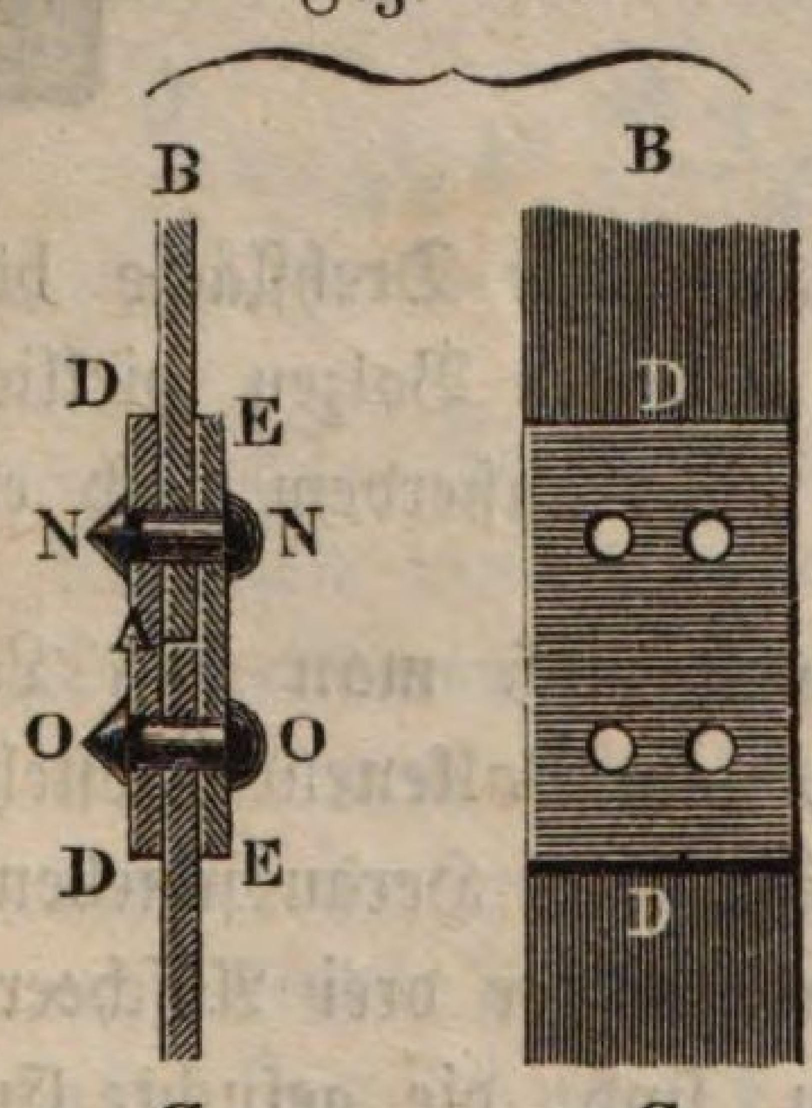
Es ist $P = t\,F$, worin wir $P = \frac{5100}{3}$, $F = \frac{\pi}{4}\,d^2$ zu setzen haben und $t = 450$ Kilogr. nehmen:

$$d = \sqrt{\frac{5100 \,.\, 4}{3 \,.\, 450 \,.\, \pi}} = 2,2^{cm}.$$

Fig. 347.



Fig. 348.



30. Zwei Platten (Fig. 318) durch eine zweiseitige oder Kettennietung fest miteinander verbunden, haben einer Abscheerungskraft von 12000 Kilogr.

zu widerstehen, welche sich auf die vier vorhandenen Nieten gleichmäßig vertheilt. Welchen Durchmesser erhalten dieselben bei einer zulässigen Spannung von 400 Kilogr.

Es ist hier $P = \frac{12000}{4}$, und da zwei Querschnitte zu gleicher Zeit abgeschnitten werden müssen, so ist $F = 2 \, . \, \frac{\pi}{4} d^2$ zu setzen, demnach erhalten wir $\frac{12000}{4} = 400 \, . \, 2 \, . \, \frac{\pi}{4} d^2$ und hieraus:

$$d = 2{,}2^{cm}.$$

31. Welche Kraft ist nothwendig zum Lochen eines 1^{cm} starken Bleches, bei 2^{cm} Lochdurchmesser.

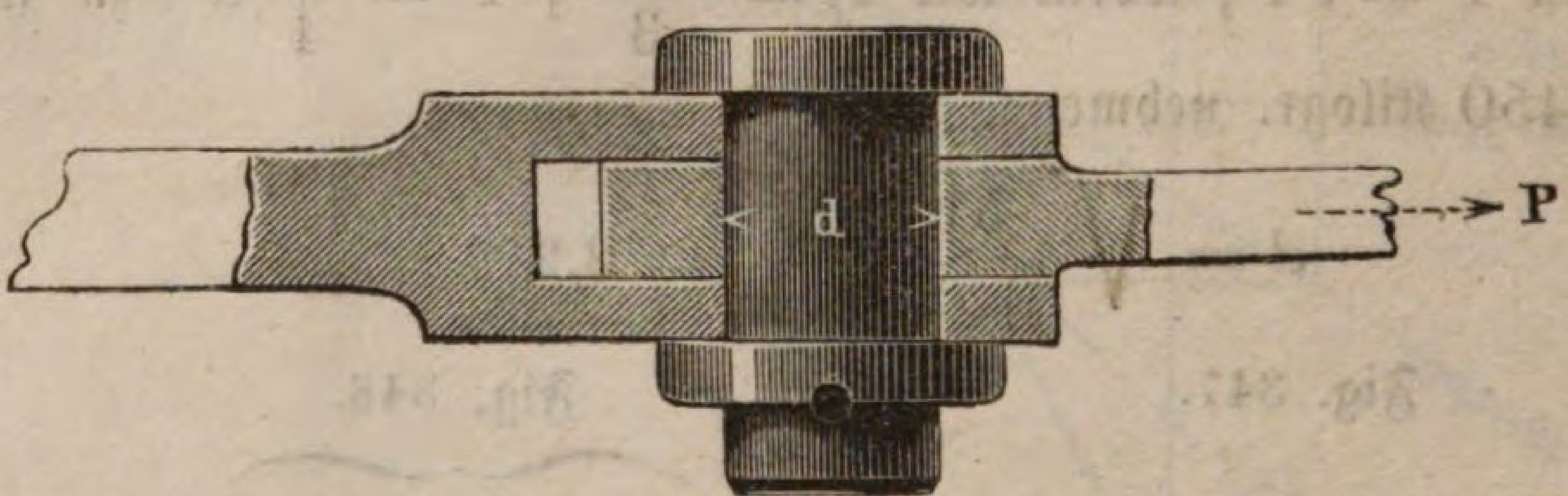
Die Abscheerungsfläche ist hier der Mantel eines Cylinders von 2^{cm} Durchmesser und 1^{cm} Höhe; die Abscheerungsfestigkeit nehmen wir zu 3500 Kilogr. an, dann ist:

$$P = 3500 \, . \, \pi \, . \, 2 \, . \, 1 = 22000 \text{ Kilogr.}$$

32. Welchen Durchmesser erhält der Bolzen eines Gelenkes (Fig. 349), wenn eine Kraft von 10200 Kilogr. die beiden durch das Gelenk zusammenhängenden Stangen auseinander zu reißen sucht und die Spannung pro $\square^{cm}$ mit 400 Kilogr. in Rechnung zu bringen ist:

$$10200 = 400 \, . \, 2 \, \frac{\pi}{4} \, d^2 \text{ und } d = 4^{cm}.$$

Fig. 349.



Wird die Länge der Drehfläche höchstens zu 2^{cm} angenommen, so kann man sicher sein, daß der Bolzen wirklich auf Scheerfestigkeit in Anspruch genommen ist und nicht außerdem noch eine Biegung erleidet.

33. Wie weit muß man das Loch eines Zapfens, welches b^{cm} breit und d^{cm} tief ist, vom Balkenende abstehen lassen, damit der vorhandene Horizontalschub P nicht ein Herausschieben des stehen bleibenden Holzes verursache. Die Inhalte der drei Abscheerungsflächen, auf dem Grunde und an den beiden Seiten, sind, die gesuchte Entfernung mit e bezeichnend, gleich $b\,e$, $d\,e$, $d\,e$, daher:

$$P = t\,e\,(b + 2\,d) \text{ und } e = \frac{P}{t\,(b + 2\,d)}.$$

Es sei $b = 5^{cm}$, $d = 8^{cm}$, $P = 1000$ Kilogr., dann ist für $e = 10^{cm}$:

$$t = 5 \text{ Kilogr., d. i. } \tfrac{1}{10} k'.$$

34. Das Trägheitsmoment J eines Rechtecks von den Seiten b und h ist für die mit b parallel laufende neutrale Achse $\frac{1}{12} b h^3$. Für die Basis b als Biegungsachse erhält man n. F. 145:

$$J_1 = \tfrac{1}{12} b h^3 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b h = \tfrac{1}{3} b h^3.$$

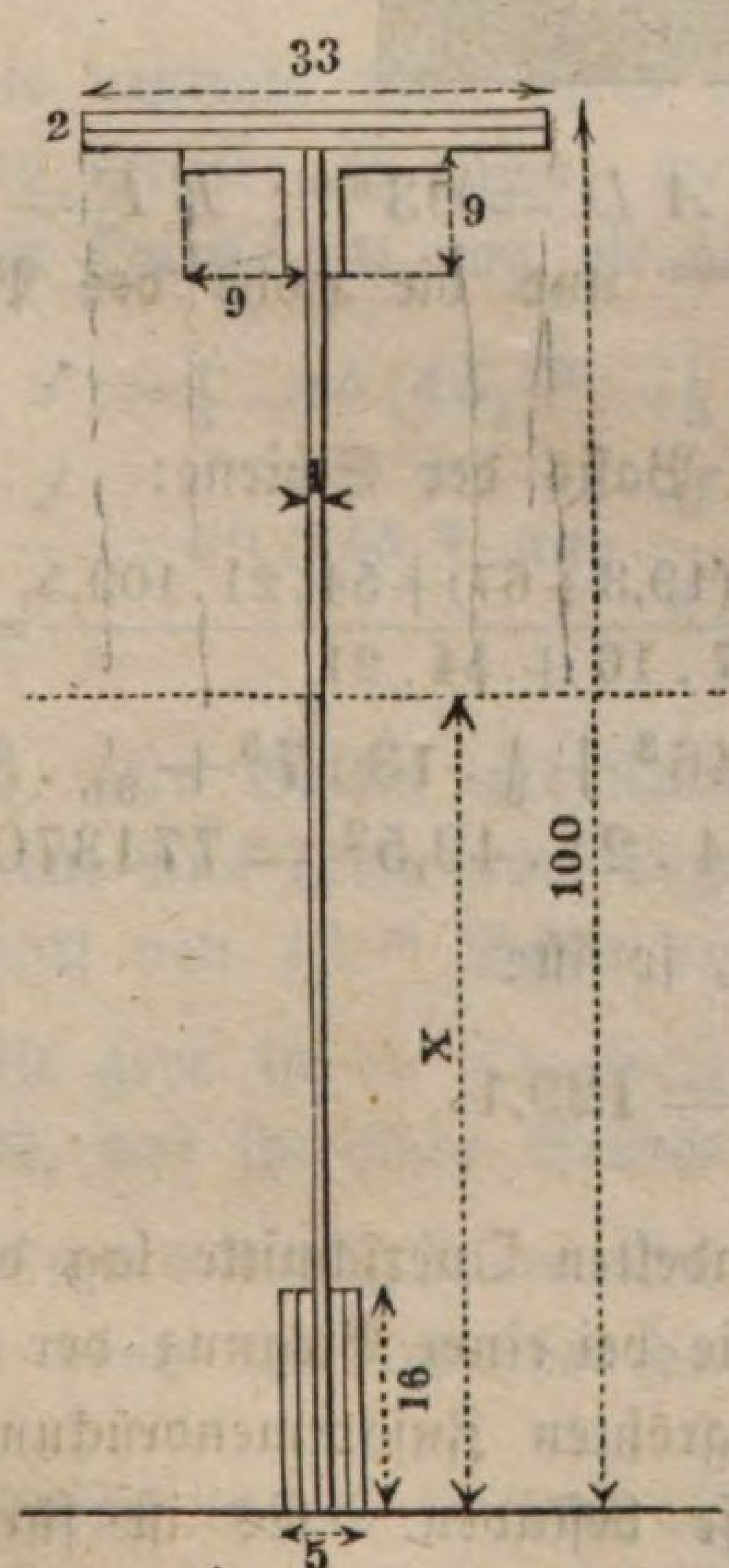
35. Berechnung des Trägheitsmomentes J in Bezug auf die neutrale Achse für den in Fig. 350 vorgezeichneten Querschnitt, wenn die eingeschriebenen Maße Centimeter bezeichnen.

Der Schwerpunktsabstand x von der unteren Kante ist:

$$x = \frac{\Sigma V_1 x_1}{\Sigma V_1} = \frac{33.2.99 + 18.1.97{,}5 + 8.2.93 + 98.1.49 + 16.4.8}{33.2 + 18.1 + 8.2 + 98.1. + 16.4} = 57{,}66,$$

$$J = \tfrac{1}{3} [33 . 42{,}33^3 - (33 - 19)\, 40{,}33^3 - (19 - 3)\, 39{,}33^3$$
$$- (3-1).31{,}33^3 + 5.57{,}66^3 - (5-1).41{,}66^3]$$
$$= \tfrac{1}{81}[33.127^3 + 5.173^3 - 14.121^3 - 16.118^3 - 2.94^3 - 4.125^3]$$
$$= \frac{93485224 - 60564034}{81} = \frac{32921190}{81} = 406434.$$

Fig. 350.



36. Es ist das Trägheitsmoment J sowie der Werth von $\frac{J}{e}$ für ein Paralleltrapez zu berechnen. Die parallelen Seiten seien a und b, die Höhe h:

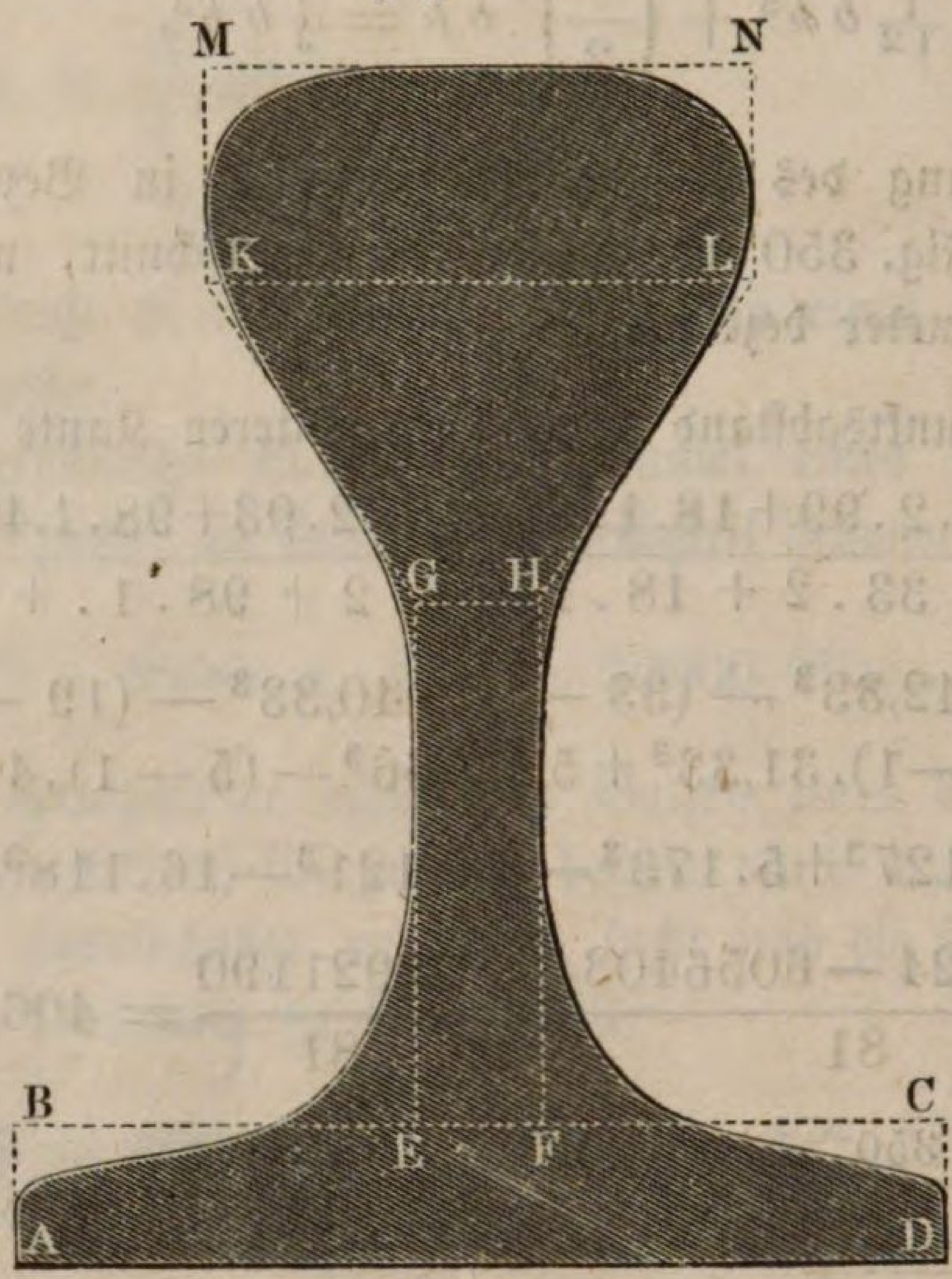
$$J = \tfrac{1}{36} h^3 \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b},$$

$$\frac{J}{e} = \tfrac{1}{12} h^2 \frac{a^2 + 4ab + b^2}{2a + b}.$$

37. Soll für eine, von beliebigen krummen Linien begrenzte Figur, das Trägheitsmoment berechnet werden, so ersetze man die krumme Begrenzung durch eine gerade, wobei die dadurch entstehende Fläche mit der vorgelegten gleichen Inhalt behalten muß. Diesen neuen Querschnitt zerlege man in solche einzelne Theile, deren Trägheitsmomente in der Tabelle des §. 69 gegeben sind. Auf die Weise ist man bei Anwendung von F. 145, $J_1 = J + d^2 F$,

stets im Stande, wenigstens einen angenäherten Werth von J und $\frac{J}{e}$ für eine beliebige Fläche zu finden. Als Beispiel hierzu mögen diese Werthe für den nebenstehenden Querschnitt (Fig. 351) der Eisenbahnschiene bestimmt werden. Die punktirten Linien zeigen die vorzunehmende Zerlegung.

Fig. 351.



Für die Berechnung sei $AB = 14^{mm}$; $AD = 93^{mm}$; $EF = 13^{mm}$; $EG = 53^{mm}$; $KL = 54^{mm}$; $KM = 21^{mm}$ und die Höhe des Paralleltrapezes $GHLK = 32^{mm}$.

Es ist der Schwerpunktsabstand von der Basis der Schiene:

$$x = \frac{\Sigma V_1 x_1}{\Sigma V_1} = \frac{14.93.7+13.53.40,5+67.16.(19,3+67)+54.21.109,5}{14.93+13.53+67.16+54.21} = 60^{mm}.$$

$$J = \tfrac{1}{12}.93.14^3 + 14.93.53^2 + \tfrac{1}{3}.13.46^3 + \tfrac{1}{3}.13.7^3 + \tfrac{1}{36}.32^3.88$$
$$+ 67.16(19,3+7)^2 + \tfrac{1}{12}54.21^3 + 54.21.49,5^2 = 7743706.$$

Wenn wir die Maße in Centimetern angeben, so ist:

$$J = 774,371 \text{ und } \frac{J}{e} = 129,1.$$

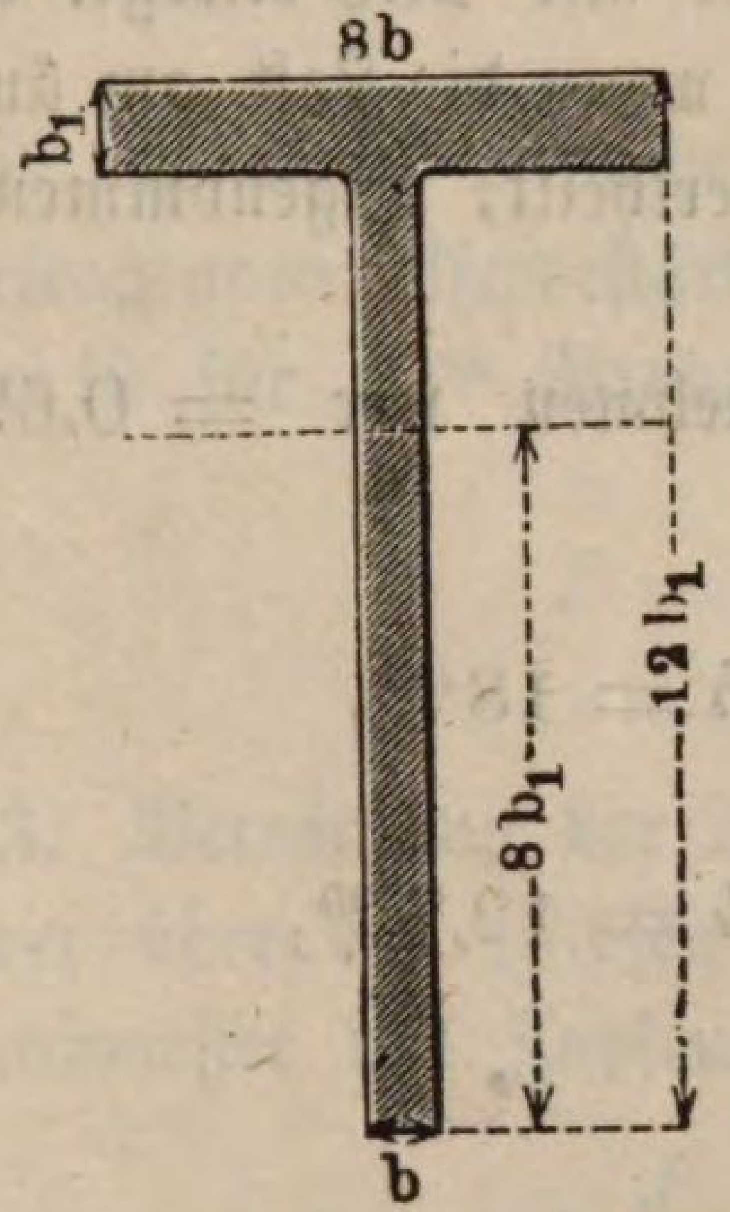
38. Bei dem in voriger Nummer behandelten Querschnitte lag die neutrale Achse auf der halben Höhe, sodaß sich die bei einer Biegung der Schiene hervorgerufenen größten Ausdehnungen und größten Zusammendrückungen in derselben Entfernung von der neutralen Achse befinden. Es ist für diesen Querschnitt demnach der früheren Bezeichnung gemäß $e' = e''$. Da die Schiene aus Schmiedeeisen besteht, der Widerstand desselben gegen Ausdehnung und Zusammendrückung aber als gleich groß angenommen werden darf, so ist für

die beiden äußersten Faserschichten der Schiene zugleich $k' = k''$. Wir erhalten hiernach für den Querschnitt der Eisenbahnschiene:

$$k' \frac{J}{e'} = k'' \frac{J}{e''} \text{ oder } \frac{e'}{e''} = \frac{k'}{k''}.$$

Derartige Querschnitte, für welche diese Gleichung erfüllt wird, sollen Querschnitte von gleicher Festigkeit genannt werden. Bei Schmiedeeisen, sowie nahezu bei Stahl und Holz, haben die zweiachsig symmetrischen Querschnitte diese Eigenschaft, für Gußeisen dagegen, wo $k'' = 2\,k'$, muß für Querschnitte von gleicher Festigkeit auch $e'' = 2\,e'$ sein, d. h. die neutrale Achse theilt hier die Höhe des Querschnitts nach dem Verhältniß 1 : 2.

Fig. 352.



Für den in Fig. 352 verzeichneten T-förmigen Querschnitt, bei welchem b und b_1 ein beliebiges Verhältniß zu einander haben können, ergiebt sich der Schwerpunktsabstand x von der unteren Begrenzung:

$$x = \frac{\Sigma V_1 x_1}{\Sigma V_1} = \frac{8b \,.\, 12b_1 \,.\, 6b_1 - 7b \,.\, 11b_1 \,.\, \frac{11}{2} b_1}{8\,b \,.\, 12\,b_1 - 7\,b \,.\, 11\,b_1} = \frac{305}{38} b_1 = 8 b_1.$$

Die neutrale Achse theilt demnach den Querschnitt nach dem Verhältniß 1:2 und derselbe ist daher, wenn der zugehörige Körper aus Gußeisen besteht, ein Querschnitt von gleicher Festigkeit. Ferner ist:

$$J = \tfrac{1}{3} \,.\, 8\,b\,(4b_1)^3 - \tfrac{1}{3} \,.\, 7\,b\,(3b_1)^3 + \tfrac{1}{3}\,b\,(8\,b_1)^3 = 278\,bb_1{}^3,$$

$$\frac{J}{e'} = 69{,}5\,bb_1{}^2 \text{ und } \frac{J}{e''} = 34{,}8\,bb_1{}^2.$$

39. Ein Balken aus Tannenholz ist an einem Ende eingemauert. Der Balken hat eine horizontale Lage, eine Länge von 4^m und einen rechteckigen Querschnitt von 13^{cm} Breite und 20^{cm} Höhe.

Wie groß ist die Tragkraft des Balkens bei Berücksichtigung des eigenen Gewichts, das specifische Gewicht des Tannenholzes zu 0,62 genommen?

a) wenn die Last am Ende des Körpers wirksam ist;

b) wenn die Last über den Körper gleichmäßig vertheilt ist.

$$\text{Gewicht } G \text{ des Balkens} = \frac{13 \,.\, 20}{100} \,.\, 40 \,.\, 0{,}62 = 64{,}5 \text{ Kilogr.}$$

$$\frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\,b\,h^2 = \tfrac{1}{6} \,.\, 13 \,.\, 20^2 = 866{,}67 \text{ und } k = 73 \text{ Kilogr.}$$

Die Formeln, welche der Berechnung zu Grunde zu legen, sind:

$$(P_1 + \tfrac{1}{2} G)\, l = k \frac{J}{e} \text{ und } \tfrac{1}{2}(P_2 + G)\, l = k \frac{J}{e}$$

$$(P_1 + \tfrac{1}{2} \cdot 64{,}5) . 400 = 73 . 866{,}67, \text{ daher } P_1 = 126 \text{ Kilogr.}$$

$$\tfrac{1}{2}(P_2 + 64{,}5) . 400 = 73 . 866{,}67, \text{ daher } P_2 = 252 \text{ Kilogr.}$$

40. Ein prismatischer Körper aus Eichenholz mit rechteckigem Querschnitte von 15,5 ^{cm} Breite ist in horizontaler Lage an einem Ende eingemauert.

Der Körper habe eine Länge von 2 ^{m} und sei mit 250 Kilogr. belastet.

Welche Höhe h muß der Balken erhalten? a) wenn die Last am äußersten Ende wirksam ist; b) wenn dieselbe gleichmäßig vertheilt, angenommen wird; c) bei Berücksichtigung des eigenen Gewichtes.

Das specifische Gewicht des Eichenholzes nehmen wir $= 0{,}69$ und $k = 60$ Kilogr., dann ist:

$$\text{a)} \quad P\, l = k \frac{J}{e} = k \tfrac{1}{6} b h^2, \text{ daher } h = 18^{cm},$$

$$\text{b)} \quad \tfrac{1}{2} P\, l = k \frac{J}{e} = k \tfrac{1}{6} b h^2, \text{ daher } h = 12{,}7^{cm},$$

$$\text{c)} \begin{cases} (P + \tfrac{1}{2} G)\, l = k \dfrac{J}{e} \text{ und} \\ \tfrac{1}{2}(P + G)\, l = k \dfrac{J}{e}. \end{cases}$$

Zur Berechnung des Gewichtes benutzen wir die unter a gefundene Höhe von 18 ^{cm}, dann ist $G = 39$ Kilogr. und $h = 18{,}7$ oder $13{,}7^{cm}$.

41. Vier Balken aus Eichenholz sind mit einem Ende in horizontaler Lage eingemauert und sollen als Unterlage zu einem Balcon dienen. Den Boden des letzteren bilden Granitplatten von 13 ^{cm} Dicke. Die Länge der Balken sei 2 ^{m} und die Entfernung vom ersten bis zum letzten, d. h. die Länge des Balcons sei 3 ^{m}.

Es sind die Abmessungen des rechteckigen Querschnittes eines Balkens zu bestimmen, wenn die Breite sich zur Höhe wie 1 : 3 verhalten und der Balken die genügende Stärke besitzen soll, an seinem äußersten Ende eine zufällige Belastung von 350 Kilogramm zu tragen.

Die gleichmäßig vertheilte Last bilden die Granitplatten, von deren Gewicht auf jeden Balken der vierte Theil gerechnet wird. Das specifische Gewicht des Granits zu 2,8 und $k = 60$ Kilogr. genommen, so ergiebt sich:

Höhe eines Balkens 33 ^{cm},
Breite » » 11 ^{cm}.

42. Der im Theilkreis, zweier in einander greifender Räder, auftretende Druck sei P, welchen wir der Sicherheit wegen in der äußersten Kante des Zahnes, gleichförmig über die Zahnbreite b vertheilt und normal zur Zahnlänge l wirksam denken.

Nennen wir noch die Dicke des Zahnes im Theilkreise d, so ist:

$$P l = k \tfrac{1}{6} b d^2.$$

Für gewöhnliche Verhältnisse setzen wir $l = 1{,}5\, d$, $b = 6\, d$, bei gußeisernen Zähnen $k = 90$ Kilogr. und wenn hölzerne mit eisernen Zähnen zusammenarbeiten, so nehmen wir $k = 40$ Kilogr. und bezeichnen die Zahndicke mit d_1. Für diese Annahme ist:

$$d = \sqrt{\frac{P}{60}} \text{ und } d_1 = 1{,}5\, d.$$

Ist der Druck P nicht gegeben, kennt man dagegen die Anzahl N der zu übertragenden Pferdestärken und die Anzahl u der Umdrehungen pro Minute, so ist für R^{cm} Radhalbmesser:

$$P = 71620 \frac{N}{R u}.$$

43. Berechnung der Tragzapfen am Ende eines rotirenden Körpers. Es sei P der über den Zapfen gleichmäßig vertheilte Druck, l die Länge und d der Durchmesser des Zapfens, dann ist:

$$\tfrac{1}{2} P l = k \frac{J}{e} = k \frac{\pi}{32} d^3 \text{ und hieraus}$$

$$d^2 = \frac{16}{k \pi} \frac{l}{d} P.$$

Aus dem Werthe von d^2 folgt, daß die Zapfen um so schwächer gemacht werden können, je kleiner $\frac{l}{d}$ genommen wird. Andererseits ist aber eine große Auflagefläche bei schnell umlaufenden Zapfen vortheilhaft, um die Erhitzung und Abnutzung so viel als möglich zu verhindern und die entstehenden Schwingungen besser abzuleiten. Endlich wächst die Arbeit des Reibungswiderstandes mit dem Durchmesser, sodaß es hiernach wieder zweckmäßig erscheint, Zapfen mit geringerem Durchmesser zu verwenden. Diesen theilweise widersprechenden Bedingungen kann nur dadurch abgeholfen werden, daß man bewährte Constructionen aus der Praxis als Ausgangspunkt für die Aufstellung der nothwendigen Formeln benutzt.

Für gewöhnliche Verhältnisse, wo die Anzahl u der Umdrehungen geringer als 150 ist, nehme man $\frac{l}{d} = \frac{5}{4}$ bis $\frac{3}{2}$, bei Zapfen, die nicht dauernd umlaufen, wie die von Krahnen, Winden, Rollen ist $\frac{l}{d}$ zweckmäßig $= 1$ und bei Zapfen, die mehr als 150 Umdrehungen machen, setze man $\frac{l}{d} = 2$.

a) gußeiserne Zapfen $k = 200$ Kilogr.:

für $\frac{l}{d} = \frac{5}{4}$ ist $d = \sqrt{\frac{P}{31}}$

für $\frac{l}{d} = \frac{4}{3}$ » $d = \sqrt{\frac{P}{29}}$

für $\frac{l}{d} = \frac{3}{2}$ » $d = \sqrt{\frac{P}{26}}$

für $\frac{l}{d} = 1$ » $d = \sqrt{\frac{P}{39}}$

b) schmiedeeiserne Zapfen $k = 450$ Kilogr.:

für $\frac{l}{d} = \frac{5}{4}$ ist $d = \sqrt{\frac{P}{71}}$

für $\frac{l}{d} = \frac{4}{3}$ » $d = \sqrt{\frac{P}{66}}$

für $\frac{l}{d} = \frac{3}{2}$ » $d = \sqrt{\frac{P}{59}}$

für $\frac{l}{d} = 1$ » $d = \sqrt{\frac{P}{88}}$

für $\frac{l}{d} = 2$ » $d = \sqrt{\frac{P}{44}}$

c) stählerne Zapfen $k = 786$ Kilogr.:

für $\frac{l}{d} = \frac{5}{4}$ ist $d = \sqrt{\frac{P}{123}}$

für $\frac{l}{d} = \frac{4}{3}$ » $d = \sqrt{\frac{P}{115}}$

für $\frac{l}{d} = \frac{3}{2}$ » $d = \sqrt{\frac{P}{103}}$

für $\frac{l}{d} = 2$ » $d = \sqrt{\frac{P}{77}}$.

44. Ein Körper A (Fig. 353) von **beliebiger** Gestalt sei in horizontaler Lage an dem einen Ende in einer verticalen Wand befestigt, an dem andern Ende sei die zum Zerbrechen erforderliche Last angebracht, so ist die Frage, an welcher Stelle wird der Bruch erfolgen? Für die aufeinanderfolgenden Querschnitte, deren Entfernungen von dem Ende des Körpers $z_1, z_2, z_3 \ldots l$ sein mögen, haben die Widerstandsmomente $k\frac{J}{e}$, durch W_1, W_2, $W_3 \ldots$ bezeichnet, im Allgemeinen verschiedene Größe. Die Lasten, welche das Zerbrechen in den einzelnen Querschnitten bewirken würden, seien $P_1, P_2, P_3 \ldots$ so haben wir, abgesehen von dem Gewichte des Körpers:

$$P_1 z_1 = W_1$$
$$P_2 z_2 = W_2 \text{ u. s. w.,}$$

oder

$$P_1 = \frac{W_1}{z_1}$$
$$P_2 = \frac{W_2}{z_2} \text{ u. s. w.}$$

Die Ausdrücke $\frac{W_1}{z_1}$, $\frac{W_2}{z_2}$ ... sind im Allgemeinen verschieden, der kleinste derselben muß der Brechnungsebene entsprechen, sodaß es sich bei Ermittelung desselben für eine gegebene Last P um den Werth von z handelt, der den Quotient $\frac{W}{z}$ zu einem Minimum macht.

Fig. 353.

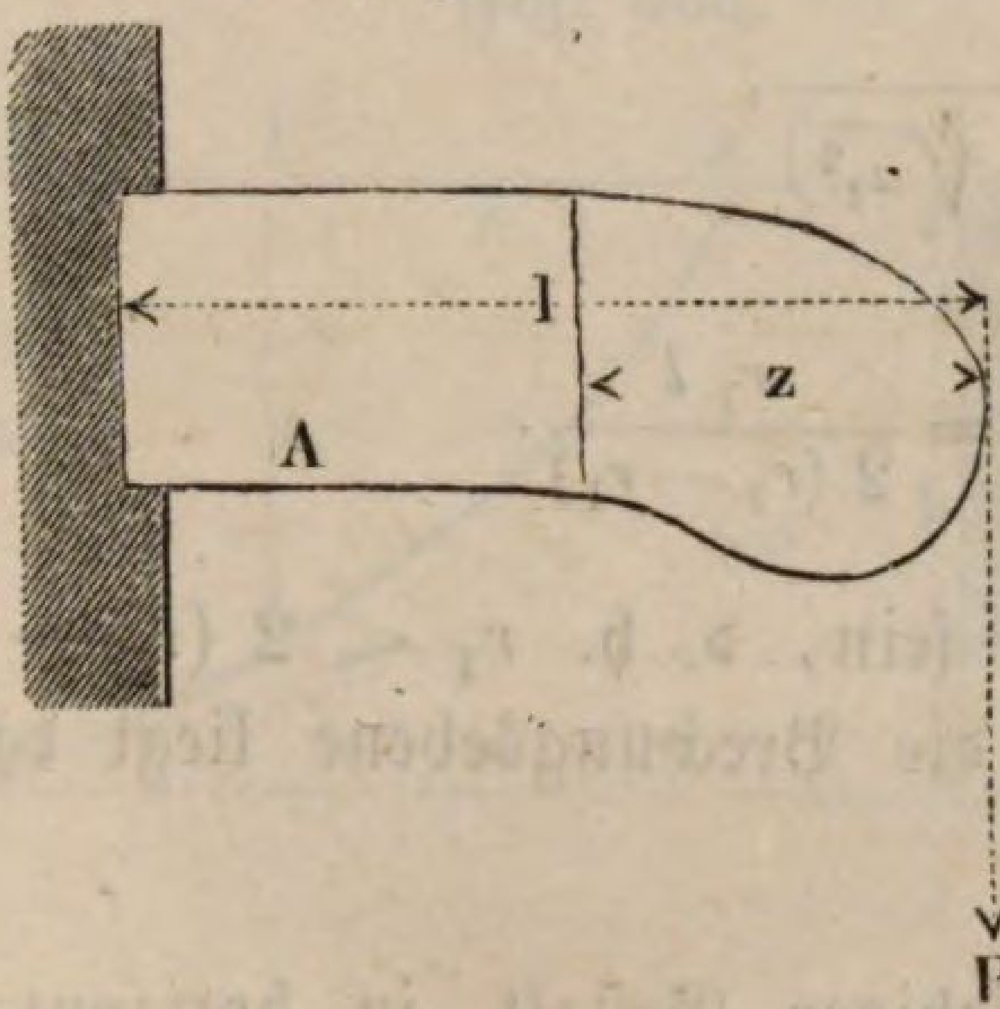
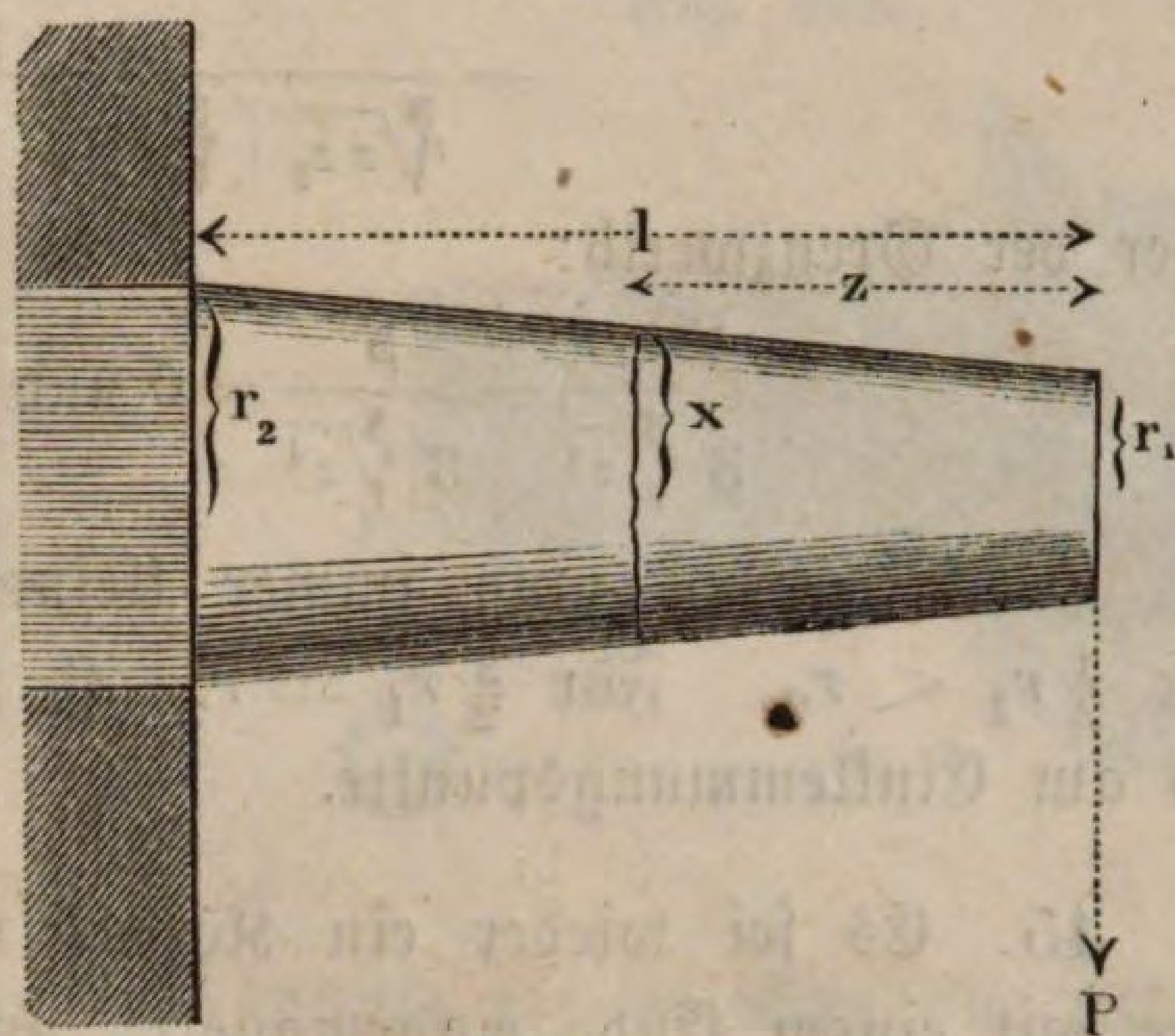


Fig. 354.



Der Körper sei ein abgekürzter Kegel (Fig. 354), r_1 und r_2 seien die Halbmesser der Grundebenen, x der Halbmesser der Brechungsebene, die sich in der Entfernung z von dem belasteten Ende befindet. Für diese muß $\frac{W}{z}$ zu einem Minimum gemacht werden.

Für den kreisförmigen Querschnitt ist:

$$W = k \tfrac{1}{32} \pi (2x)^3 = k \tfrac{1}{4} \pi x^3.$$

Es ist:

$$x - r_1 : r_2 - x = z : l - z$$

$$r_2 - r_1 : x - r_1 = l : z$$

$$x = \frac{(r_2 - r_1) z + r_1 l}{l}.$$

Diesen Werth substituiren wir in W, so entsteht:

$$W = \tfrac{1}{4} k \pi \frac{[(r_2 - r_1) z + r_1 l]^3}{l^3}.$$

Wir müssen $\frac{W}{z}$ zu einem Minimum machen:

$$\frac{W}{z} = \tfrac{1}{4} \frac{k \pi}{l^3} \frac{[(r_2 - r_1) z + r_1 l]^3}{z} = Min.,$$

d. h.

$$\frac{[(r_2 - r_1) z + r_1 l]^3}{z} = Min.,$$

oder

$$\frac{(r_2 - r_1) z + r_1 l}{\sqrt[3]{z}} = \frac{\alpha z + \beta}{\sqrt[3]{z}} = Min.$$

Für den Uebergang von $z = z_1$ ist:

$$lim \left\{ \frac{\alpha z + \beta}{\sqrt[3]{z}} - \frac{\alpha z_1 + \beta}{\sqrt[3]{z_1}} \right\} : (z - z_1) = 0.$$

Es ist aber:

$$\left\{ \alpha \left(\sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{z_1^2}\right) - \frac{\beta \left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{z_1}\right)}{\sqrt[3]{z z_1}} \right\} : (z - z_1) = \frac{\alpha (z + z_1)}{\left(\sqrt[3]{z^4} + \sqrt[3]{z^2 z_1^2} + \sqrt[3]{z_1^4}\right)}$$

$$- \frac{\beta}{\sqrt[3]{z z_1}\left(\sqrt[3]{z^2} + \sqrt[3]{z z_1} + \sqrt[3]{z_1^2}\right)},$$

daher der Grenzwerth:

$$\frac{2 \alpha z}{3 \sqrt[3]{z^4}} - \frac{\beta}{3 \sqrt[3]{z^4}} = 0 \text{ und } z = \frac{\beta}{2 \alpha} = \frac{r_1 l}{2 (r_2 - r_1)}.$$

Der Ausdruck muß immer kleiner als l sein, d. h. $r_1 < 2 (r_2 - r_1)$ oder $\frac{3}{2} r_1 < r_2$. Für $\frac{3}{2} r_1 = r_2$ ist $z = l$, die Brechungsebene liegt dann also am Einklemmungspunkte.

45. Es sei wieder ein Körper von beliebiger Gestalt in horizontaler Lage mit einem Ende eingemauert, an dem andern belastet. Findet sich bei der Untersuchung der Quotienten $\frac{W}{z}$ für die verschiedenen Querschnitte, wenn das eigene Gewicht unberücksichtigt bleibt:

$$\frac{W_1}{z_1} = \frac{W_2}{z_2} = \frac{W_3}{z_3} = \ldots = \frac{W}{z},$$

so haben die einzelnen Querschnitte dasselbe Brechungsbestreben, d. h. jeder Querschnitt darf als Brechungsebene angesehen werden. Wir nennen dergleichen Körper **Körper von gleichem Widerstande**; die Form derselben bestimmt sich also durch die Gleichung:

$$\frac{W_1}{z_1} = \frac{W}{z}.$$

Unter allen Körpern von gleicher Festigkeit hat der von gleichem Widerstande die kleinste Menge Material, ist deshalb für die Praxis der zweckmäßigste und derjenige, den man stets wählen sollte.

Die normalen Querschnitte des Körpers von der Länge l seien Rechtecke von derselben Breite b und veränderlicher Höhe x. Der Querschnitt an der Stelle B (Fig. 355) der Einmauerung habe die Abmessungen b und h. Für diesen ist:

$$\frac{W}{z} = \frac{1}{6} k \frac{b h^2}{l}.$$

Für irgend einen andern beliebig gewählten Querschnitt in der Entfernung z vom belasteten Ende haben wir:

$$\frac{W}{z} = \frac{1}{6} k \frac{b x^2}{z}.$$

Der Körper soll in jedem Querschnitte gleichen Widerstand dem Brechen entgegensetzen, wir haben deshalb die Bedingungsgleichung:

$$\tfrac{1}{6} k \frac{b h^2}{l} = \tfrac{1}{6} k \frac{b x^2}{z}$$

$$x^2 = \frac{h^2}{l} z.$$

Fig. 355.

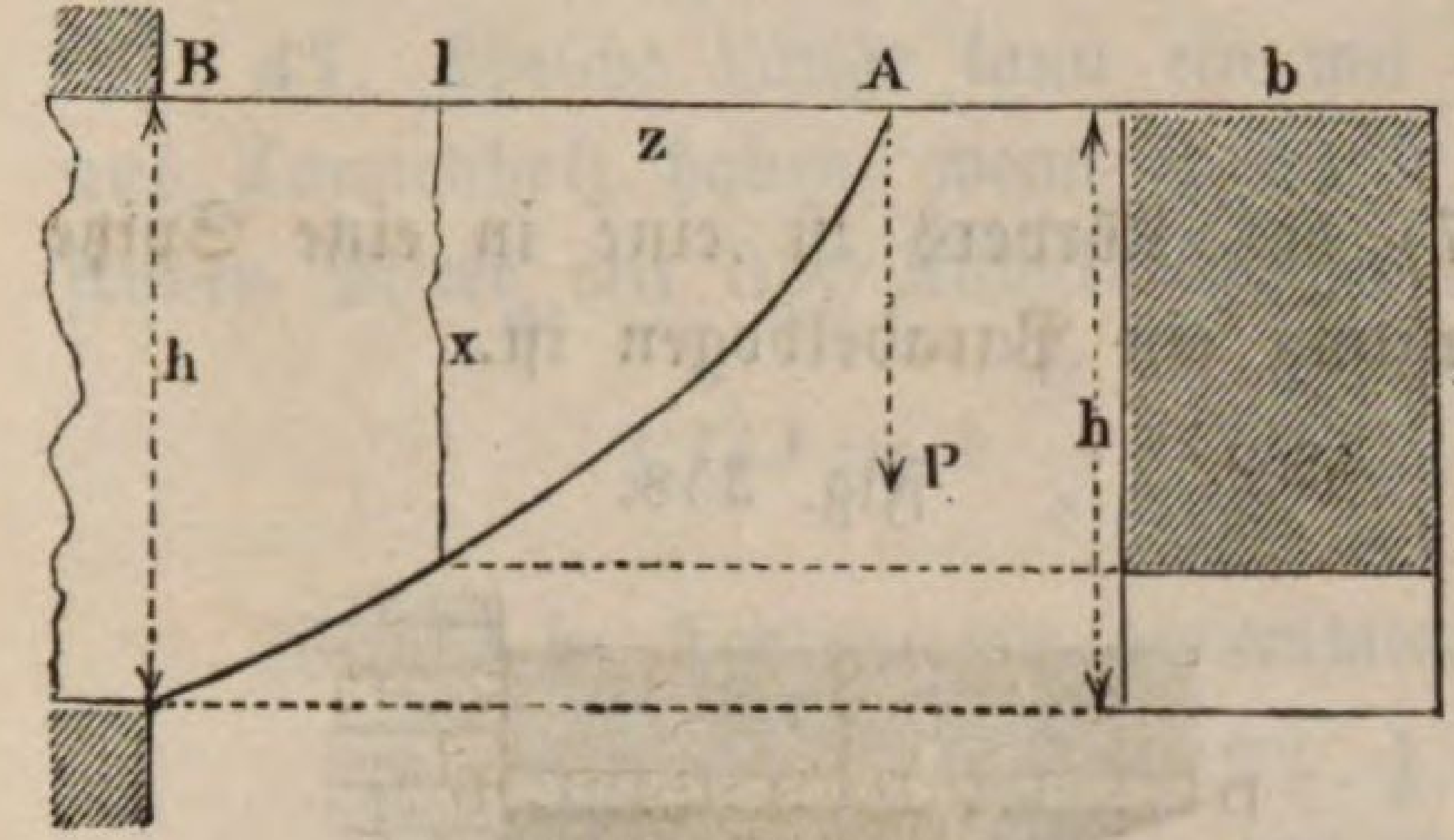
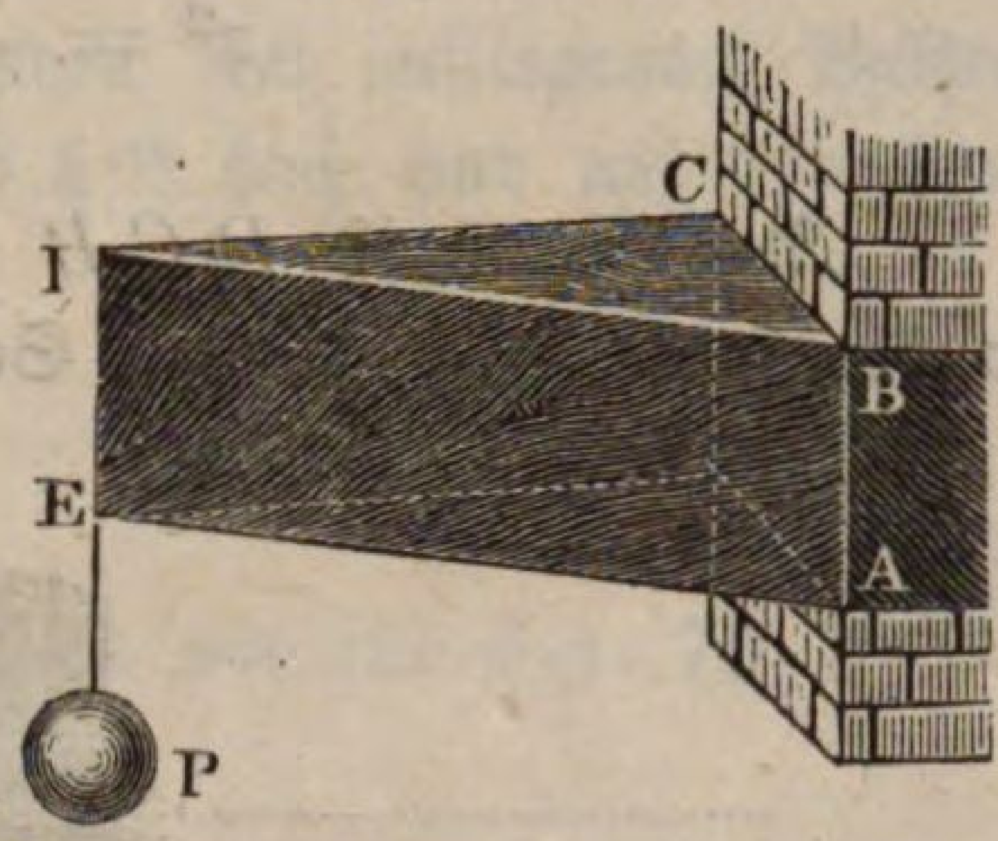


Fig. 356.



Die Gleichung giebt in einem Längendurchschnitte die Relation an, welche zwischen der Höhe x und der Länge z besteht. Nehmen wir als obere Begrenzung des Körpers eine horizontale Ebene an, so ist der Längendurchschnitt, der Gleichung gemäß, unterhalb von einer Parabel gebildet, deren Achse die Linie AB ist. Die Form hervorragender Consolen ist hiernach bestimmt. Hat der Körper dagegen überall dieselbe Höhe h (Fig. 356) und eine veränderliche Breite x, so ist:

$$\frac{W}{z} = \tfrac{1}{6} k \frac{x h^2}{z}.$$

Wir erhalten hiernach die Bedingungsgleichung:

$$\tfrac{1}{6} k \frac{b h^2}{l} = \tfrac{1}{6} k \frac{x h^2}{z}$$

$$z = \frac{l}{b} x,$$

oder:

$$x : b = z : l,$$

d. h. die Endpunkte der veränderlichen Breite bilden eine gerade Linie BD, der Grundriß des Körpers ist also ein rechtwinkeliges Dreieck DCB.

Trägt der Körper eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = p\, l$, so haben wir

$$p\, l \frac{l}{2} = \tfrac{1}{6} k\, b\, h^2,$$

für eine beliebige Stelle in der Entfernung z, wo der Querschnitt die Abmessungen x und y haben mag:

$$p z \frac{z}{2} = \tfrac{1}{6} k\, x\, y^2.$$

Für die gemachte Voraussetzung haben wir:

$$p = \frac{2}{6} k \frac{b h^2}{l^2} = \frac{2}{6} k \frac{x y^2}{z^2}$$

$$\frac{b h^2}{l^2} = \frac{x y^2}{z^2}.$$

a) Der Körper habe überall dieselbe Höhe h, so ist:

$$z^2 = \frac{l^2}{b} x.$$

Der Grundriß $D C B$ (Fig. 357) des Körpers ist eine in eine Spitze auslaufende Figur, deren Seitenbegrenzung ein Parabelbogen ist.

Fig. 357.

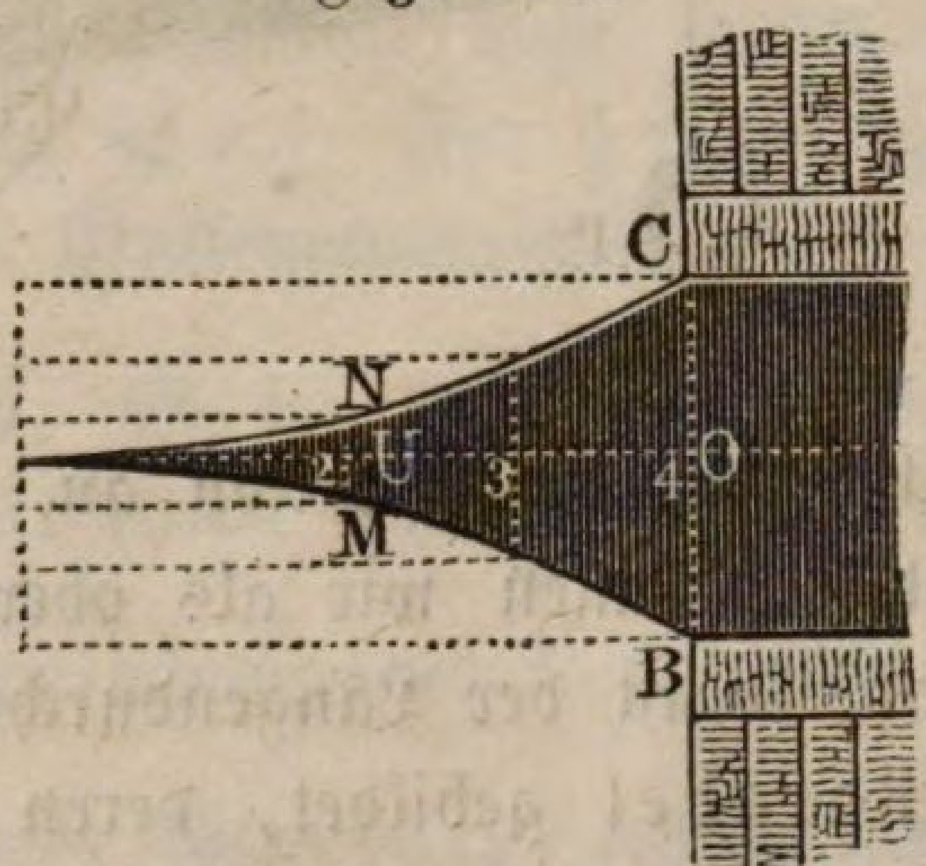
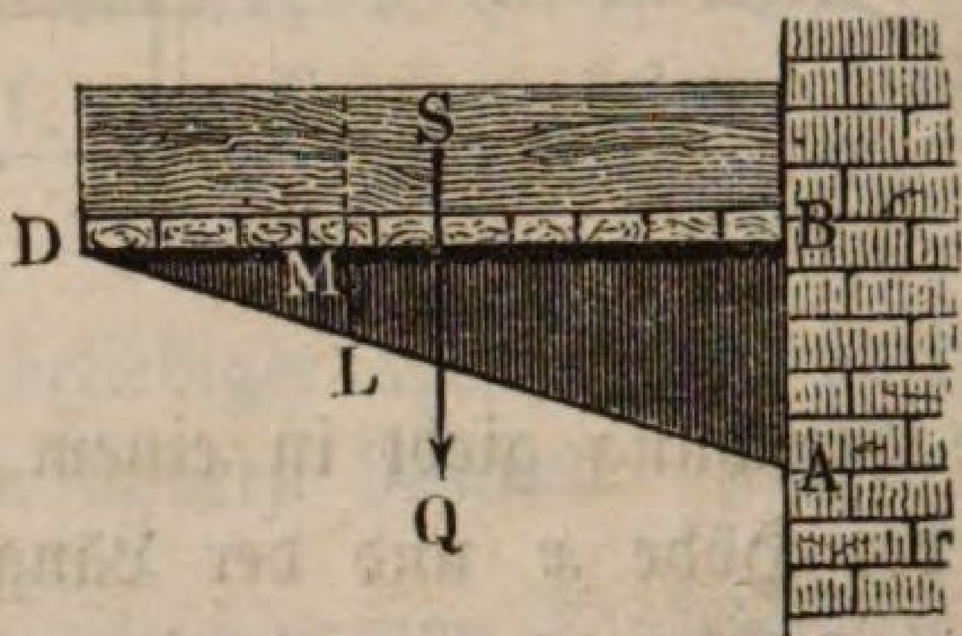


Fig. 358.



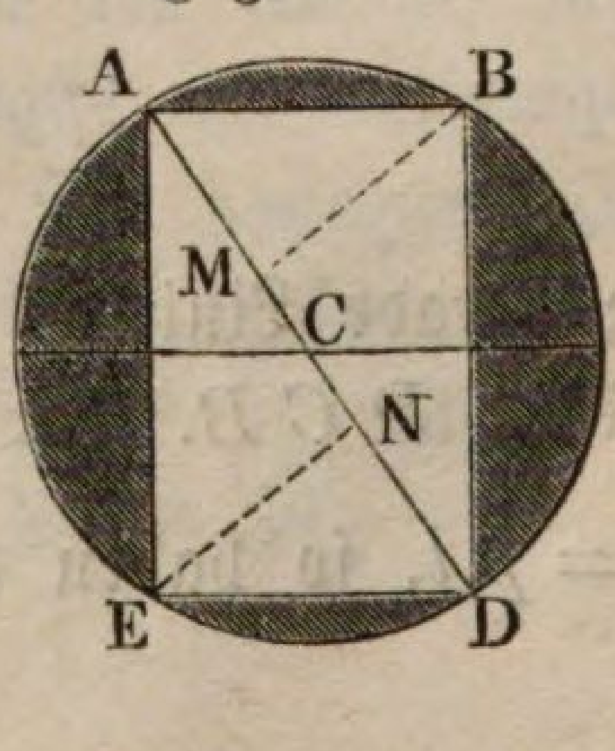
b) Der Körper habe überall dieselbe Breite b, so ist:

$$y = \frac{h}{l} z \text{ oder } h : y = l : z,$$

d. h. die Endpunkte der Höhen bilden eine gerade Linie $D L A$ (Fig. 358).

46. Aus einem Cylinder soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt $A B D E$ (Fig. 359) gehauen werden, dessen Widerstandsmoment ein Maximum ist.

Fig. 359.



Für den rechteckigen Querschnitt ist das Widerstandsmoment $k \frac{J}{e}$ gleich

$$\frac{1}{6} k b h^2.$$

Hiernach muß für den gegebenen Durchmesser d des Cylinders

$b h^2$ ein Maximum sein,

d. h. $b (d^2 - b^2)$ ein Maximum

oder $b d^2 - b^3$ ein Maximum, d. h. für den Uebergang von $b = b_1$ muß $lim(b d^2 - b^3 - b_1 d^2 + b_1^3) : (b - b_1) = 0$ sein. Es ist aber

$$\frac{d^2 (b - b_1) - (b^3 - b_1^3)}{b - b_1} = d^2 - (b^2 + b b_1 + b_1^2),$$

daher der Grenzwerth $d^2 - 3 b^2 = 0$ und $b^2 = \frac{1}{3} d^2$, d. h. b ist die mittlere

Proportionale zu d und $\frac{1}{3}d$. Ferner ist $h^2 = \frac{2}{3}d^2$, wofür sich also folgende Construction ergiebt:

Der Durchmesser AD des kreisförmigen Querschnitts werde in drei Theile getheilt, in M und N errichte man Normalen MB und NE zu verschiedenen Seiten des Durchmessers AD, und stelle das Rechteck $ABDE$ her. In diesem verhalten sich die Seiten wie $1 : \sqrt{2}$, daher ist dasselbe als der verlangte Querschnitt anzusehen.

47. Welche Länge kann ein mit beiden Enden frei aufliegender Balken aus Tannenholz haben, wenn er 21^{cm} breit, $27{,}5^{cm}$ hoch und auf den laufenden Meter mit 630 Kilogr. belastet ist?

$$\frac{1}{8}\,G\,l = k\,\frac{J}{e}.$$

Wird l in Centimetern genommen, so erhalten wir für $k = 73$:

$$\frac{1}{8}\,.\,6{,}30\,l^2 = 73\,.\,\frac{1}{6}\,.\,21\,.\,27{,}5^2$$
$$l = 495^{cm} = 4{,}95^{m}.$$

48. Welche Last kann eine 7^{m} lange mit beiden Enden frei aufliegende Röhre aus Gußeisen in ihrer Mitte tragen, wenn sie 31^{cm} äußeren Durchmesser und 3^{cm} Wandstärke hat. Da der Kreisring für Gußeisen kein Querschnitt gleicher Festigkeit ist, so ist der Sicherheitscoefficient $k' = 440$ Kilogr. in Rechnung zu bringen:

$$\frac{1}{4}\,P\,l = k'\,\frac{J}{e'} = k'\,\frac{\pi}{32}\,\frac{d^4 - d_1{}^4}{d}$$

$$\frac{1}{4}\,P.700 = 440\,\frac{\pi}{32}\,\frac{31^4 - 25^4}{31} \text{ und } P = 4243 \text{ Kilogr.}$$

49. Wie groß ist die gleichmäßige Belastung eines gußeisernen mit beiden Enden frei aufliegenden Trägers von dem in Aufgabe 38 angegebenen Querschnitte gleicher Festigkeit, wenn $b_1 = b = 3^{cm}$ und die Länge 3^{m} beträgt?

$$G = \frac{8}{l}\,k'\,\frac{J}{e'} = \frac{8}{l}\,k''\,\frac{J}{e''},$$

$$k' = 440 \text{ Kilogr.};\ \frac{J}{e'} = 69{,}5\,b^3;\ G = \frac{8.440.69{,}5.3^3}{300} = 22018 \text{ Kilogr.}$$

50. Es ist der Durchmesser d einer gußeisernen, liegenden Achse zu berechnen, deren Zapfenlager 6^{m} von einander entfernt sind und die 2^{m} von dem einen Ende ein 600 Kilogr. schweres Rad zu tragen hat?

Es ist

$$P\,\frac{a\,b}{l} = k\,\frac{J}{e}, \text{ wobei } k = k' = 440 \text{ Kilogr. zu nehmen ist.}$$

$$\frac{600\,.\,2\,.\,400}{6} = 440\,\frac{\pi}{32}\,d^3, \text{ daher } d = 12{,}3^{cm}.$$

51. Eine schmiedeeiserne Achse von 5^m Länge trägt in den Entfernungen $0{,}6^m$, 2^m und 3^m von dem einen Ende A die Lasten von 600 Kilogr., 1500 Kilogr. und 2000 Kilogr.

Wo liegt die Brechungsebene und wie groß ist die Seite a des quadratischen Querschnitts?

Die Drucke A und B auf die Stützpunkte sind:

$$A = \frac{600 \cdot 4{,}4 + 1500 \cdot 3 + 2000 \cdot 2}{5} = 2228 \text{ Kilogr.}$$

$$B = \frac{600 \cdot 0{,}6 + 1500 \cdot 2 + 2000 \cdot 3}{5} = 1872 \text{ Kilogr.}$$

Die Brechungsebene kann nur in einem der Aufhängepunkte der isolirten Lasten liegen, es sind demnach die Spannungsmomente für diese Aufhängepunkte zu entwickeln und das Maximum derselben gleich dem Widerstandsmomente $k \frac{J}{e}$ zu setzen.

Die Spannungsmomente für die drei Angriffspunkte sind:

$$2228 \cdot 0{,}6 = 1336{,}8$$
$$2228 \cdot 2 - 600 \cdot 1{,}4 = 4456 - 840 = 3616$$
$$2228 \cdot 3 - 600 \cdot 2{,}4 - 1500 \cdot 1 = 6684 - 1440 - 1500 = 3744.$$

Es liegt hiernach im Aufhängepunkte der Last von 2000 Kilogr. der gefährliche Querschnitt und wir haben daher, $k = 750$ Kilogr. gesetzt:

$$100 \cdot 3744 = 750 \cdot \tfrac{1}{6} a^3 \text{ und } a = 14{,}4^{cm}.$$

52. Ein Körper von der Länge l sei mit den beiden Enden in horizontaler Lage frei aufliegend, und in der Mitte durch P Pfund belastet. Die Querschnitte des Körpers seien Rechtecke, von denen das in der Mitte die Abmessungen b und h haben mag. Der Körper soll in jedem Querschnitte dem Bruche gleichen Widerstand entgegensetzen. In der Entfernung z von dem einen Ende seien die Abmessungen des Querschnittes x und y, so haben wir für diesen:

$$\tfrac{1}{2} P z = \tfrac{1}{6} k x y^2.$$

Für den Querschnitt in der Mitte haben wir dagegen:

$$\tfrac{1}{2} P \frac{l}{2} = \tfrac{1}{6} k b h^2.$$

Die Form eines Körpers von gleichem Widerstande bestimmt sich daher durch die Gleichung:

$$\tfrac{1}{3} k \frac{x y^2}{z} = \tfrac{2}{3} k \frac{b h^2}{l}$$

$$\frac{x y^2}{z} = 2 \frac{b h^2}{l}.$$

a) der Körper habe überall dieselbe Breite b, die obige Gleichung geht dann über in:

$$\frac{y^2}{z} = 2\frac{h^2}{l}$$

$$y^2 = 2\frac{h^2}{l}z.$$

Die Endpunkte der veränderlichen Höhen liegen hiernach in einer Parabel, was für beide Seiten des Körpers, von der Mitte aus gerechnet, stattfindet, sodaß die Begrenzung des Körpers AB (Fig. 360) durch zwei congruente Parabeln geschieht, die in der Mitte zusammenstoßen und ihre Scheitel in den Auflagepunkten haben.

Fig. 360.

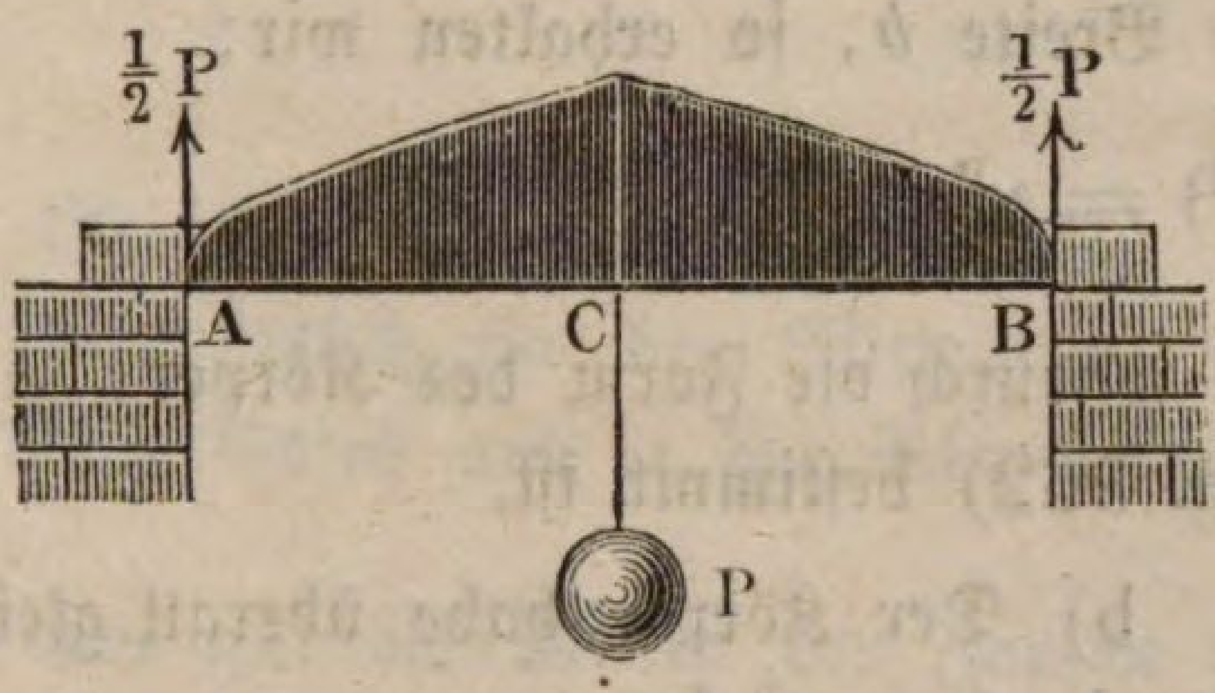
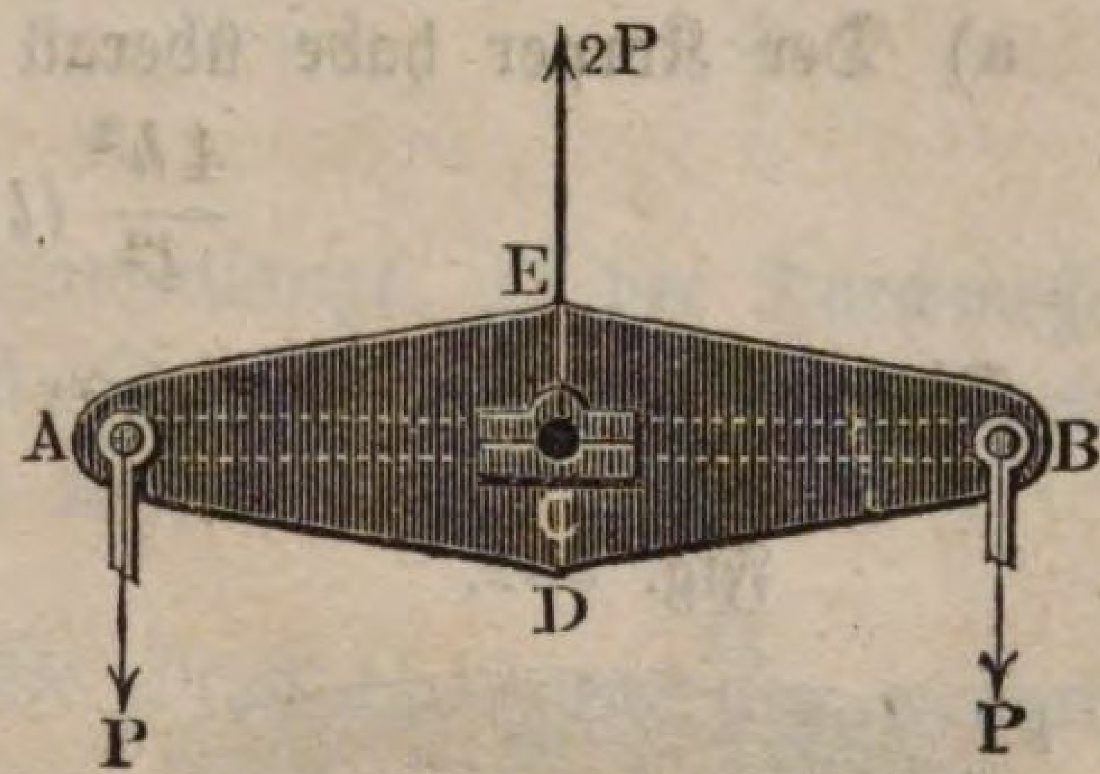


Fig. 361.



Der Körper erhält dieselbe Form, wenn er in der Mitte unterstützt und an beiden Enden durch P Pfunde belastet ist. Hiernach müssen die Balancier und Hebel AB (Fig. 361) im Längenquerschnitte durch Parabeln begrenzt werden.

b) Der Körper habe überall dieselbe Höhe h.

In diesem Falle ist die Form des Körpers bestimmt durch:

$$\frac{x}{z} = 2\frac{b}{l},$$

d. h.

$$x = 2\frac{b}{l}z \text{ oder}$$

$$x : b = z : \frac{l}{2}.$$

Die Endpunkte der veränderlichen Breite bilden eine gerade Linie, der Grundriß des Körpers ist also ein Rhombus.

53. Ein Körper von der Länge l sei mit beiden Enden frei aufliegend und gleichmäßig über die ganze Länge belastet, sodaß auf die Längeneinheit p Kilogramm kommen. Der Körper liege horizontal, habe Rechtecke zu Querschnitten, von denen das mittlere die Abmessungen b und h haben mag.

Es ist die Form des Körpers zu bestimmen, wenn derselbe in allen Querschnitten dem Zerbrechen gleichen Widerstand entgegensetzt.

Für den Querschnitt in der Mitte haben wir:

$$p\, l\, \frac{l}{8} = \tfrac{1}{6}\, k\, b\, h^2,$$

für einen Querschnitt mit den Abmessungen x und y in der Entfernung z von dem einen Ende haben wir dagegen:

$$\tfrac{1}{2}\, p\, l\, z - p\, z\, \frac{z}{2} = \tfrac{1}{6}\, k\, x\, y^2.$$

Wir erhalten hieraus als Gleichung des Körpers:

$$8 \,.\, \tfrac{1}{6}\, k\, \frac{b\, h^2}{l^2} = 2 \,.\, \tfrac{1}{6}\, k\, \frac{x\, y^2}{z\, l - z^2}$$

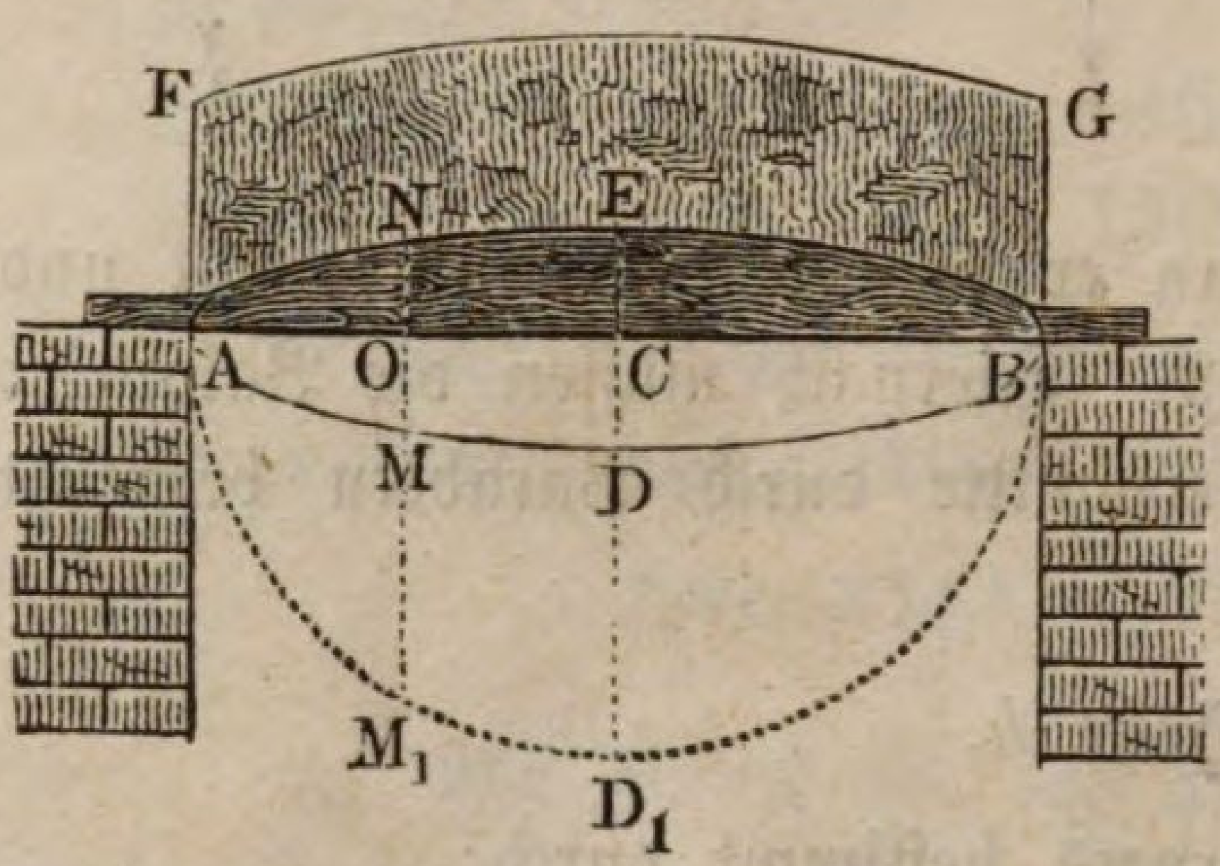
$$4\, \frac{b\, h^2}{l^2} = \frac{x\, y^2}{z\, l - z^2}.$$

a) Der Körper habe überall gleiche Breite b, so erhalten wir:

$$\frac{4\, h^2}{l^2}\, (l\, z - z^2) = y^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, wodurch die Form des Körpers $A\,B$ (Fig. 362) bestimmt ist.

Fig. 362.



b) Der Körper habe überall gleiche Höhe h, so entsteht:

$$\frac{4\, b}{l^2}\, (l\, z - z^2) = x.$$

Um die Form des Körpers im Grundriß erkennen zu können, setzen wir $z = \frac{l}{2} - z_1$, verlegen also den Coordinaten-Anfangspunkt in die Mitte der die Auflagepunkte verbindenden Linie, so entsteht:

$$\frac{4\, b}{l^2} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - z_1{}^2 \right] = x$$

$$b\, z_1{}^2 = \frac{b\, l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\, x.$$

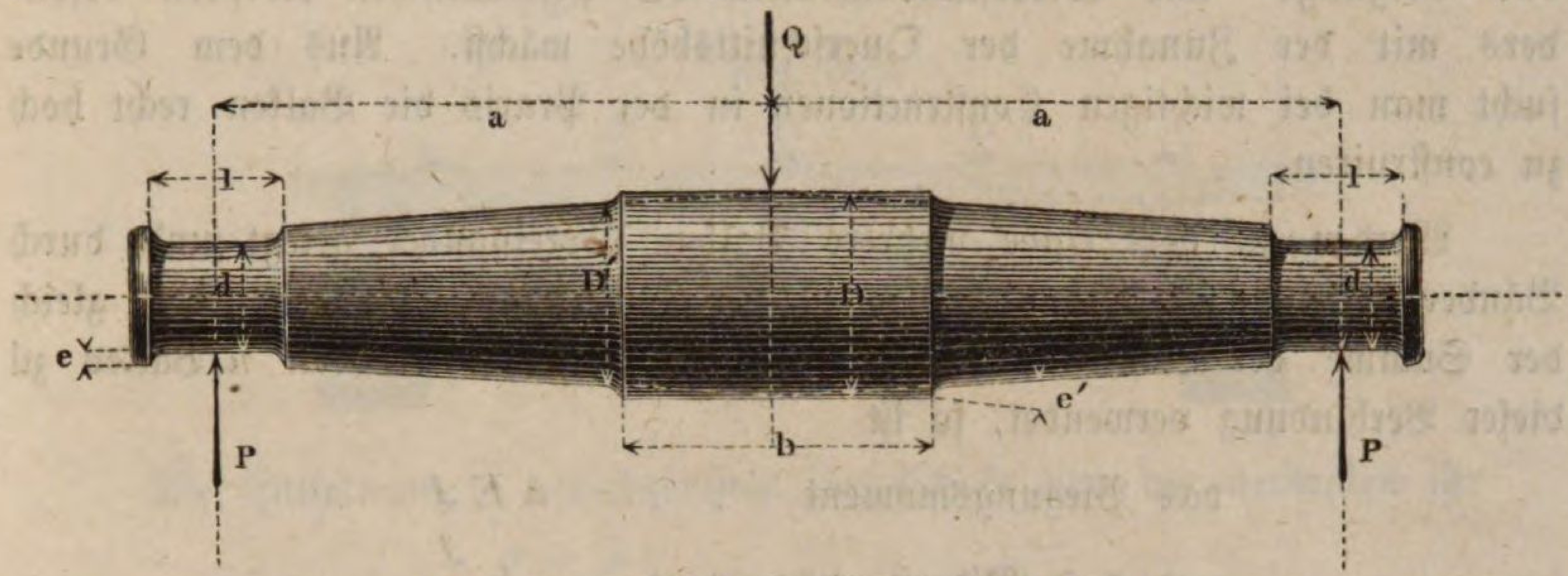
Weiter setzen wir $x = b - x_1$, verlegen also den Coordinaten-Anfangspunkt in den Endpunkt der Breite b des mittleren Querschnittes, so entsteht:

$$z^2 = \frac{l^2}{4\, b}\, x.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Endpunkte der veränderlichen Breite in einer Parabel liegen, die im Endpunkte der mittleren Breite b ihren Scheitel hat. Der Grundriß des Körpers ist demnach eine Figur, die einem Rhombus ähnlich ist, dessen Seiten jedoch durch vier congruente Parabeln gebildet sind, von denen je zwei in den Endpunkten der mittleren Breite b mit ihren Scheiteln zusammenstoßen.

54. Die in der Figur 363 dargestellte gleichschenkelige Achse trägt in der Mitte die Last Q. Es sollen die zur Construction nothwendigen Dimensionen berechnet werden.

Fig. 363.



Es sei d der Zapfendurchmesser, l die Zapfenlänge, D der Durchmesser des Achsenkopfes (in der Mitte, wo die Last Q wirksam ist), b die Breite des Achsenkopfes und a die Schenkellänge der Achse.

Der auf die Mitten der Zapfen ausgeübte Druck P ist $= \frac{Q}{2}$, wodurch bei gehöriger Annahme von $\frac{l}{d}$ der Zapfendurchmesser nach Aufgabe 43 bestimmt ist. Die beiden Achsenschenkel sind nach Aufgabe 52 durch Parabeln zu begrenzen, sodaß es sich nur noch um den Durchmesser D in der Mitte der Achse handelt.

Es ist $P a = k \frac{\pi}{32} D^3$ und $\frac{1}{2} P l = k \frac{\pi}{32} d^3$. Die Division dieser beiden Gleichungen liefert $\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{a}{\frac{1}{2} l}}$, wodurch D bestimmt ist. Der einfachen Herstellung wegen läßt man nun die Durchmesser von der Mitte bis zum Zapfenanfange allmälig von D auf d abnehmen, giebt also den Achsenschenkeln die Form eines abgestumpften Kegels. Außerdem formt man die Achse in der Mitte, behufs bequemer Befestigung des darauf sitzenden Maschinentheils (Balancier) cylindrisch, wobei b um etwas größer als die Nabenlänge desselben genommen werden muß. Für gewöhnlich kann man $b = \frac{5}{4} D$ setzen.

Hat die Achse zwei Tragpunkte, so ist jedes Ende nach den eben angegebenen Regeln der gleichschenkeligen Achse, mit Rücksicht auf die dort stattfindende Belastung, zu construiren. Das zwischen den beiden Lastpunkten befindliche Stück der Achse, der S c h a f t, ist cylindrisch herzustellen, wenn die Achse in den beiden Angriffspunkten dieselbe Belastung zu tragen hat und die Tragpunkte von den Enden der Achse gleiche Entfernung haben (Eisenbahnwagen-Achsen). Im andern Falle ist dagegen der Schaft als Kegelstumpf zu construiren.

55. Aus dem Werthe des Trägheitsmomentes J sowie aus dem von $\frac{J}{e}$ ergiebt sich, wenn man den rechteckigen Querschnitt in Betracht zieht, daß das Biegungs- und Widerstandsmoment bei prismatischen Körpern besonders mit der Zunahme der Querschnittshöhe wächst. Aus dem Grunde sucht man bei wichtigen Constructionen in der Praxis die Balken recht hoch zu construiren.

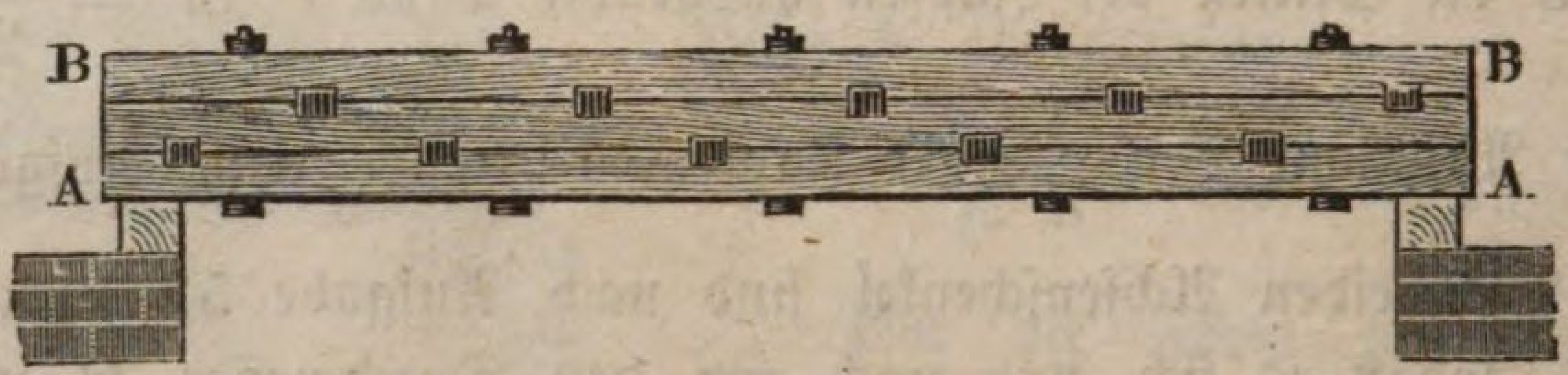
Werden zu dem Ende mehrere Balken übereinander gelegt und durch Bänder miteinander verbunden, so ist der Widerstand dieses Systems gleich der Summe der Widerstände der einzelnen Balken. Wurden n Balken zu dieser Verbindung verwendet, so ist

das Biegungsmoment . . $= n E J$

und das Widerstandsmoment $= n k \frac{J}{e}$.

Werden die Balken aufeinander gekämmt, verzahnt, mit Dübeln, Bolzen und Bändern verbunden (Fig. 364), so läßt sich das System als ein einfacher

Fig. 364.



Balken AB ansehen, dessen Dimensionen mit denen der Verbindung übereinstimmen. In diesem Falle erhalten wir für n aufeinander gekämmte Balken mit den Abmessungen b und h:

das Biegungsmoment $E \cdot \frac{1}{12} b (n h)^3$

das Widerstandsmoment $k \cdot \frac{1}{6} b (n h)^2$.

Man legt auch zwischen zwei Balken AB (Fig. 365) Keile C und verbindet dieselben durch Schrauben DE oder Bänder, oder man bringt nur in der Mitte der Balken Streben an, und die Enden hält man durch Bänder zusammen. Im letztern Falle nehmen die beiden Balken eine gekrümmte Gestalt an, und die ganze Construction heißt ein gesprengter Balken (Fig. 366).

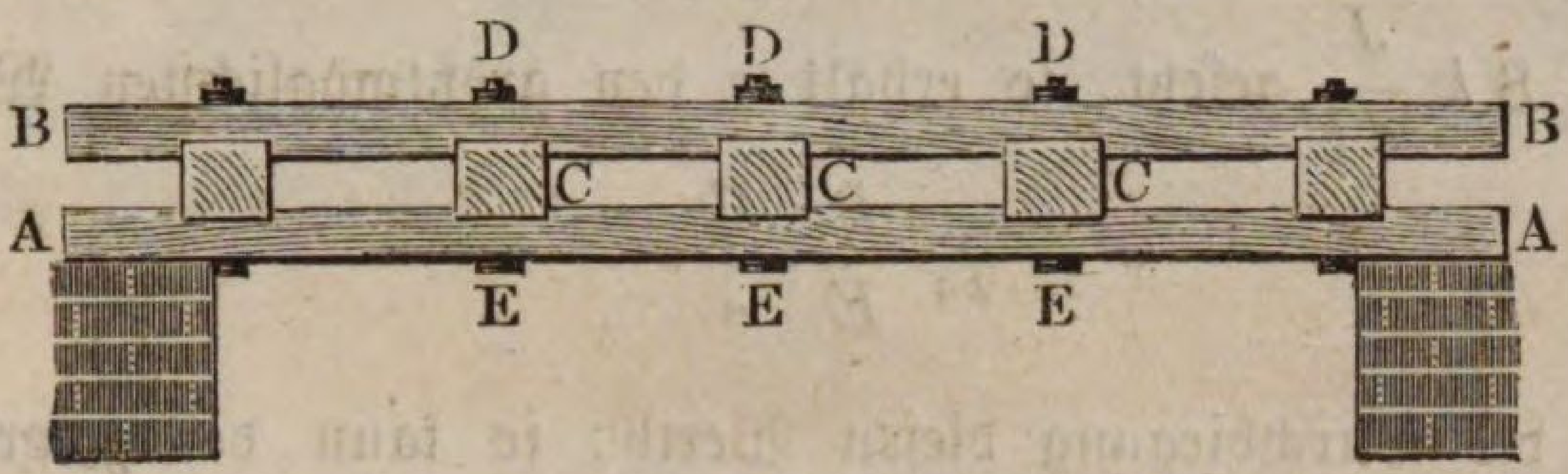
56. Die beiden Balken AB (Fig. 365) mögen in gleichen Abständen durch Bolzen DE befestigt sein, mit ihren Enden frei aufliegen und in der Mitte die Last zu tragen haben. Die Abmessungen eines jeden der beiden Balken seien b, h und l; die Entfernung der Mitten beider Hölzer sei a, der gleiche Zwischenraum also gleich $a - h$. Wären die beiden Balken unmittelbar aufeinander befestigt, so wäre die Tragkraft des zusammengesetzten Balkens:

$$P_1 = \tfrac{2}{3} k \frac{b (2h)^2}{l}.$$

Das Trägheitsmoment J für den Querschnitt der vorliegenden Construction findet sich in der Tabelle des §. 69:

$$J = \frac{1}{12} b \left[(a + h)^3 - (a - h)^3\right]$$
$$= \frac{1}{12} b \,.\, 2 h (3 a^2 + h^2).$$

Fig. 365.



Die Entfernung e der äußersten Faserschicht von der neutralen ist:

$$e = \frac{a + h}{2},$$

daher:

$$\frac{J}{e} = \frac{1}{6} b \,.\, 2 h \frac{3 a^2 + h^2}{a + h}.$$

Die Tragkraft P_2 des Balkens ist daher:

$$P_2 = \frac{2}{3} k \frac{b \,.\, 2 h}{l} \cdot \frac{3 a^2 + h^2}{a + h},$$

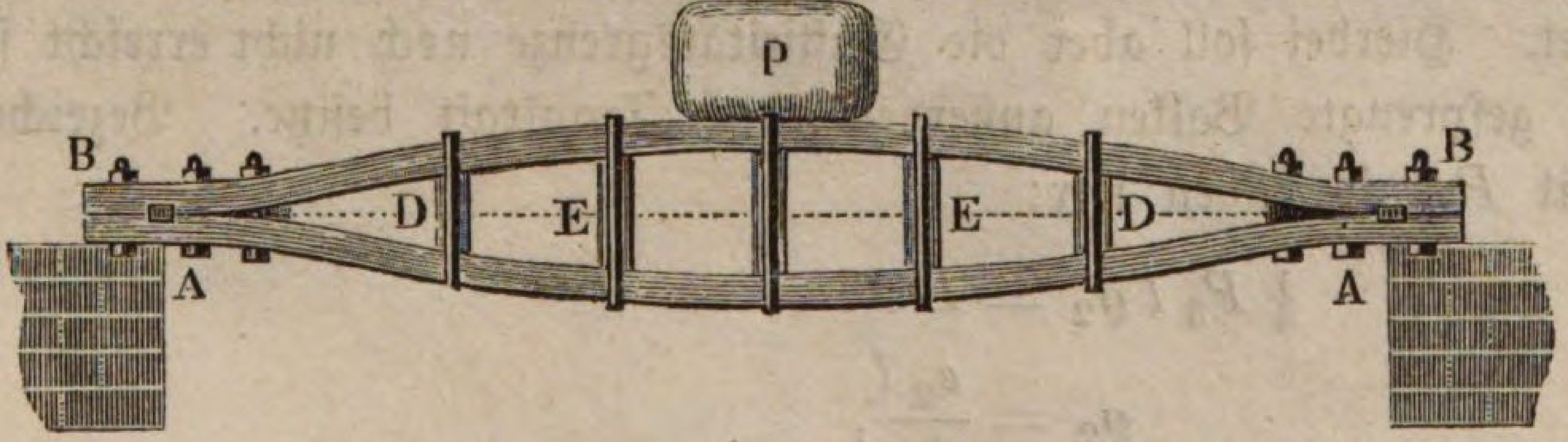
wofür wir, zur bessern Vergleichung mit P_1, schreiben wollen:

$$P_2 = \frac{2}{3} k \frac{b (2 h)^2}{l} \cdot \frac{3 a^2 + h^2}{(a + h) 2 h}.$$

Eine Vergleichung zwischen P_2 und P_1 zeigt, daß P_2 immer größer als P_1 ist, und daß P_2 mit der Zunahme von a wächst.

57. Es sei jetzt die Tragkraft P_3 des gesprengten Balkens AB (Fig. 366) zu bestimmen, wenn wir die Bezeichnungen der vorigen Nummer beibehalten, unter a aber die größte Entfernung der Mitten beider Balken verstehen.

Fig. 366.



Durch die gebogene Gestalt eines jeden der beiden Balken ist ein Theil der Tragkraft verloren gegangen, da die Festigkeit der äußersten Faserschichten schon durch die Biegung in Anspruch genommen ist. Wir sehen jeden der Balken als einen mit seinen Enden eingeklemmten an, und denken die Biegung

durch eine in der Mitte wirksame Kraft P' hervorgerufen. Die größte Durchbiegung s in der Mitte ist:

$$s = \frac{P' l^3}{192 E J}.$$

Wird hierin für P' die aus dem Widerstandsmomente entwickelte Belastung gleich $8 k \frac{J}{e l}$ gesetzt, so erhält s den größtmöglichsten Werth:

$$s = \tfrac{1}{24} \frac{k}{E} \cdot \frac{l^2}{e}.$$

Erreicht die Durchbiegung diesen Werth, so kann der gesprengte Balken nichts weiter tragen, seine Tragkraft P_3 ist daher Null. Um dies allgemein nachzuweisen und zugleich einen Ausdruck für die Tragkraft P_3 des Balkens zu erhalten, gehen wir von dem Werthe der Durchbiegung s aus:

$$s = \frac{P' l^3}{192 E J}$$

und bestimmen $P' l$ aus dem Spannungsmomente

$$\tfrac{1}{8} P' l \varrho_1 = E J,$$

$$\varrho_1 = \frac{e_1 l}{\delta_1},$$

unter δ_1 die stattfindende Dehnung resp. Verkürzung der äußersten Faserschicht und e_1 deren Entfernung von der neutralen verstanden. Für e_1, $\frac{h}{2}$ gesetzt, so entsteht:

$$P' l = \frac{\delta_1}{l} \cdot 16 \frac{E J}{h}.$$

Wir substituiren diesen Werth in dem Ausdrucke für s und entwickeln $\frac{\delta_1}{l}$:

$$\frac{\delta_1}{l} = 12 \frac{s h}{l^2},$$

worin δ_1 also die durch die Biegung der Balken hervorgerufene Ausdehnung bezeichnet. Hierbei soll aber die Elasticitätsgrenze noch nicht erreicht sein, sodaß der gesprengte Balken außerdem noch Tragkraft besitze. Bezeichnen wir diese mit P_3, so haben wir:

$$\tfrac{1}{4} P_3 l \varrho_2 = E J$$

$$\varrho_2 = \frac{e_2 l}{\delta_2},$$

unter δ_2 die durch P_3 hervorgerufene Dehnung in der äußersten Faserschicht verstanden, die von der neutralen um e_2 entfernt sein soll.

$$e_2 \text{ ist } = \frac{a + h}{2} \text{ und } J = \tfrac{1}{12} b \,.\, 2 h \, (3a^2 + h^2).$$

Substituiren wir diese Werthe und entwickeln $\frac{\delta_2}{l}$, so entsteht:

$$\frac{\delta_2}{l} = \frac{3}{2} \frac{P_3}{E} \frac{l}{b.2h} \frac{a+h}{3a^2+h^2}.$$

Die in der äußersten Faserschicht in Folge der Biegung und der Last P_3 stattfindende Dehnung ist hiernach $\delta_1 + \delta_2$. Schreiben wir hierfür δ, so ist n. F. 130 für eine Belastung bis zur Elasticitätsgrenze:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{(\sigma)}{E},$$

und für eine Belastung auf die Dauer:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{k}{E}$$

zu setzen.

Für die letztere Annahme erhalten wir hiernach:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{k}{E} = 12 \frac{sh}{l^2} + \frac{3}{2} \frac{P_3}{E} \frac{l}{b.2h} \frac{a+h}{3a^2+h^2},$$

und die Tragkraft:

$$P_3 = \frac{2}{3} k \frac{b(2h)^2}{l} \frac{kl^2 - 12shE}{kl^2} \frac{3a^2+h^2}{(a+h)2h}.$$

Aus diesem Ausdruck lernen wir, daß P_3 mit der Abnahme von s zunimmt und für $s = 0$ seinen größten Werth gleich P_2 erhält, daß also ein gesprengter Balken immer eine geringere Tragkraft besitzt, als wenn man die beiden Balken AA und BB in gleichen Abständen von einander befestigt. Die Tragkraft des gesprengten Balkens wird zu Null, wenn

$$kl^2 - 12shE = 0$$

ist, d. h.

$$s = \frac{1}{12} \frac{k}{E} \frac{l^2}{h},$$

oder für $\frac{h}{2}$, e gesetzt:

$$s = \frac{1}{24} \frac{k}{E} \frac{l^2}{e}.$$

Dieser Werth von s entspricht aber, wie wir oben gesehen haben, einer Durchbiegung bis zur Elasticitätsgrenze, sodaß P_3 Null werden mußte. Ist weiter in dem für die Tragkraft P_3 erhaltenen Ausdrucke $s = 0$ und $a = h$, so wird $P_3 = P_1$, die beiden Balken sind dann also unmittelbar aufeinander

befestigt. Soll hiernach der gesprengte Balken Nutzen gewähren, so muß, da $a > h$ ist,

$$P_3 > P_1, \text{ d. h.}$$

$$\frac{k\,l^2 - 12\,s\,h\,E}{k\,l^2}\;\frac{3\,a^2 + h^2}{(a + h)\,2\,h} > 1 \text{ sein.}$$

Hieraus erhalten wir, wenn statt s die Größe der Durchbiegung $\frac{a - h}{2}$ gesetzt wird:

$$\left(k\,l^2 - 12\,h\,E\frac{a - h}{2}\right)(3\,a^2 + h^2) > k\,l^2 . 2\,h\,(a + h)$$

$$k\,l^2\,(3\,a + h) > 6\,h\,E\,(3\,a^2 + h^2)$$

$$\frac{k}{6\,E}\,\frac{l^2}{h} > \frac{3\,a^2 + h^2}{3\,a + h}$$

$$\frac{k}{6\,E}\left(\frac{l}{h}\right)^2 > \frac{3\,a^2 + h^2}{(3\,a + h)\,h}.$$

Verstehen wir unter α eine Zahl größer als 1 und setzen statt a, $\alpha\,h$, so entsteht:

$$\frac{k}{6\,E}\left(\frac{l}{h}\right)^2 > \frac{3\alpha^2 + 1}{3\,\alpha + 1}$$

und

$$\frac{l}{h} > \sqrt{\frac{6\,E}{k}} . \sqrt{\frac{3\alpha^2 + 1}{3\,\alpha + 1}}.$$

Für bestimmte Werthe von α läßt sich hiernach bei bestimmten Materialien leicht das für die Sprengung nothwendige Verhältniß $\frac{l}{h}$ berechnen.

Benutzen wir diese Substitutionen bei der Bestimmung der Tragkraft P_3, so erhalten wir:

$$P_3 = \tfrac{2}{3}\,k\,\frac{b\,(2\,h)^2}{l}\left[1 - \frac{6\,E}{k}\left(\frac{h}{l}\right)^2(\alpha - 1)\right]\frac{3\,\alpha^2 + 1}{2\,(\alpha + 1)}$$

oder:

$$P_3 = \left[1 - \frac{6\,E}{k}\left(\frac{h}{l}\right)^2(\alpha - 1)\right]\frac{3\,\alpha^2 + 1}{2\,(\alpha + 1)}\,P_1.$$

58. Ein Balken, der mit seinen Enden frei aufliegt, sei durch Aufeinandernieten zweier Eisenbahnschienen gebildet, die den in Aufgabe 37 angegebenen Querschnitt haben. Welche Entfernung l können die Unterstützungspunkte erhalten, wenn die in der Mitte wirksame Last P 5000 Kilogr. beträgt?

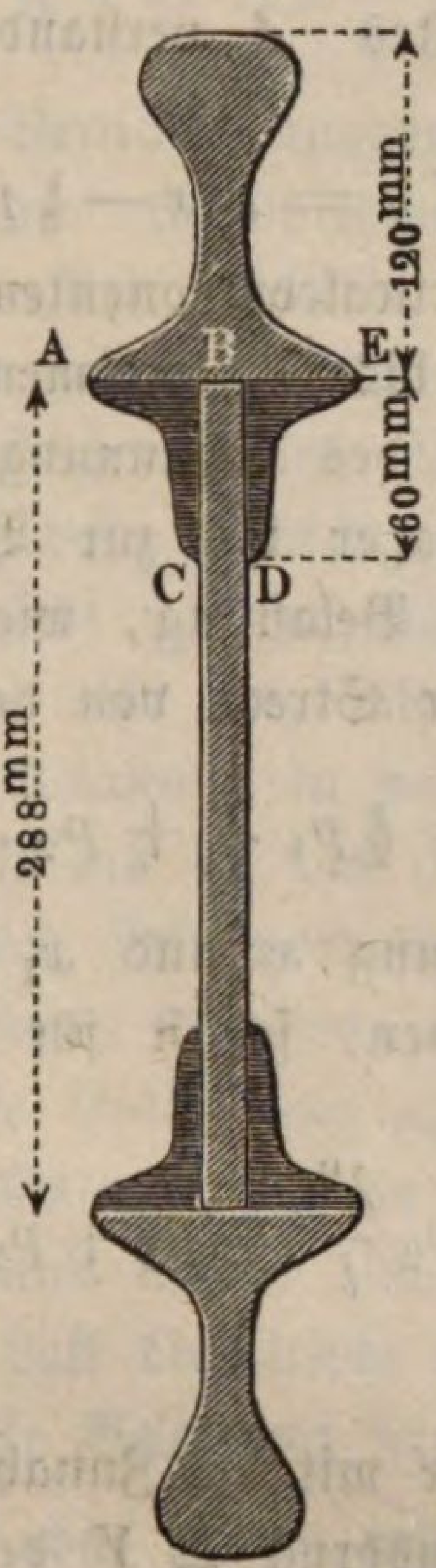
$$l = 4\,\frac{k}{P}\,\frac{J}{e}.$$

Es ist das Trägheitsmoment einer Schiene auf ihre neutrale Achse bezogen gleich 774,4, daher für die Schienenbasis $774{,}4 + 6^2 . 42 = 2286{,}4$. Das Trägheitsmoment für die vorliegende Verbindung ist demnach:

$$J = 2 . 2286{,}4 = 4572{,}8 \text{ und}$$

$$\frac{J}{e} = \frac{4572{,}8}{12} = 381.$$

Fig. 367.



Wir setzen $k = 600$ Kilogramm, dann ist:

$$l = \frac{4 . 600}{5000} . 381 = 183^{cm} = 1{,}83^m.$$

59. Drei Träger von nebenstehendem Querschnitte (Fig. 367) bilden die Unterlage einer Eisenbahnüberbrückung. Es ist die Länge l derselben, d. h. die Entfernung ihrer Unterstützungspunkte zu bestimmen. Die gleichmäßige Belastung für den laufenden Meter sei 1600 Kilogr. Das Trägheitsmoment des Querschnitts ist nach Anleitung der Aufgaben 37 und 58 zu bestimmen.

Die Basis AE des Schienenprofils ist 93^{mm}, die Stärke der Winkeleisen ABC nehme man zu 6^{mm} und die Stärke CD der senkrecht stehenden Blechwand sei 6^{mm}.

Es ist

$$J = 2 \left\{ 774{,}4 + 42 . 20{,}4^2 + \tfrac{1}{3} . 9{,}3 . 14{,}4^3 - \tfrac{1}{3} . 7{,}5 . 13{,}8^3 - \tfrac{1}{3} . 1{,}2 . 8{,}4^3 \right\}$$

$$= 41405{,}2; \quad \frac{J}{e} = \frac{41405{,}2}{26{,}4} = 1568{,}4.$$

Die gleichmäßige Belastung ist für jeden Träger $\frac{16}{3} . l$, die Länge l in Centimetern genommen. Die zur Berechnung von l zu benutzende Gleichung ist aber:

$$\tfrac{1}{8} \cdot G\, l = k \frac{J}{e}, \text{ also für } k = 600 \text{ Kilogr.}, \ \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{16}{3}\, l^2 \cdot = 600 . 1568{,}4 \text{ und}$$

$$l = 1188^{cm} = 11{,}88^m.$$

60. Balken von der in der vorigen Aufgabe angegebenen Construction, die aus vollen Blechwänden bestehen, erfordern noch eine Untersuchung in Bezug auf den Widerstand gegen Abscheeren.

Zu dem Ende sei ein mit beiden Enden A und B frei aufliegender Brückenbalken von l^m Länge gegeben, der pro Meter eine gleichmäßige

Belastung von p Kilogrammen zu tragen hat. Es ist aber $p = p_1 + p_2$ zu setzen, wobei sich p_1 auf das eigene Gewicht und p_2 auf die zufällige Belastung bezieht. Wir nehmen die Horizontale AB als X-Achse, die Verticale in A als Y-Achse, wählen also A als Coordinaten-Anfangspunkt, dann sind für einen beliebigen Querschnitt des Balkens in der Entfernung x von A, bei voller Belastung desselben, die inneren Kräfte bestimmt durch:

1) die Summe der Horizontalcomponenten $\Sigma X = 0$
2) die Summe der Verticalcomponenten $\Sigma Y = A - p\,x$,
   unter A die Reaction des Auflagerpunktes A verstanden, welche bei voller Belastung gleich $\frac{1}{2} p\, l$ ist,
3) das Spannungsmoment $Q\, q = \Sigma X y = A\, x - \frac{1}{2} p\, x^2$.

Aus der zweiten Gleichung folgt, daß die Verticalcomponenten von dem Auflager ab bis zur Mitte des Balkens von $\frac{1}{2} p\, l$ bis 0 abnehmen, und die dritte Gleichung zeigt andererseits das Wachsthum des Spannungsmomentes von 0 bis $\frac{1}{8} p\, l^2$ für die Querschnitte vom Auflager bis zur Balkenmitte. Dieses Verhältniß ändert sich jedoch bei theilweiser Belastung, wie aus dem Folgenden zu ersehen. Es sei die Brücke auf einer Strecke von der Länge λ mit der vollen Belastung versehen, dann ist $A = \frac{1}{2} p_1 \cdot l + p_2 \cdot \lambda \frac{l - \frac{1}{2}\lambda}{l}$.

Untersuchen wir zwei Querschnitte in der Entfernung x und x_1 von dem Punkte A, wobei wir $x < \lambda$ und $x_1 > \lambda$ annehmen, so ist für den ersten Querschnitt:

$$\Sigma Y = A - p\,x = \tfrac{1}{2} p_1\, l + p_2\, \lambda - \tfrac{1}{2} p_2 \frac{\lambda^2}{l} - (p_1 + p_2)\, x$$

$$Q\, q = A\, x - \tfrac{1}{2} p\, x^2.$$

Da x jederzeit kleiner als λ sein soll, A aber mit der Zunahme von λ immer größer und größer wird, so ist in dem Ausdruck ΣY der Verticalcomponent A jederzeit größer als $p\,x$ und es erhält ΣY seinen kleinsten Werth für $x = \lambda$, d. h. der betreffende Querschnitt hat die geringste Verticalspannung auszuhalten, wenn die von A nach B sich bewegende Last denselben erreicht. Der Querschnitt in der Entfernung x_0 von A, für den die Verticalcomponenten ΣY zu Null werden, bestimmt sich demnach bei bewegender Last durch die Gleichung:

$$\Sigma Y = \tfrac{1}{2} p_1\, l + p_2\, x_0 - \tfrac{1}{2} p_2 \frac{x_0^2}{l} - (p_1 + p_2)\, x_0 = 0$$

$$\tfrac{1}{2} p_1\, l - \frac{p_2}{2\,l} x_0^2 - p_1\, x_0 = 0$$

$$x_0^2 + 2\, l \frac{p_1}{p_2} x_0 - \frac{p_1}{p_2} l^2 = 0$$

$$x_0 = \left[-\frac{p_1}{p_2} + \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 + \frac{p_1}{p_2}} \right] l,$$

d. h. der betreffende Querschnitt liegt nicht in der Mitte des Balkens wie bei

voller Belastung, sondern derselbe rückt der bewegenden Last von der Mitte aus gleichsam entgegen. Was das Spannungsmoment $Q\,q$ dagegen anbetrifft, so ist dasselbe für einen beliebigen Querschnitt um so größer, je größer A ist, hat also bei voller Belastung jederzeit seinen Maximalwerth. Ziehen wir jetzt den Querschnitt in der Entfernung x_1 von A in Betracht, so ist:

$$\Sigma\,Y = A - p_2\,\lambda - p_1\,x_1 = \tfrac{1}{2}\,p_1\,l - p_2\,\frac{\lambda^2}{2\,l} - p_1\,x_1$$

$$Q\,q = A\,x - p_2\,\lambda\left(x_1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\,p_1\,x_1^2.$$

Die Verticalcomponente ändert sich für denselben Querschnitt mit der Größe λ und erreicht ihren negativ größten Werth, wenn λ, das angenommenermaßen kleiner als x_1 sein soll, selbst zu x_1 wird, d. h. der betreffende Querschnitt hat die größte Verticalspannung auszuhalten, wenn die von A nach B sich bewegende Last denselben erreicht. Bezeichnen wir wieder die Entfernung des Querschnitts von A aus, für den $\Sigma\,Y$ zu Null wird, mit x_0, so ergiebt sich zur Bestimmung dieser Entfernung dieselbe Gleichung wie oben, d. h. also der, mit der Verticalcomponente Null behaftete Querschnitt, bei voller Belastung in der Mitte gelegen, rückt der von A aus sich bewegenden Last bis in die Entfernung x_0 von A entgegen, geht von da in Richtung der Last vorwärts und erreicht die Mitte, sobald der Balken die volle Belastung erhalten, geht nach der Seite B hin aus der Mitte heraus, bis auf die Entfernung x_0 von B ab gerechnet, wenn die bewegliche Last mit ihrem Ende in den zu der Entfernung x_0 gehörigen Querschnitt gekommen, zieht sich dann wieder nach der Mitte zurück und erreicht dieselbe, sobald die bewegliche Last die Brücke verlassen. Das Spannungsmoment $Q\,q$ hat wieder für die volle Belastung seinen größten Werth.

Durch das Herausrücken des mittleren Querschnitts aus der Mitte nach rechts und links um die Entfernung $\frac{l}{2} - x_0$, müssen bei den Gitterträgern sämmtliche innerhalb dieser beiden Entfernungen gelegene Querschnitte constructiv als mittlere behandelt werden, und demgemäß von den betreffenden Knotenpunkten aus zwei entgegengesetzt geneigte Diagonalstäbe nach entgegengesetzten Seiten auslaufen, wodurch sich die in den mittleren Feldern der Gitterträger entstehenden Kreuzungen der Gitterstäbe als nothwendig ergeben.

Gehen wir jetzt zur Untersuchung der ersten aufgestellten Gleichung über $\Sigma\,X = 0$, so ist zu bemerken, daß die Summe der Horizontalcomponenten sich aus der Summe S der Spannungen oberhalb der neutralen Achse, und der Summe D der Pressungen unterhalb derselben zusammensetzt (§. 69). Trotzdem, daß sich diese Kräfte S und D durch den ganzen Querschnitt hindurch vernichten, so werden sie doch in den einzelnen Punkten desselben auf Abscheeren wirksam sein und man wird sie deshalb bei verhältnißmäßig dünnen Körpern, den Blechwandträgern, berücksichtigen müssen. Bei Benutzung der in §. 69 in Anwendung gebrachten Bezeichnungen, war die Summe S

aller Spannkräfte von der neutralen Achse bis zur äußersten Faserschicht für einen Querschnitt in der Entfernung x von dem Unterstützungspunkte A:

$$S = \sum_0^e X = \frac{E}{\varrho} \sum_0^e f_1 \eta.$$

In gleicher Weise ist die Summe dieser Spannungen für denselben Querschnitt in der Entfernung $e - \eta$ von der neutralen Faserschicht:

$$\sum_\eta^e X = \frac{E}{\varrho} \sum_\eta^e f_1 \eta.$$

Für einen zweiten Querschnitt in der Entfernung x_1 von A ist die Summe der Spannungen in der Entfernung $e - \eta$ ebenso:

$$\sum_\eta^e X_1 = \frac{E}{\varrho_1} \sum_\eta^e f_1 \eta.$$

Die innerhalb der Strecke $x - x_1$ wirksame Kraft, welche das Abscheeren hervorzurufen sucht, ist demnach:

$$\sum_\eta^e X - \sum_\eta^e X_1 = \sum_\eta^e f_1 \eta \left(\frac{E}{\varrho} - \frac{E}{\varrho_1}\right)$$

und daraus erhält man die in der Längeneinheit $x - x_1$ wirksame, auf die Dicke δ des Balkens sich vertheilende Schubkraft $\mathfrak{S}_\eta$, durch die Division mit $x - x_1$:

$$\mathfrak{S}_\eta = \frac{\sum_\eta^e X - \sum_\eta^e X_1}{x - x_1} = \sum_\eta^e f_1 \eta \frac{\frac{E}{\varrho} - \frac{E}{\varrho_1}}{x - x_1}.$$

Ersetzen wir nach Formel 143, $\frac{E}{\varrho}$ durch $\frac{Q\,q}{J}$, so erhalten wir die betreffende Schubkraft:

$$\mathfrak{S}_\eta = \frac{1}{J} \sum_\eta^e f_1 \eta \frac{Q\,q - Q_1\,q_1}{x - x_1}$$

und mit Benutzung der, in Formel 3 dieser Aufgabe, aufgestellten Werthe von $Q\,q$:

$$\mathfrak{S}_\eta = \frac{1}{J} \sum_\eta^e f_1 \eta \frac{A\,(x - x_1) - \frac{1}{2} p\,(x^2 - x_1^2)}{x - x_1}$$

$$\mathfrak{S}_\eta = \frac{1}{J} \sum_\eta^e f_1 \eta \left(A - \tfrac{1}{2} p\,[x + x_1]\right).$$

Um die Aenderung derselben von Querschnitt zu Querschnitt erkennen zu können, müssen wir $x = x_1$ setzen und haben dann mit Rücksicht auf die Summe der Verticalcomponenten:

$$\mathfrak{S}_\eta = \frac{A - p\,x}{J} \sum_\eta^e f_1 \eta = \frac{\Sigma Y}{J} \sum_\eta^e f_1 \eta.$$

Hieraus ergiebt sich, daß diese Schubkraft für die neutrale Faserschicht ihren größten Werth annimmt, so daß wir auch die auftretende $\mathfrak{S}_0$ nur allein in Betracht zu ziehen haben:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\Sigma Y}{J} \sum_0^e f_1 \eta.$$

Dividiren wir diesen Ausdruck durch die Dicke δ des Balkens, so erhalten wir die pro Quadrateinheit in der neutralen Achse der verschiedenen Querschnitte auftretende Schubkraft, die Schubspannung $\tau = \frac{\mathfrak{S}_0}{\delta}$, welche den größten zulässigen Werth t höchstens erreichen darf.

Es ist hiernach:

$$\text{a)}\ t = \frac{\Sigma Y}{J\delta} \sum_0^e f_1 \eta,$$

aus welcher Gleichung sich δ berechnen läßt, wenn wir für t entsprechende Annahmen machen. Für gewöhnlich ist $t = 0{,}6\,k$, unter k den kleineren der beiden Werthe k' und k'' des betreffenden Materials verstanden, $\sum_0^e f_1 \eta$ bedeutet das statische Moment des Querschnitts von der neutralen Achse bis zu einer der äußersten Fasern, bei symmetrischen Querschnitten also die Hälfte des statischen Momentes vom ganzen Querschnitt, J ist das Trägheitsmoment desselben und ΣY die zu dem zu untersuchenden Querschnitt gehörige Verticalcomponente.

Bezeichnen wir die Entfernung der Angriffspunkte von S und D in dem Querschnitte mit $\mathfrak{H}$, so ist $Q q = S \mathfrak{H}$. Ersetzen wir $Q q$ durch $\frac{E J}{\varrho}$ und S durch $\frac{E}{\varrho} \sum_0^e f_1 \eta$, so erhält man $\mathfrak{H} = \frac{J}{\sum_0^e f_1 \eta}$, und der Sicherheitsmodul t gegen Abscheeren wird bei Benutzung dieser Relation:

$$\text{b)}\ t = \frac{\Sigma Y}{\mathfrak{H}\,\delta}.$$

In dem Beispiele der vorigen Aufgabe ist der Maximalwerth von ΣY an den Auflagerpunkten gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1600 \cdot 11{,}88 = 3168$ Kilogr. Für den vorgelegten Querschnitt ist

$$\mathfrak{H} = 2\,\frac{42.20{,}4 + 9{,}3.14{,}4.7{,}2 - 7{,}5.13{,}8.6{,}9 - 1{,}2.8{,}4.4{,}2}{42 + 9{,}3 \cdot 14{,}4 - 7{,}5 \cdot 13{,}8 - 1{,}2 \cdot 8{,}4} = 34,$$

den Querschnitt der Eisenbahnschiene zu $42\,\square^{cm}$ nach Aufgabe 58 genommen, und δ ist $= 0{,}6^{cm}$, so daß nach Gleichung b) der Sicherheitsmodul t folgenden Werth erhält:

$$t = \frac{3168}{34.0{,}6} = 155 \text{ Kilogr. circa.}$$

Da wir mit t bis auf $0{,}6\,k = 0{,}6 \cdot 600 = 360$ Kilogr. heraufgehen können, so ist keine Gefahr gegen Abscheeren vorhanden und die Blechstärke von $0{,}6^{cm}$ vollkommen ausreichend.

61. Ein Balken aus Tannenholz von 4^m Länge und quadratischem Querschnitt ist mit beiden Enden in horizontaler Lage eingemauert und soll

eine gleichmäßig vertheilte Last von 7500 Kilogr. tragen. Wie groß ist die Seite a des Querschnitts?

$$\tfrac{1}{12}\, G\, l = k \frac{J}{e};\ k = 73 \text{ Kilogr.};\ \frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\, a^3$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{7500 \,.\, 400 \,.\, 6}{12 \,.\, 73}} = 27{,}4^{cm}.$$

62. Ein Kornboden ruht auf Balken aus Eichenholz von 6^m Länge, 25^{cm} Breite und 31^{cm} Höhe. Die Mitten je zweier Balken sind 1^m voneinander entfernt. Es ist die Höhe einer gleichmäßig vertheilten Kornaufschüttung zu berechnen, welche die Balken zu tragen vermögen, wenn 1 Kubikmeter Kornmasse 800 Kilogr. wiegt.

$$\tfrac{1}{12}\, G\, l = k \frac{J}{e};\ k = 60 \text{ Kilogr.};\ \frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\, 25 \,.\, 31^2$$

$G = 6 \,.\, 1 \,.\, x \,.\, 800$, unter x die Höhe der Aufschüttung in Metern verstanden

$$x = \frac{60 \,.\, 25 \,.\, 31^2 \,.\, 12}{6 \,.\, 6 \,.\, 1 \,.\, 800 \,.\, 600} = 1^m.$$

63. Ein hohler Balken aus Gußeisen ist in horizontaler Lage mit beiden Enden eingemauert, hat eine Länge von 20^m und einen rechteckigen Querschnitt von 31^{cm} äußerer Breite, 50^{cm} äußerer Höhe. Wie groß ist die gleichmäßige Stärke des Balkens zu machen, wenn derselbe in der Mitte eine Last von 20000 Kilogr. zu tragen hat?

$$\tfrac{1}{8}\, P l = k \frac{J}{e};\ k = k' = 440 \text{ Kilogr.};\ \frac{J}{e} = \tfrac{1}{6}\, \frac{31 . 50^3 - (31 - 2x)(50 - 2x)^3}{50}$$

$$\frac{31 \,.\, 50^2}{6} \,.\, 440 - \frac{20000 \,.\, 2000}{8} = \frac{(31 - 2x)\,(50 - 2x)^3}{6 \,.\, 50} \,.\, 440 \text{ oder}$$

$$31 \,.\, 50^3 - \frac{20000 \,.\, 2000 \,.\, 6 \,.\, 50}{8 \,.\, 440} = (31 - 2x)\,(50 - 2x)^3 = 465000,$$

aus welcher Gleichung sich durch Probiren $x = 8{,}7^{cm}$ ergiebt.

64. In welcher Entfernung l sind die Querschwellen für die Schienen einer Eisenbahn anzuordnen?

Die Entfernung ist so gering, daß sich nur immer ein Rad eines Eisenbahnwagens zwischen den Unterstützungspunkten befinden wird. Gewicht einer Locomotive 28000 Kilogr., von dem die Hälfte dem Gewicht auf die Triebachse entspricht. Demnach ist der Druck P auf eins der Triebräder $\frac{28000}{4} = 7000$ Kilogr. Die Schienen sind auf den Querschwellen mit Nägeln befestigt, so daß jedes Schienenstück als ein mit seinen beiden Enden eingeklemmter Balken angesehen werden muß. Zur Berechnung seiner Länge l dient daher die Gleichung:

$$\tfrac{1}{8}\, P\, l = k \frac{J}{e};\ \frac{J}{e} = 129 \text{ nach Aufgabe 37};\ k = 600 \text{ Kilogr.; daher}$$

$$l = \frac{8 \,.\, 600 \,.\, 129}{7000} = 88{,}5^{cm}.$$

65. Eine schmiedeeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitte sei auf eine Länge von $2{,}6^m$ auf Torsion in Anspruch genommen. Die Torsionskraft sei 2000 Kilogramm an einem Hebelarme von 50^{cm} wirksam.

Welchen Durchmesser erhält die Welle, wenn der Druck einen viermal so großen Werth erreichen kann? Welches ist der größte Verdrehungswinkel? Welchen Durchmesser erhält die Welle bei einer Verdrehung von $0{,}4^0$?

Es ist: $$(Vv) = t\frac{J_p}{e};\ (Vv) = 4 . 2000 . 50;$$

$$t = 0{,}8\,k = 0{,}8 . 600 = 480 \text{ Kilogr.};\ \frac{J_p}{e} = \frac{\pi}{16}d^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{4 . 2000 . 50 . 16}{480\,\pi}} = 16{,}2^{cm}.$$

Weiter ist:

$$(Vv) = \alpha\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{l}CJ_p;\ J_p = \frac{\pi}{32}d^4;\ C = 0{,}4\,E = 800\,000;$$

$$\alpha = \frac{4 . 2000 . 50 . 180 . 260 . 32}{\pi . 800\,000 . \pi . 16{,}2^4} = 1{,}1.$$

Für eine zulässige Verdrehung von $0{,}4^0$ ist endlich:

$$4 . 2000 . 50 = \frac{0{,}4 . \pi . 800\,000}{180 . 260}\cdot\frac{\pi}{32}.d^4$$

$$d = 20{,}9^{cm}.$$

66. Die gußeiserne stehende Welle einer Turbine, von quadratischem Querschnitte und einer Länge von 3^m, hat im Umfange eines darauf befindlichen Zahnrades von 31^{cm} Halbmesser einen Druck von 1500 Kilogr. auszuhalten.

Wie groß ist die Seite a des Querschnitts, wenn auf sechsfache Sicherheit gerechnet wird? Welche Größe erreicht der Verdrehungswinkel bei dem normalen Druck?

Es ist: $$6 . 1500 . 31 = 480\frac{a^3}{6}\sqrt{2}$$

$$a = 13{,}5^{cm}$$

$$1500 . 31 = \alpha\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{300}\cdot 800\,000\,\frac{13{,}5^4}{6}$$

$$\alpha = 0{,}56.$$

67. Es ist der Durchmesser des cylindrischen Zapfens einer Kurbelwelle aus Schmiedeeisen zu bestimmen, an welcher zwei Arbeiter, jeder mit 15 Kilogr. wirksam sind. Die Länge der Kurbel ist 42^{cm}.

$$30 . 42 = 480\cdot\frac{1}{16}\pi d^3, \text{ daher } d = 2{,}4^{cm}.$$

68. Auf einer horizontalen schmiedeeisernen Transmissionswelle sitzen drei Räder A, B, C, von denen A das treibende Rad ist, B und C dagegen als getriebene Räder 14 und 18 Pferdestärken zu übertragen haben.

Welche Durchmesser d und d_1 erhalten die Wellstücke AB und BC, wenn in der Minute 90 Umdrehungen von der Transmissionswelle gemacht werden?

a) Für das Stück AB, das die Gesammtarbeit gleich 32 Pferdestärken übertragen muß, ist $(Vv) = 71620 \frac{32}{90}$, daher

$$\frac{71620 \cdot 32}{90} = t \frac{\pi}{16} d^3, \text{ und für } t = 230 \text{ Kilogr.}$$

$$d = 8{,}3^{cm}.$$

b) Für das Stück BC, das nur 18 Pferdestärken fortzuleiten hat, ist

$$(Vv) = 71620 \cdot \tfrac{18}{90} = t \frac{\pi}{16} d_1{}^3$$

$$d_1 = 6{,}8^{cm}.$$

69. Aus den Formeln für das Torsionswiderstandsmoment $(Vv) = t \frac{J_p}{e}$, für das statische Moment $PR = 71620 \frac{N}{u}$ wollen wir allgemeine Formeln für die Durchmesser von Wellen ableiten, wobei wir jedoch Vv durch PR ersetzen wollen, da die zu übertragenden Kräfte P jederzeit in dem Umfange eines Zahnrades oder einer Riemscheibe, also an einem Arme gleich R wirken.

I. Der Querschnitt der Welle sei ein Kreis vom Durchmesser d:

$$t \frac{\pi}{16} d^3 = PR = 71620 \frac{N}{u}.$$

1) Für Schmiedeeisen ist der größte Werth von $t = 731$ Kilogr.

a) Auf einfache Sicherheit für $t = 731$ Kilogr. werden die Wellen in der Praxis nur selten berechnet. Hierfür ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{PR}{140}} = \sqrt[3]{500 \frac{N}{u}}.$$

b) Auf zwei-, drei- und vierfache Sicherheit werden Wellen berechnet, die durch Menschen- oder Thierkräfte bewegt werden:

$$d = \sqrt[3]{\frac{PR}{70 \text{ bis } 35}} = \sqrt[3]{(1000 \text{ bis } 2000) \frac{N}{u}}.$$

Die Formeln finden zugleich für Wellen aus Gußstahl Verwendung.

c) Auf vier-, fünf- und sechsfache Sicherheit berechnet man die durch Elementarkräfte bewegten Wellen:

$$d = \sqrt[3]{\frac{PR}{35 \text{ bis } 24}} = \sqrt[3]{(2000 \text{ bis } 3000) \frac{N}{u}}.$$

d) Wellen, welche bedeutenden Stößen ausgesetzt sind, oder bei denen das Torsionsmoment vermöge bedeutender Schwungmassen sehr groß werden kann, werden auf sechs-, sieben- bis achtfache Sicherheit berechnet:

$$d = \sqrt[3]{\frac{PR}{24 \text{ bis } 18}} = \sqrt[3]{(3000 \text{ bis } 4000) \frac{N}{u}}.$$

2) Für Gußeisen ist der größte zulässige Werth von $t = 365$ Kilogr.

a) Auf einfache Sicherheit werden gußeiserne Wellen niemals, auf zwei- und dreifache dagegen selten berechnet. Hierfür ist also:

$$d = \sqrt[3]{\frac{PR}{35 \text{ bis } 23}} = \sqrt[3]{(2000 \text{ bis } 3000) \frac{N}{u}}.$$

b) Auf vier-, fünf- und sechsfache Sicherheit berechnet man Wellen, die durch Elementarkräfte bewegt werden:

$$d = \sqrt[3]{\frac{PR}{17 \text{ bis } 12}} = \sqrt[3]{(4000 \text{ bis } 6000) \frac{N}{u}}.$$

c) Wellen, welche bedeutende Stöße auszuhalten, oder große Torsionsmomente zu übertragen haben, werden auf sechs- bis achtfache Sicherheit berechnet:

$$d = \sqrt[3]{\frac{PR}{12 \text{ bis } 9}} = \sqrt[3]{(6000 \text{ bis } 8000) \frac{N}{u}}.$$

3) Für Holz nehme man t gleich $\frac{1}{10}$ des betreffenden Werthes für Schmiedeeisen. Bezeichnet d den Durchmesser einer schmiedeeisernen Welle, d_0 den Durchmesser des dem Polygon der gleich belasteten hölzernen Welle einbeschriebenen Kreises, so ist darnach:

$$t \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{t}{10} \frac{\pi}{16} d_0^3,$$

daher:

$$d_0^3 = 10\, d^3 \text{ oder}$$
$$d_0 = 2{,}15\, d.$$

II. Der Querschnitt der Welle sei ein Quadrat von der Seite a. Derartige Wellen werden nur aus Stahl oder Schmiedeeisen hergestellt. Wir bezeichnen wieder den Durchmesser der gleich belasteten cylindrischen Welle aus Stahl oder Schmiedeeisen mit d, so ist:

$$t \frac{\pi}{16} d^3 = t \frac{a^3}{6} \sqrt{2}, \text{ daher}$$
$$a = 0{,}94\, d.$$

III. Der Querschnitt der Welle sei ein Kreisring, von dem äußeren Durchmesser d_1 und dem inneren Durchmesser d_2. Derartige Wellen bestehen aus Gußeisen und denken wir deshalb den Durchmesser d der gleich belasteten massiven gußeisernen Welle zuerst berechnet, dann ist:

$$t \frac{\pi}{16} d^3 = t \frac{\pi}{16} d_1^3 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] \text{ und } d_1^3 = \frac{d^3}{1 - \psi^4},$$

worin $\psi = \frac{d_2}{d_1}$ das Aushöhlungsverhältniß heißt.

Für gewöhnlich ist $\psi = 0{,}6$ und demgemäß:

$$d_1 = 1{,}05\, d.$$

70. Leichte schmiedeeiserne Wellen, welche bei einer großen Anzahl von Umdrehungen pro Minute geringe Drucke zu übertragen haben, werden zweckmäßig mit Rücksicht auf die zulässige Verdrehung berechnet, und muß man deshalb von dem Torsions-Biegungsmoment ausgehen.

Es ist:

$$PR = 71620\frac{N}{u} = \frac{\alpha\pi}{180}\cdot\frac{1}{l}\cdot C\cdot\frac{\pi}{32}d^4 \text{ und hieraus}$$

$$d^4 = \frac{180\,.\,32}{\pi^2 C}\cdot\frac{l}{\alpha}\cdot PR = \frac{180.32.71620}{\pi^2 C}\cdot\frac{l}{\alpha}\cdot\frac{N}{u}.$$

Man erhält nach Redtenbacher brauchbare Abmessungen, unter der Voraussetzung $N < u$, wenn man den Quotienten:

$$\frac{180\,.\,32\,.\,71620}{\pi^2 C}\cdot\frac{l}{\alpha} = 20736 \text{ setzt.}$$

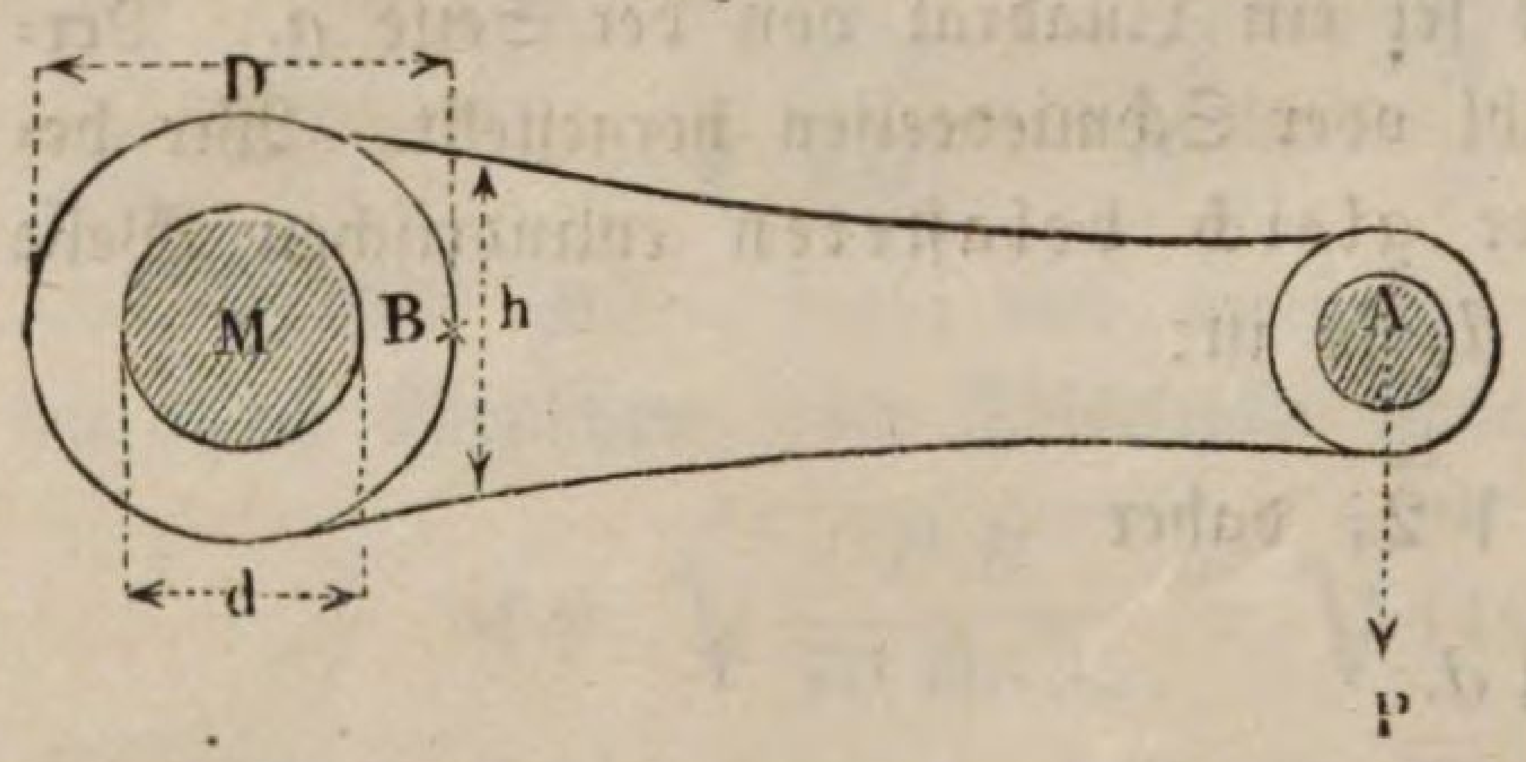
Bei Benutzung dieses Werthes und für $C = 800000$ Kilogramm ist $\frac{\alpha}{l} = \vartheta$ der specifischen Drehwinkel:

$$\frac{\alpha}{l} = \vartheta = \frac{1}{397}, \text{ d. h. für } l = 400^{cm} \text{ ist } \alpha = 1^0$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{11}{38}PR} = \sqrt[4]{20736\frac{N}{u}}.$$

71. Es sollen die Dimensionen der Arme bei Rädern, Riemscheiben, Kurbeln u. s. w. berechnet werden. In der Fig. 368 sei d der Durchmesser der Welle, h die Höhe der Arme, d. i. die Abmessung in Richtung des Druckes P, c die Dicke derselben, R die Länge der Arme, vom Mittelpunkte der Welle aus gemessen, und es mag sich der Druck auf z Arme vertheilen. Es kommt bei der Rechnung jederzeit der rechteckige Querschnitt in Betracht, indem man die in der Praxis Verwendung findenden Rippen unberücksichtigt läßt. Es ist, den Arm als einen mit seinem Ende eingeklemmten Balken ansehend:

Fig. 368.



$$\frac{PR}{z} = k\,\tfrac{1}{6}\,ch^2.$$

Da die Welle auf Torsion in Anspruch genommen, so ist weiter:

$$PR = \alpha d^3,$$

unter α einen der in der vorigen Aufgabe bestimmten Coefficienten verstanden. Setzen wir noch, wie es bei eisernen Armen gewöhnlich ist, $c = \frac{1}{5}h$, so ergiebt sich:

$$\alpha d^3 = \frac{k}{30}\cdot h^3\cdot z.$$

a) Es seien Welle und Arme aus demselben Material, dann ist bei vierfacher Sicherheit für Schmiedeeisen $\alpha = 35$, $k = 182$ Kilogr.; für Gußeisen $\alpha = 17$ und $k = 90$ Kilogr. In beiden Fällen ergiebt sich:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{6}{z}}.$$

b) Es sei die Welle aus Schmiedeeisen und die Arme bestehen aus Gußeisen, dann ist bei vierfacher Sicherheit $\alpha = 35$, $k = 90$ Kilogr., daher:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{12}{z}}.$$

c) Ist die Welle aus Holz und bestehen die Arme aus Gußeisen, so ist in dem letzten Ausdruck $d = \frac{d_0}{2,15}$ zu setzen, unter d_0 den Durchmesser des dem Polygon eingeschriebenen Kreises verstanden, daher:

$$\frac{h}{d_0} = \sqrt[3]{\frac{1,2}{z}}.$$

Für hölzerne Arme ist $c = h$, daher:

$$k \tfrac{1}{6} h^3 = \alpha\, d^3.$$

a) Bestehen Welle und Arme aus demselben Material, so ist $d = \frac{d_0}{2,15}$, $\alpha = 35$ und $k = 30$ Kilogr., daher:

$$\frac{h}{d_0} = \sqrt[3]{\frac{0,7}{z}}.$$

b) Ist die Welle aus Schmiedeeisen hergestellt, so ist bei derselben Sicherheit:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{7}{z}}.$$

c) Besteht die Welle aus Gußeisen, so ist $\alpha = 17$, $k = 30$ Kilogr., daher:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{8,5}{z}}.$$

72. Eine schmiedeeiserne Stange von 2^m Länge und rechteckigem Querschnitte, dessen Seitenverhältniß $1:4$ sein mag, steht mit ihrem unteren Ende frei auf und ist in Richtung der Achse mit 3000 Kilogr. belastet. Wie sind die Abmessungen des Querschnittes zu wählen?

Es wird die Stange auf Zerknicken in Anspruch genommen und wir haben, unter n eine, die nothwendige Sicherheit bestimmende Zahl verstanden, nach §. 72, II, 2:

$$n\, P = \pi^2 \frac{E\, J}{l^2}$$

$n = 10$; $E = 2\,000\,000$; $J = \frac{1}{12} b\, h^3$, unter h die kleinere der Abmessungen verstanden, und da $h : b = 1 : 4$ sein soll, so ist $J = \frac{1}{3} h^4$:

$$10 \, . \, 3000 = \frac{\pi^2 . 2\,000\,000}{200^2} \cdot \tfrac{1}{3} h^4$$

$$h = 3{,}7^{cm} \text{ und } b = 14{,}8^{cm}.$$

73. Welche Wandstärke erhalten die 26^{cm} im Durchmesser haltenden 5^m hohen gußeisernen Säulen, welche zum Tragen der Decken eines Fabrikgebäudes bestimmt sind. Der Abstand je zweier Säulen in der Längsrichtung des Gebäudes sei 4^m, nach der Tiefe dagegen $7{,}5^m$ und die Belastung betrage incl. des Gewichts der Säulen 3000 Kilogr. pro $\square^m$.

Es ist:

$$P = 4 \, . \, 7{,}5 \, . \, 3000 = 90\,000 \text{ Kilogr.}; \; E = 1\,000\,000;$$

$$J = \frac{\pi}{64} d_1^4 \left(1 - \left[\frac{d_2}{d_1}\right]^4\right) \text{ und n. §. 72, II, 3 } \; n\,P = (2\pi)^2 \frac{E\,J}{l^2},$$

worin wir $n = 20$ setzen, daher:

$$20 . 90\,000 = \frac{(2\pi)^2 . 1\,000\,000}{500^2} \frac{\pi}{64} \cdot 26^4 \, (1 - \psi^4)$$

$$\psi^4 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = 0{,}492 \text{ und } d_2 = 22^{cm},$$

daher die Wandstärke gleich 4^{cm}.

74. Wie verhalten sich die Tragkräfte P_1 und P_2 bei massiven und hohlen gußeisernen Säulen, bei Verwendung desselben Materials, also bei gleicher Länge und gleichem Querschnitt:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d^4}{d_1^4 - d_2^4} = \frac{d^2}{d_1^2 + d_2^2} = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2 + d_2^2} = \frac{1 - \psi^2}{1 + \psi^2}.$$

75. Es ist der Durchmesser einer schmiedeeisernen Kolbenstange von einer Locomotive zu bestimmen, die eine Länge von $1{,}6^m$ hat. Der Durchmesser des Dampfkolbens sei 36^{cm} und der Ueberdruck pro $\square^{cm}$ gleich 5 Kilogr.

$$\text{n. §. 72, II, 4 } \; n\,P = 2\pi^2 \frac{E\,J}{l^2}; \; n = 25; \; J = \frac{\pi}{64} d^4;$$

$$P = \frac{\pi}{4} \cdot 36^2 \cdot 5 = 5090 \text{ Kilogr.}$$

$$25 \, . \, 5090 = 2\,\pi^2 \frac{2\,000\,000 . \pi}{160^2 . 64} d^4.$$

$$d = 6{,}4^{cm}.$$

76. Es seien δ und λ Durchmesser und Länge der schmiedeeisernen Zapfen, die von den Köpfen einer Schubstange umfaßt werden, dagegen d und l Durchmesser und Länge der schmiedeeisernen Schubstange, wobei sich d auf den mittleren Querschnitt beziehen mag. Dann findet sich in folgender

Weise eine Beziehung zwischen dem bekannten Zapfendurchmesser δ und dem gesuchten Schubstangendurchmesser d.

$$P\frac{\lambda}{2} = k\frac{\pi}{32}\delta^3$$

$$n\,P = \pi^2\frac{E}{l^2}\cdot\frac{\pi}{64}\,d^4.$$

Hieraus folgt $P = k\frac{\pi}{16}\cdot\frac{\delta^3}{\lambda} = \frac{\pi^3 E}{n.64}\cdot\frac{d^4}{l^2}$:

$$\left(\frac{d}{\delta}\right)^4 = \frac{4\,k\,n}{E\,\pi^2}\,\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{l}{\delta}\right)^2$$

$$\frac{d}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{4\,k\,n}{E\,\pi^2}\cdot\frac{\delta}{\lambda}}\,\sqrt{\frac{l}{\delta}}.$$

Der Werth der vierten Wurzel wird nach Redtenbacher zweckmäßig gleich 0,229 genommen, woraus sich bei $k = 450$, $E = 2\,000\,000$ und $\frac{\lambda}{\delta} = \frac{3}{2}$

$$n = \frac{0{,}229^4\,.\,2000000\,.\,\pi^2\,.\,3}{4\,.\,450\,.\,2} = 45{,}24 \text{ ergiebt.}$$

Hiernach ist:

$$\frac{d}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{19}\cdot\frac{l}{\delta}}.$$

Hat die Schubstange einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten b und h, worin h die kleinere Dimension vorstellt, so ist:

$$\tfrac{1}{12}\,b\,h^3 = \frac{\pi}{64}\,d^4$$

$$\left(\frac{h}{d}\right)^4 = \frac{\pi\,.\,12}{64}\cdot\frac{h}{b}, \text{ daher}$$

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{0{,}6\,\frac{h}{b}}\,.$$

Die gußeisernen Schubstangen erhalten einen $+$förmigen Querschnitt. Bezeichnen wir die größere Abmessung desselben mit h, die Dicke der Rippen mit c, so ist $J = \frac{1}{12}(c\,h^3 + [h - c]\,c^3) =$ annähernd $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{7}h^4$ für $\frac{c}{h} = \frac{1}{7}$; daher:

$$P = k\frac{\pi}{16}\,\frac{\delta^3}{\lambda} = \frac{\pi^2}{n}\cdot E\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\frac{h^4}{l^2}$$

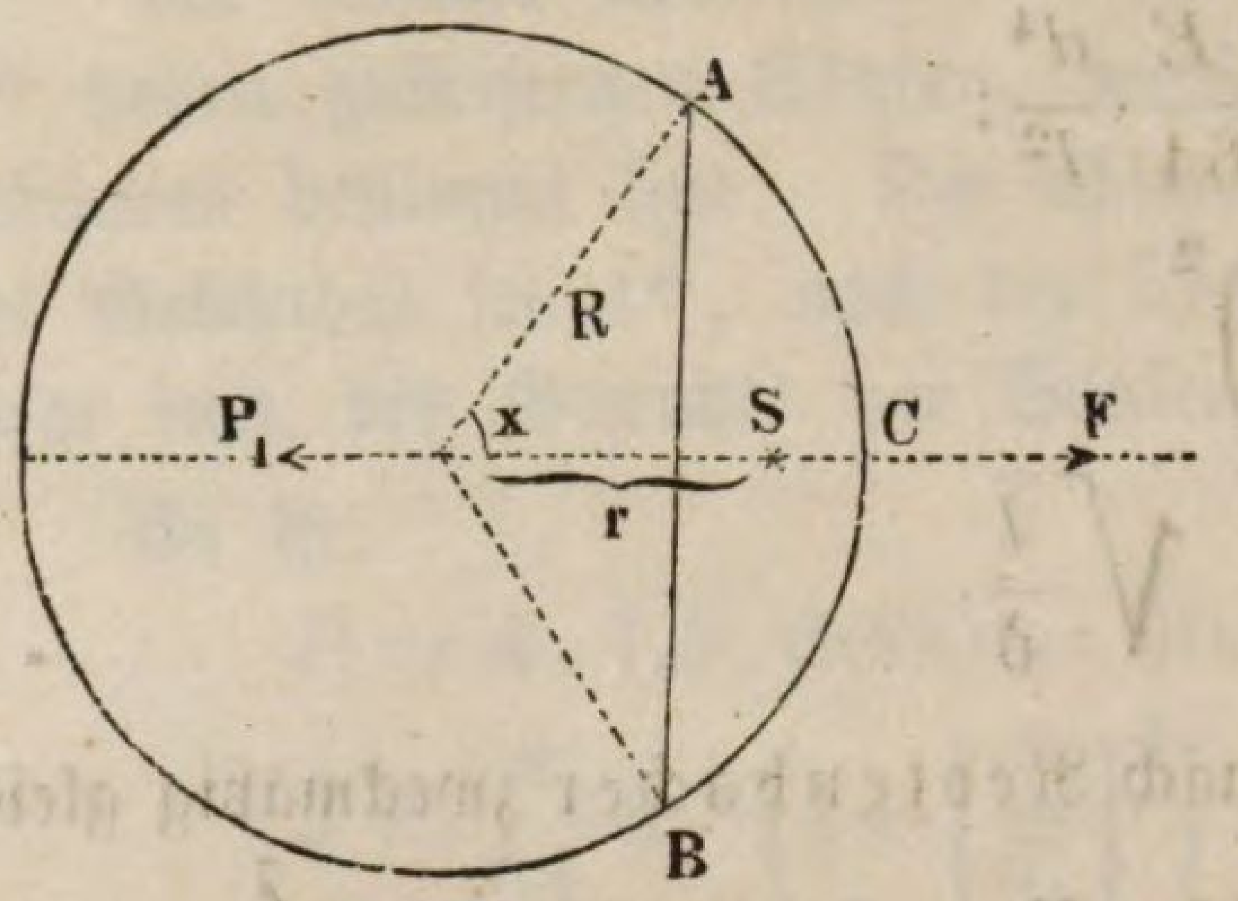
$$\left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{k\,.\,12\,.\,n\,.\,7}{\pi\,.\,16\,.\,E}\cdot\frac{\delta}{\lambda}\left(\frac{\delta}{l}\right)^2$$

für $n = 45{,}24$, $k = 450$, $E = 1000000$, $\frac{\lambda}{\delta} = \frac{3}{2}$

$$\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{3}{20}\cdot\frac{\delta}{l}}.$$

77. Ein normaler Cylinder mit kreisförmiger Basis drehe sich um seine geometrische Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Es soll die Centrifugalkraft mit der Festigkeit des Materials verglichen werden. Der Cylinder habe den Halbmesser R und die Höhe h. Bei der Zerstörung bilde sich eine gerade Trennungsfläche, deren Ebene normal auf der Grundebene des Cylinders steht. Es wird hiernach ein Cylinder abgerissen, dessen Grundebene der Kreisabschnitt $A\,C\,B$ sein mag (Fig. 369).

Fig. 369.



Die Fliehkräfte der einzelnen Massentheile des abgerissenen Stückes lassen sich zu einer Resultante F vereinigen, die durch den Schwerpunkt desselben gerichtet ist.

Es ist:

$$F = \omega^2\, M\, r.$$

Der zum Kreisabschnitte gehörige Centriwinkel sei $2\,x$, so ist:

$$M = \frac{R^2\,(x - \frac{1}{2}\sin 2\,x)\;h\,q}{g},$$

unter q das Gewicht einer Kubikeinheit des Cylinders verstanden.

Nach §. 42 b ist für den Kreisabschnitt:

$$r = \frac{(2\,R\sin x)^3}{12\,R^2\,(x - \frac{1}{2}\sin 2\,x)}, \text{ daher}$$

$$F = \omega^2\,\frac{q}{g}\,h\,\frac{(2\,R\sin x)^3}{12}.$$

In der Minute mögen u Umdrehungen gemacht werden, so ist:

$$\omega = \frac{2\,\pi\,u}{60}$$

$$F = \frac{4\,\pi^2 \,.\, 8}{60^2 \,.\, g \,.\, 12}\,h\,q\,u^2\,R^3 \sin x^3.$$

Die Trennungsfläche ist ein Rechteck, die zum Zerreißen nothwendige Kraft P_1 daher:

$$P_1 = K \,.\, h \,.\, 2\,R\sin x.$$

Für die Voraussetzung, daß beide Kräfte sich das Gleichgewicht halten sollen, haben wir daher:

$$F = P_1$$

$$\frac{4\,\pi^2\,8}{60^2 \,.\, g \,.\, 12}\,h\,q\,u^2\,R^3\sin x^3 = K \,.\, h \,.\, 2\,R\sin x.$$

Hieraus erhalten wir die für das Zerreißen nothwendigen Umdrehungen in einer Minute:

$$u = \frac{52}{R\sin x}\sqrt{\frac{K}{q}}.$$

Setzt man statt K, k, so findet man die Anzahl Umdrehungen, die der Cylinder, ohne zerstört zu werden, machen kann:

$$u = \frac{52}{R \sin x} \sqrt{\frac{k}{q}}.$$

Unter denselben Umständen ist u um so kleiner, je größer $\sin x$, d. h. je größer x wird; der ungünstigste Fall ist daher für $x = 90^0$. Soll deshalb von den obigen Formeln Gebrauch gemacht werden, so ist die Trennungsfläche in der, durch die Achse des Cylinders, gehenden Ebene anzunehmen, $\sin x$ also gleich 1 zu setzen:

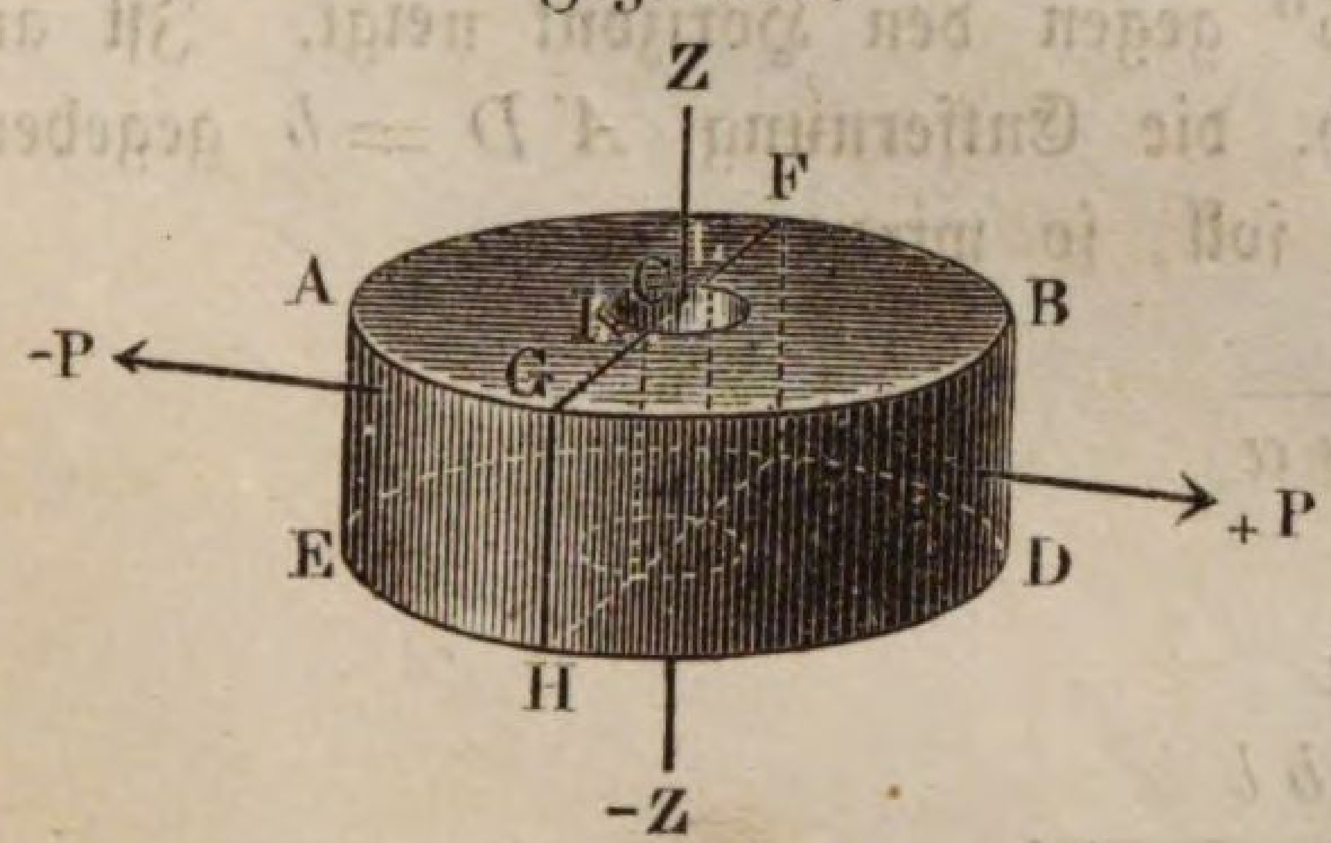
$$u = \frac{52}{R} \sqrt{\frac{K}{q}}$$

oder

$$u = \frac{52}{R} \sqrt{\frac{k}{q}}.$$

In den vorstehenden Formeln ist statt g, 9,81 Meter gesetzt worden, demnach ist auch R in Metern zu messen, K oder k auf den Quadratmeter und q auf den Kubikmeter zu beziehen.

Fig. 370.



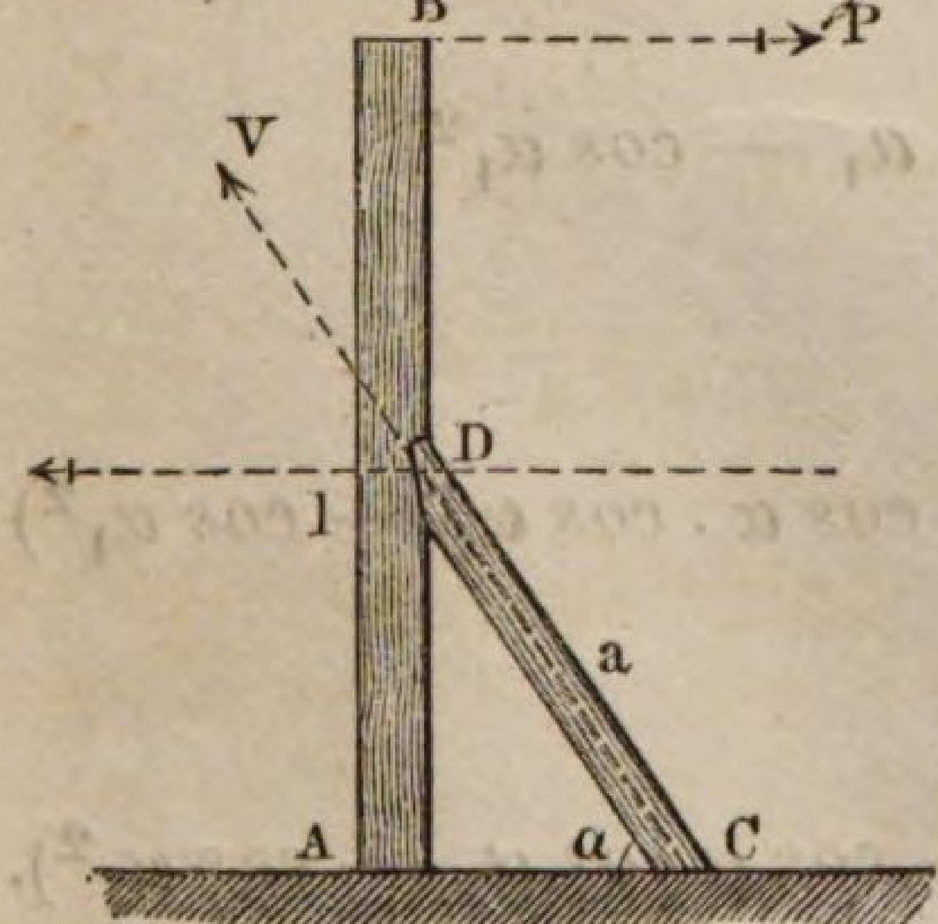
78. Wie viel Umdrehungen muß ein Mühlstein $AEDB$ (Fig. 370) aus Sandstein in einer Minute machen, um durch die Centrifugalkraft zersprengt zu werden? Der Halbmesser des Steines sei 0,628^m, der Halbmesser des Auges 0,098^m, das Gewicht eines Kubikmeters 2600 Kilogr., der Modul des Zerreißens 2 900 000 Kilogr.

Nach der Formel:

$$u = 52 \sqrt{\frac{K}{q\,(r_1{}^2 + r_1\, r_2 + r_2{}^2)}} = 2550 \text{ Umdrehungen ungefähr.}$$

79. Der Balken AB (Fig. 371) wird bei B durch die horizontal wirksame Kraft P angegriffen und durch die Strebe CD in senkrechter Lage erhalten. Es sei $AB = l$, $CD = a$ der Winkel $DCA = \alpha$, so ist das Widerstandsmoment für den Querschnitt in D:

Fig. 371.



$$P\,(l - a \sin \alpha) = k\,\frac{J}{e},$$

woraus sich die Querschnittsdimensionen von DB bestimmen lassen.

Die Strebe CD ersetzt eine Kraft V, welche mit der Kraft P in Bezug auf A

entgegengesetztes Drehungsbestreben hat. Für den Gleichgewichtszustand haben wir also:

$$V\,a \sin\alpha \cos\alpha = P\,l$$

$$V = P\frac{l}{a \sin\alpha \cos\alpha}$$

$$= P\frac{2\,l}{a \sin 2\,\alpha}.$$

Die Kraft V nimmt die rückwirkende Festigkeit der Strebe in Anspruch. Wir erhalten n. §. 151, indem wir der Sicherheit wegen $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$ setzen:

$$V = \frac{E\,J}{a^2}$$

$$\frac{E\,J}{a^2} = \frac{2\,l\,P}{a \sin 2\,\alpha}$$

$$J = \frac{2\,a\,l\,P}{E \sin 2\,\alpha}.$$

Hieraus sehen wir, daß J am kleinsten wird, wenn $\sin 2\,\alpha$ recht groß, α also 45^0 wird.

Es ist hiernach zugleich die Strebe am schwächsten zu construiren, wenn man sie bei gegebener Länge unter 45^0 gegen den Horizont neigt. Ist anstatt der Länge a der Punkt D, d. h. die Entfernung $A\,D = b$ gegeben, welche durch die Strebe gestützt werden soll, so wird:

$$V = P\frac{l}{b \cos\alpha}$$

$$\frac{E\,J}{b^2 \operatorname{cosec} \alpha^2} = \frac{P\,l}{b \cos\alpha}$$

$$J = \frac{P\,b\,l}{E \sin\alpha^2 \cos\alpha}.$$

J ist am kleinsten, wenn

$\sin\alpha^2 \cos\alpha$ ein Maximum

$$\lim \frac{\sin\alpha^2.\cos\alpha - \sin\alpha_1{}^2.\cos\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} = 0 = \lim \frac{\cos\alpha - \cos\alpha^3 - \cos\alpha_1 + \cos\alpha_1{}^3}{\alpha - \alpha_1}.$$

Es ist aber

$$\frac{\cos\alpha - \cos\alpha_1 - (\cos\alpha^3 - \cos\alpha_1{}^3)}{\alpha - \alpha_1}$$

$$= \frac{\cos\alpha - \cos\alpha_1}{\alpha - \alpha_1}(1 - \cos\alpha^2 - \cos\alpha \cos\alpha_1 - \cos\alpha_1{}^2)$$

$$= 2 \sin\frac{\alpha + \alpha_1}{2}.\frac{\sin\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}}{\alpha - \alpha_1}.(1 - \cos\alpha^2 - \cos\alpha . \cos\alpha_1 - \cos\alpha_1{}^2)$$

$$= \sin\frac{\alpha + \alpha_1}{2}.\frac{\sin\frac{\alpha_1 - \alpha}{2}}{\frac{\alpha - \alpha_1}{2}}.(1 - \cos\alpha^2 - \cos\alpha \cos\alpha_1 - \cos\alpha_1{}^2).$$

Geht man jetzt zur Grenze über, so wird der zweite Factor gleich -1, daher ist:

$$- \sin \alpha + 3 \cos \alpha^2 \sin \alpha = 0$$

$$3 \cos \alpha^2 = 1 = \cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{2}.$$

Will man hiernach eine recht schwache Strebe haben, so muß $\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{2}$ oder

$$A\,C = b \operatorname{cotg} \alpha \text{ (Fig. 372)}$$

$$= b \cdot \tfrac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$= b \sin 45^0$$

sein, woraus sich auf leichte Weise der Punkt C für den Anschluß der Strebe finden läßt.

Fig. 372.

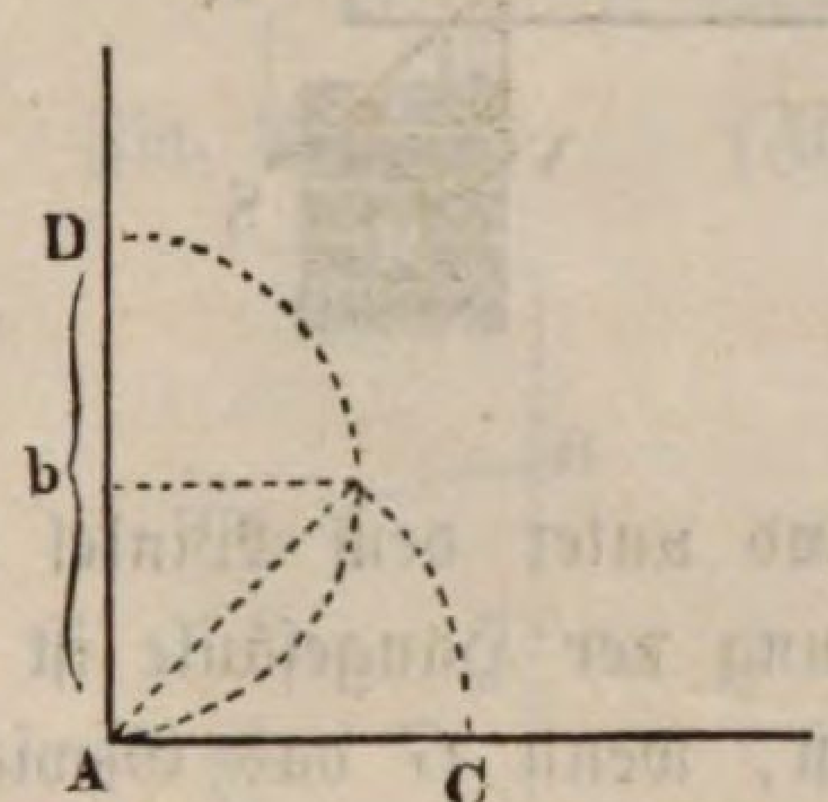
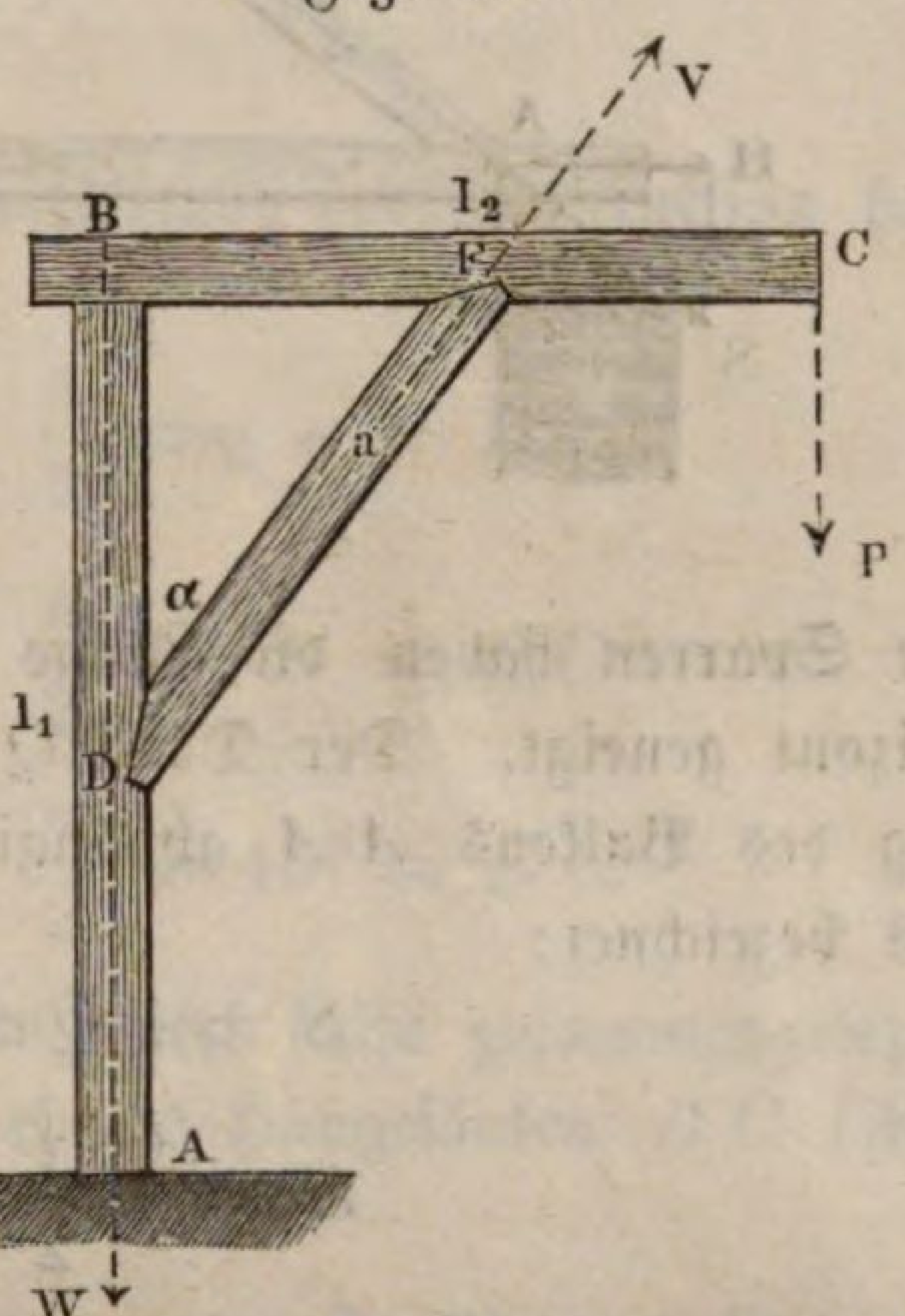


Fig. 373.



80. Zwei mit einander rechtwinkelig verbundene Balken $A\,B$ und $B\,C$ (Fig. 373), von denen der eine in verticaler Lage mit seinem unteren Ende befestigt ist, sind durch das Winkelband $D\,F$ verbunden und in dem Punkte C durch P Pfund belastet.

Es sei $A\,B = l_1$, $B\,C = l_2$, der Winkel $B\,D\,F = \alpha$ und $D\,F = a$.

Für die Querschnittsdimensionen im Punkte F haben wir:

$$P\,(l_2 - a \sin \alpha) = k \frac{J}{e}.$$

Für das Stück $B\,D$, dessen absolute Festigkeit durch die Kraft W in Anspruch genommen wird, ist im Falle des Gleichgewichtes:

$$W\,a \sin \alpha = P\,(l_2 - a \sin \alpha).$$

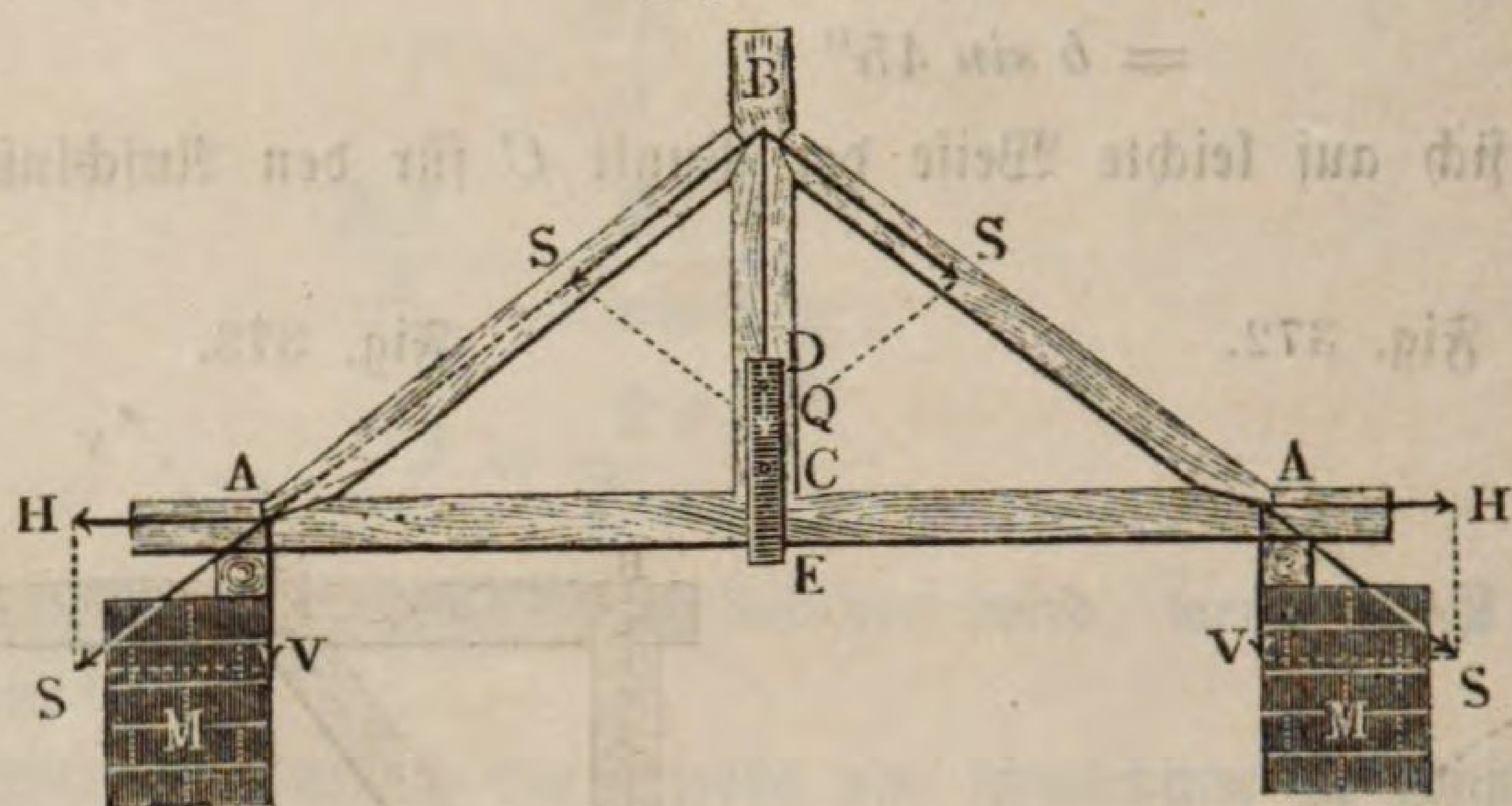
Die anstatt der Strebe nothwendige Kraft V ist wieder, wie in dem vorigen Falle:

$$V = \frac{2\,P\,l}{a \sin 2\,\alpha}.$$

Legen wir endlich noch P parallel seiner Richtung nach B, so nimmt P die rückwirkende Festigkeit von dem Theile AD in Anspruch, während auf Biegung der beiden Theile AD und DB das Moment Pl_2 wirksam ist.

81. Es sei AA (Fig. 374) ein horizontal gelagerter Balken, der mit der Hängesäule BC fest verbunden ist, wodurch ein Theil des Druckes dem Balken entzogen und vermittelst der Sparren AB an die Mauern übertragen wird. Eine derartige Construction heißt ein einfaches Hängewerk.

Fig. 374.



Die Sparren haben die Länge l und sind unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt. Der Druck Q in Richtung der Hängesäule ist von der Belastung des Balkens AA abhängig. Es ist, wenn G das Gewicht eines Sparrens bezeichnet:

$$S = \tfrac{1}{2} Q \, cosec \, \alpha$$

$$H = \frac{Q + G}{2} \, cotg \, \alpha$$

$$V = \tfrac{1}{2} Q + G.$$

Die Kraft S nimmt die rückwirkende Festigkeit der Sparren in Anspruch. Es ist daher:

$$\tfrac{1}{2} Q \, cosec \, \alpha = \frac{EJ}{l^2}$$

$$J = \tfrac{1}{2} \frac{Q l^2}{E \sin \alpha},$$

woraus die Querschnittsdimensionen eines Sparrens zu berechnen sind. Ist anstatt der Sparrenlänge l die Spannweite a gegeben, so ist statt l, $\tfrac{1}{2} a \sec \alpha$ gesetzt,

$$J = \tfrac{1}{8} \frac{Q a^2}{E \sin \alpha \cos \alpha^2}.$$

Soll J ein Minimum sein, so muß $\sin \alpha \cos \alpha^2$ zu einem Maximum gemacht werden:

$$\sin \alpha - \sin \alpha^3 = Max.$$

Es ist

$$\frac{\sin\alpha - \sin\alpha^3 - \sin\alpha_1 + \sin\alpha_1{}^3}{\alpha - \alpha_1} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha_1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{\sin\alpha^3 - \sin\alpha_1{}^3}{\alpha - \alpha_1}$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha - \alpha_1}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha + \alpha_1}{2} - \frac{\sin\frac{\alpha - \alpha_1}{2}}{\frac{\alpha - \alpha_1}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha + \alpha_1}{2}$$

$$\times (\sin\alpha^2 + \sin\alpha \,.\, \sin\alpha_1 + \sin\alpha_1{}^2).$$

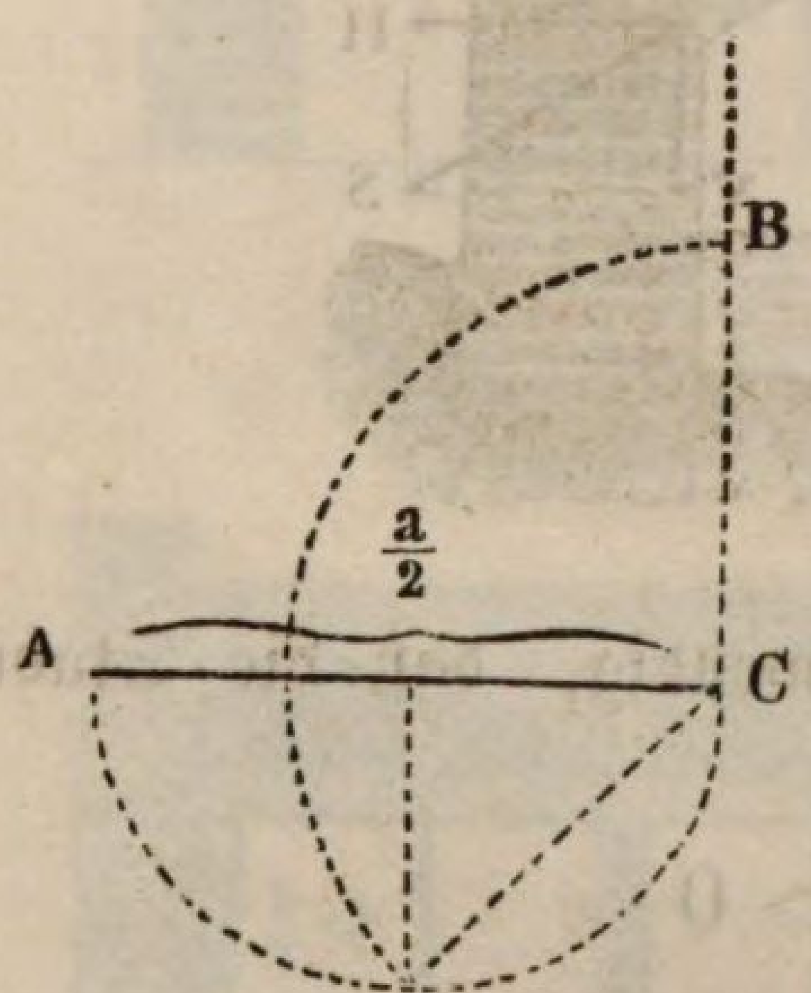
Gehen wir zur Grenze über, so wird aus diesem Ausdruck:

$$\cos\alpha - \cos\alpha \,.\, 3\sin\alpha^2 = 0$$

$$3\sin\alpha^2 = 1 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2$$

$$\cot g\,\alpha = \sqrt{2}.$$

Fig. 375.



Zur Ausführung der Construction haben wir (Fig. 375):

$$\frac{a}{2}\,\tan g\,\alpha = B\,C$$

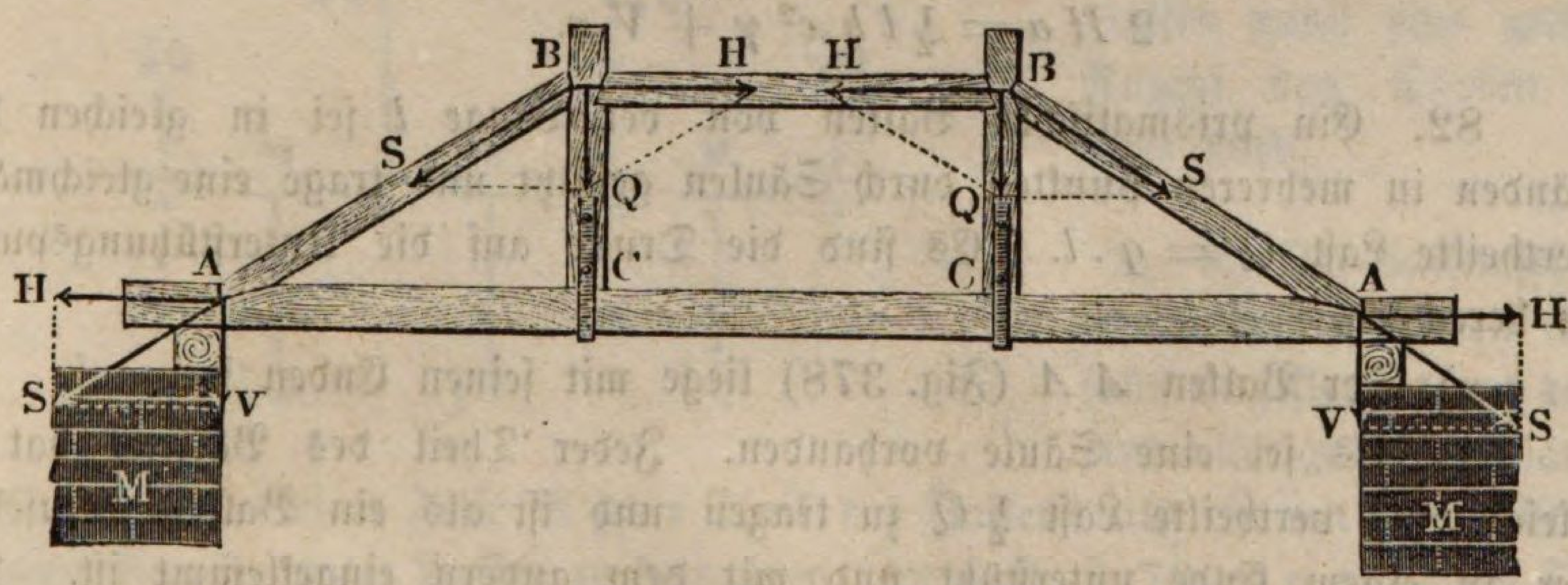
$$\frac{a}{2}\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = B\,C$$

$$\frac{a}{2}\,\sin 45^0 = B\,C.$$

Ein Hängewerk heißt zusammengesetzt, wenn zwei oder mehrere Hängesäulen $B\,C$ (Fig. 376) angebracht sind.

Die **Sprengwerke** stimmen in der Theorie mit den Hängewerken überein, in der Construction

Fig. 376.



unterscheiden sie sich insofern von einander, als die Sprengwerke die Unterstützung eines Balkens von unten bewirken. Der aus dem Drucke Q (Fig. 377 a. f. S.) resultirende Horizontalschub H ist bei den Sprengwerken

mit der Stabilität der Pfeiler zu vergleichen. Bei dem einfachen Sprengwerke wird die Hälfte der Last Q von den Pfeilern getragen:

$$S = \tfrac{1}{4} Q \operatorname{cosec} \alpha$$

$$H = \frac{Q + 2G}{4} \operatorname{cotg} \alpha$$

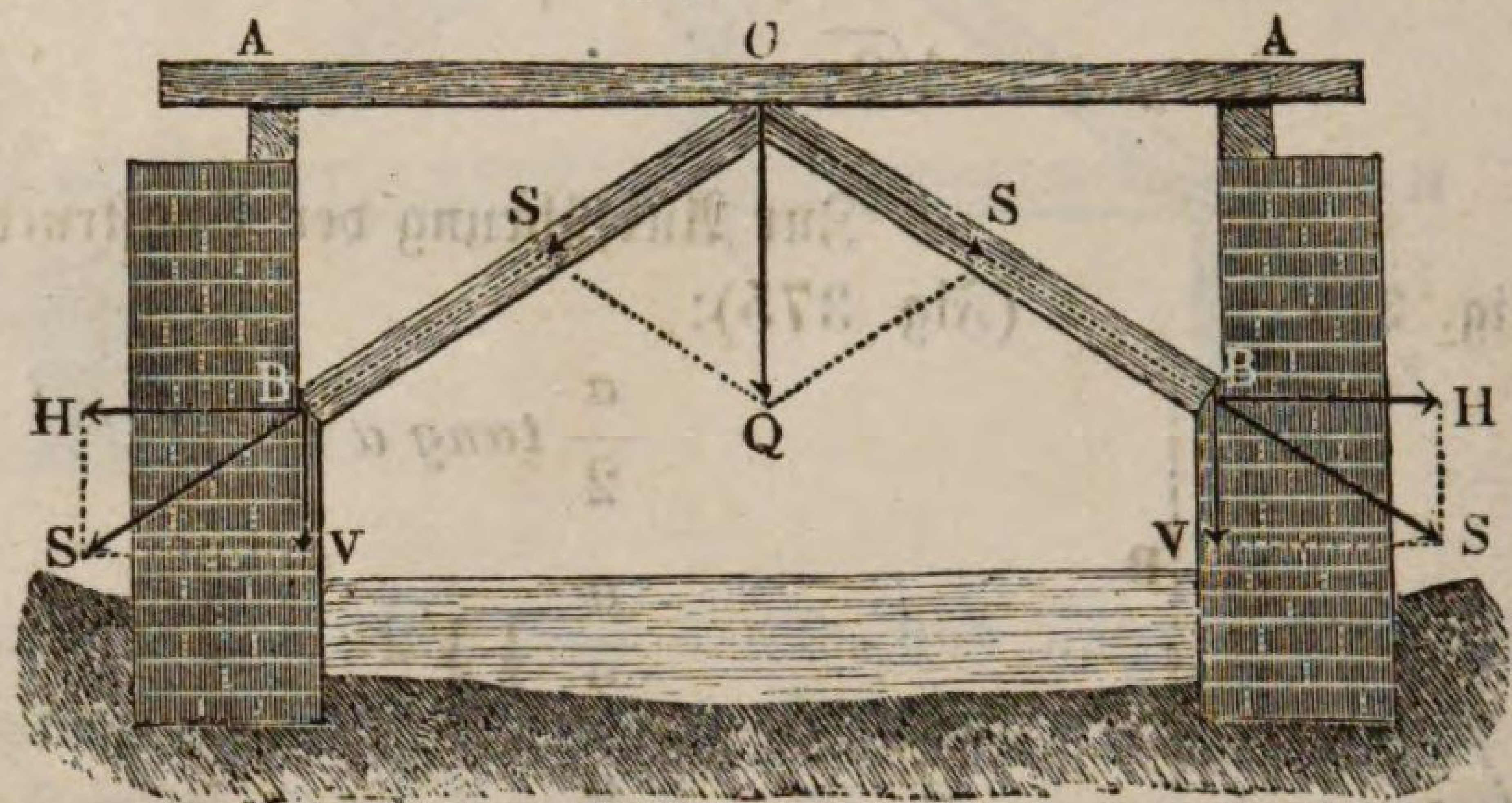
$$V = \tfrac{1}{2} Q + G.$$

Ist x die Breite, h die Höhe und l die Länge des Pfeilers, γ seine Dichtigkeit, so haben wir die Stabilität St gleich

$$\tfrac{1}{2} l h x^2 \gamma - (H a - V x),$$

unter a den Arm der Kraft H verstanden.

Fig. 377.



Für die praktischen Ausführungen ist es nothwendig, daß die Stabilität einen positiven Werth behalte. Es muß deshalb

$$\tfrac{1}{2} l h x^2 \gamma - (H a - V x) > 0$$

sein, d. h.

$$H a < \tfrac{1}{2} l h x^2 \gamma + V x.$$

Zur Bildung einer Gleichung setzen wir das doppelte Moment von H gleich dem entwickelten Werthe und bestimmen daraus die unbekannte Stärke x:

$$2 H a = \tfrac{1}{2} l h x^2 \gamma + V x.$$

82. Ein prismatischer Balken von der Länge l sei in gleichen Abständen in mehreren Punkten durch Säulen gestützt und trage eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = q \,.\, l$. Es sind die Drucke auf die Unterstützungspunkte zu berechnen.

a) Der Balken AA (Fig. 378) liege mit seinen Enden frei auf.

1) Es sei eine Säule vorhanden. Jeder Theil des Balkens hat die gleichmäßig vertheilte Last $\frac{1}{2} Q$ zu tragen und ist als ein Balken anzusehen, der an einem Ende unterstützt und mit dem andern eingeklemmt ist. Wir erhalten deshalb nach §. 70 3c die Drucke auf die Unterstützungspunkte A gleich $\frac{3}{8}$ der Last $\frac{Q}{2}$, d. h. gleich $\frac{3}{16} Q$, so daß für den Druck auf die Säule noch $\frac{10}{16} Q$ übrig bleiben, da die Summe der einzelnen Drucke gleich Q sein muß.

2) Es sei der Balken AA (Fig. 379) durch zwei Säulen gestützt. In diesem Falle hat jeder Theil des Balkens $\frac{1}{3}$ der gleichmäßig vertheilten Last zu tragen. Die Theile AB sind als Balken zu betrachten, die mit einem Ende eingeklemmt, an dem andern unterstützt sind, während der Theil BB einen mit beiden Enden eingeklemmten Balken vorstellt. Wir haben deshalb den Druck in A gleich $\frac{3}{8}$ der Last $\frac{1}{3}Q$, den Druck in B wegen der auf AB ruhenden Last gleich $\frac{5}{8}$ von $\frac{1}{3}Q$. Die Punkte B haben aber noch außerdem durch die über BB vertheilte Last $= \frac{1}{3}Q$ Druck auszuhalten, von dem jede der Säulen durch die Hälfte beansprucht wird.

Fig. 378.

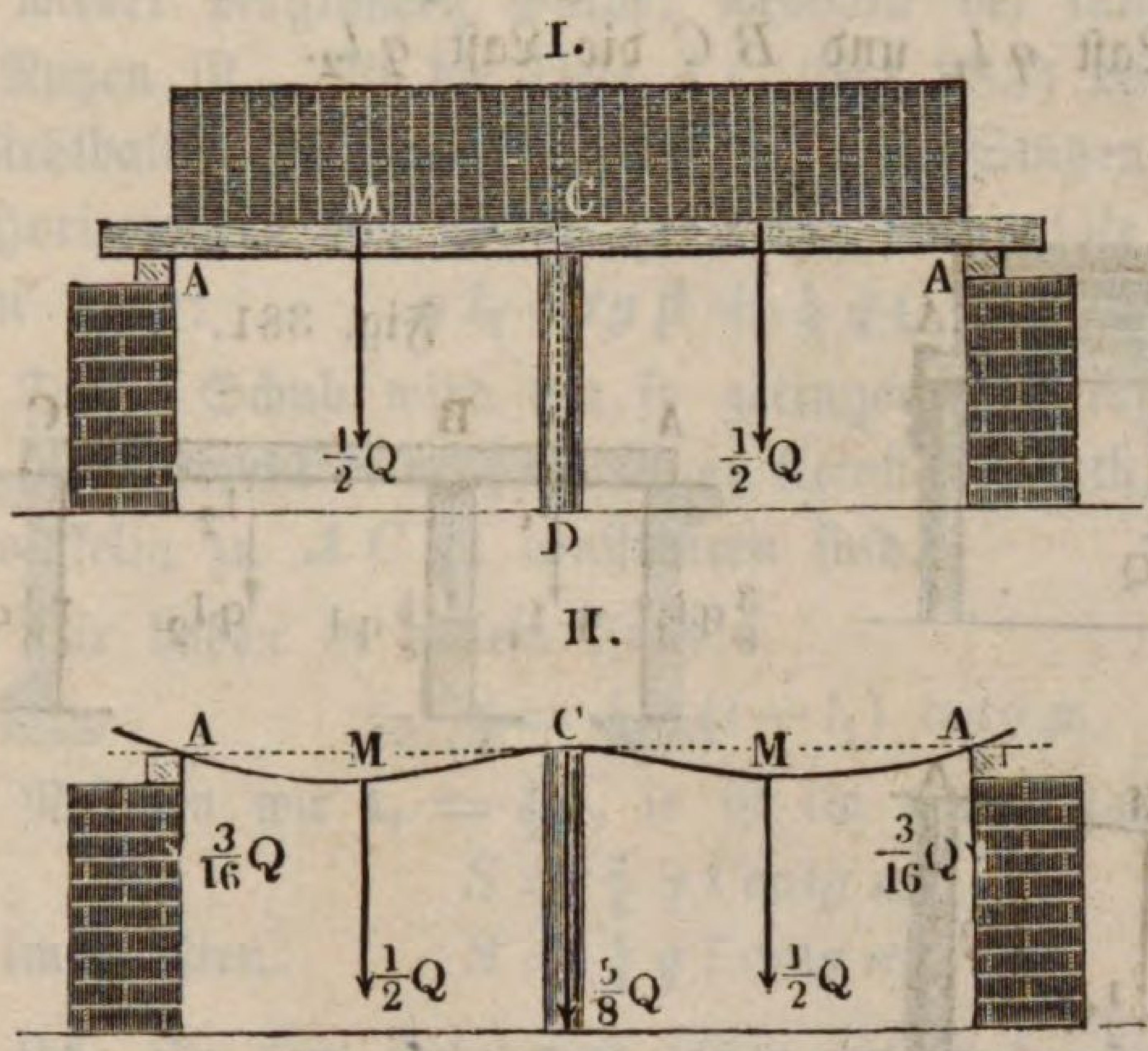
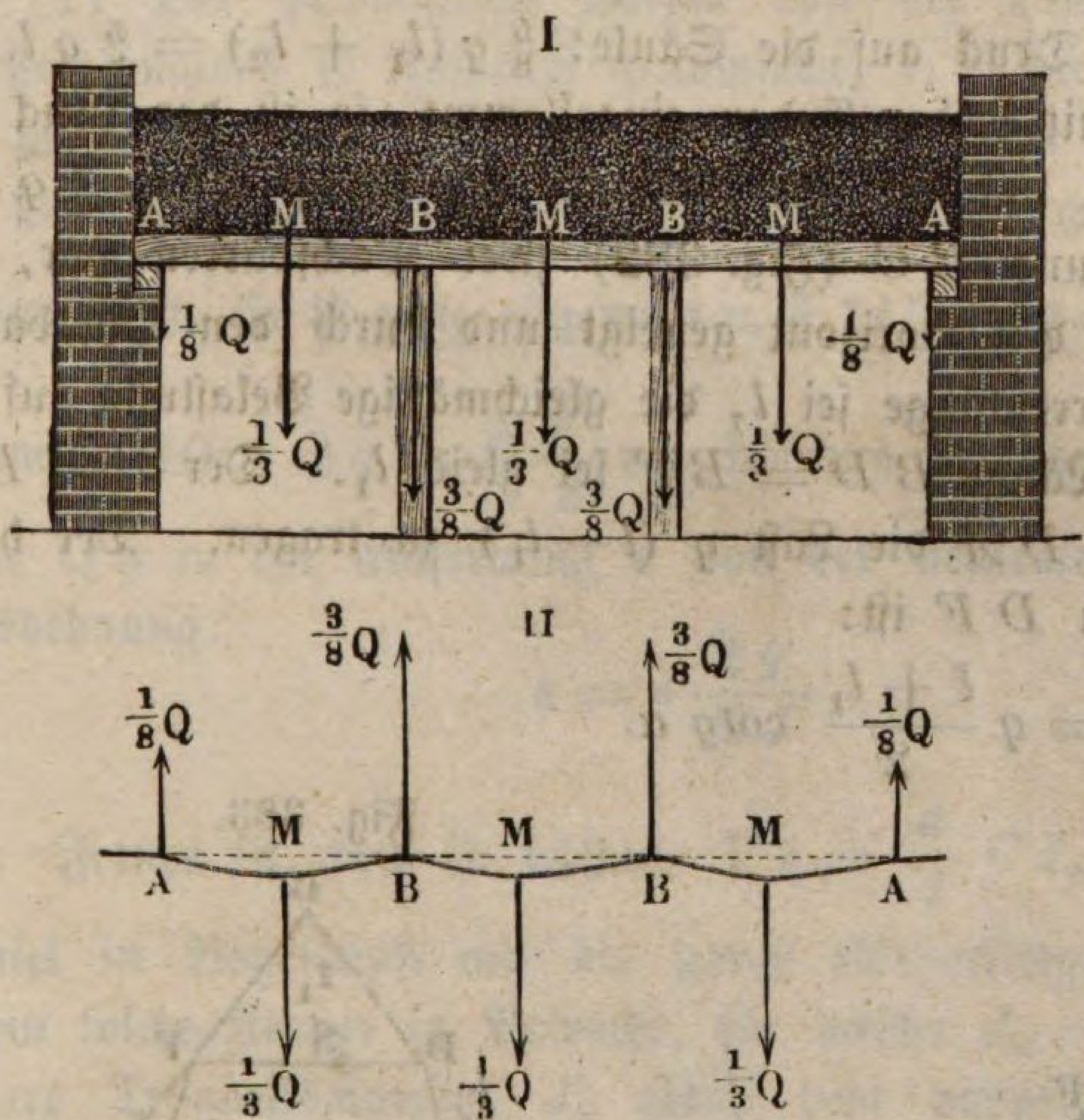


Fig. 379.



Nach dieser Auseinandersetzung haben die Punkte A die Last

$$\tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{1}{3} Q = \tfrac{1}{8} Q,$$

die Punkte B die Last

$$\tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{1}{3} Q + \tfrac{1}{6} Q = \tfrac{3}{8} Q$$

auszuhalten.

In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn der Balken durch eine größere Anzahl von Säulen gestützt wird.

b) Der Balken sei mit seinen beiden Enden ebenfalls eingeklemmt und durch eine beliebige Anzahl Säulen gestützt. In diesem Falle ist jeder Theil des Balkens als ein mit seinen beiden Enden eingeklemmter Balken zu betrachten, weshalb §. 70, 4c auf jeden Theil in Anwendung kommt. Ist eine Säule CD (Fig. 380 a. f. S.) vorhanden, so hat diese einen Druck gleich $\frac{1}{2}Q$ auszuhalten und die Endpunkte haben eine Last gleich $\frac{1}{4}Q$ zu tragen. Bei zwei Säulen ist jede mit $\frac{1}{3}Q$ in Anspruch genommen, während jeder der Endpunkte $\frac{1}{6}Q$ zu tragen hat u. s. w.

Sind endlich die Säulen in ungleichen Abständen angebracht (Fig. 381), so ist anzunehmen, daß jeder Balkentheil einen seiner Länge proportionalen Theil der ganzen Last zu tragen hat. Es habe der Balken $A\,C$ die Länge l, die Belastung auf die Längeneinheit sei q Pfund und eine zur Unterstützung angebrachte Säule theile den Balken in die Längen l_1 und l_2. Für diese Annahmen trägt $A\,B$ die Last $q\,l_1$ und $B\,C$ die Last $q\,l_2$.

Fig. 380.

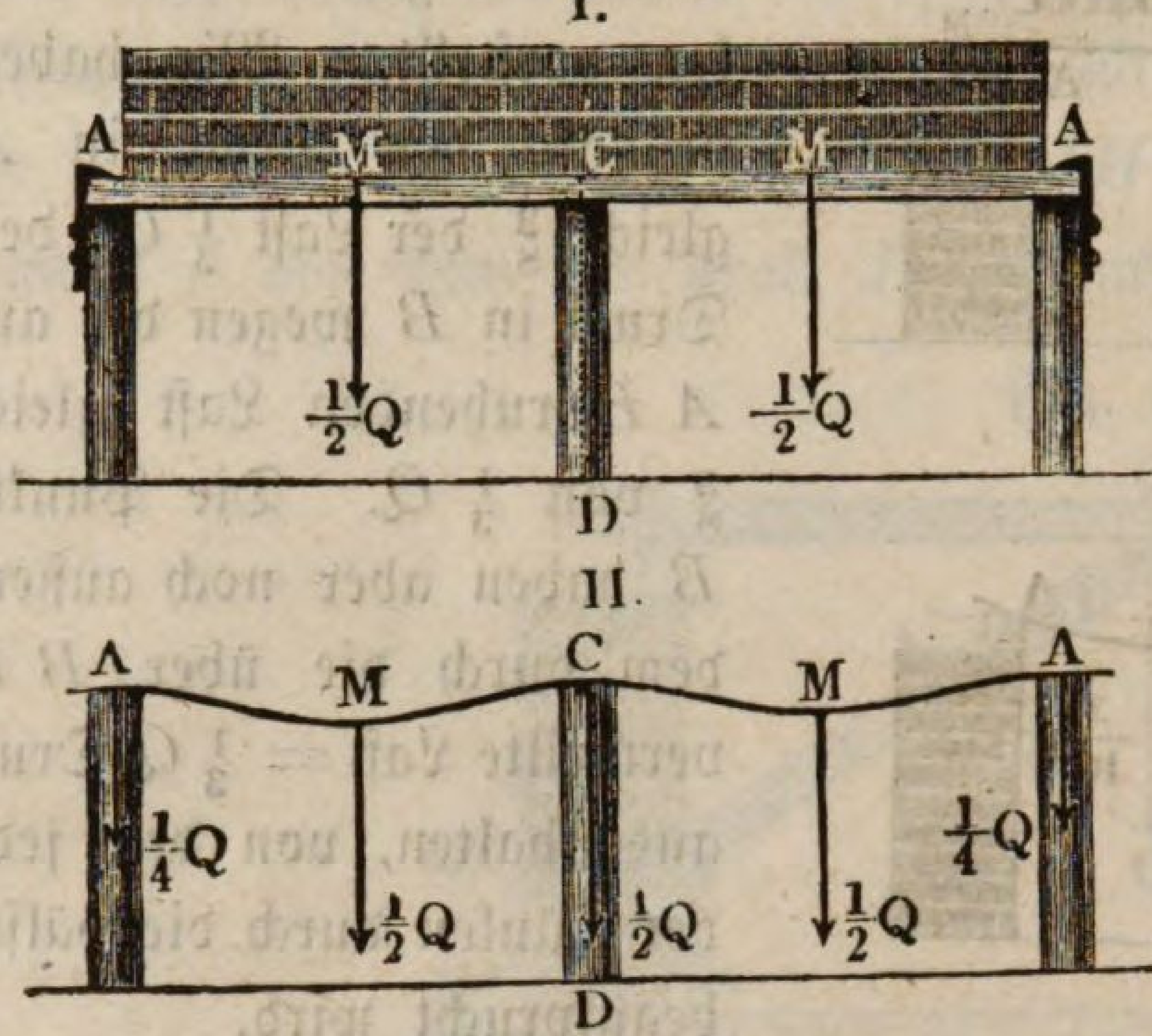
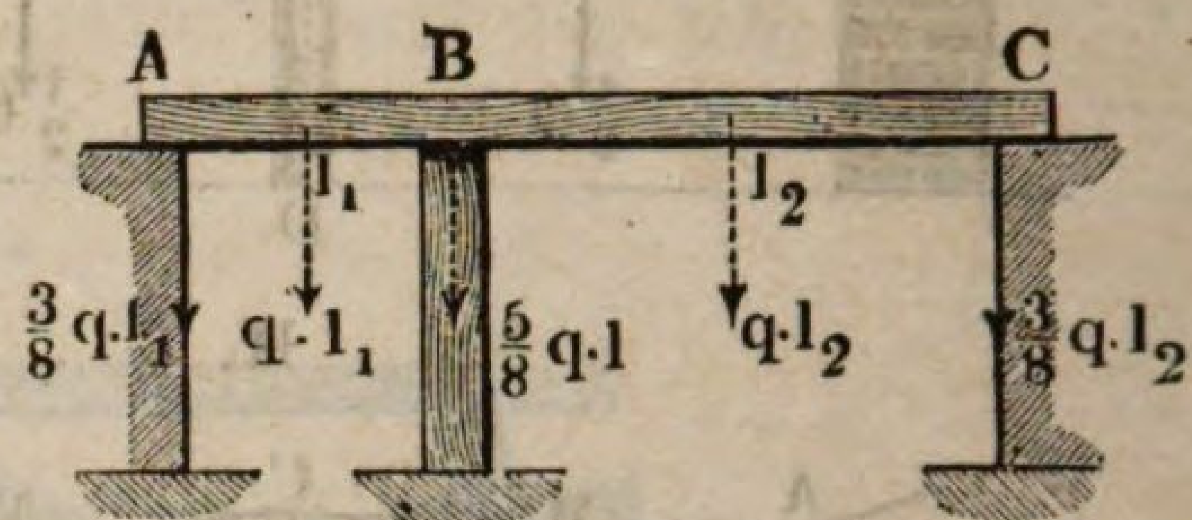


Fig. 381.



Ist der Balken an seinen Enden unterstützt, so ist der Druck auf A: $\frac{3}{8}\,q\,l_1$, auf C: $\frac{3}{8}\,q\,l_2$, der Druck auf die Säule: $\frac{5}{8}\,q\,(l_1 + l_2) = \frac{5}{8}\,q\,l$.

Ist der Balken aber mit beiden Enden eingeklemmt, so ist der Druck auf $A = \frac{1}{2}\,q l_1$, auf $C = \frac{1}{2}\,q\,l_2$ und auf die Säule $= \frac{1}{2}\,q\,(l_1 + l_2) = \frac{1}{2}\,q\,l$.

83. Es stellen $A\,B$ und $B\,C$ (Fig. 382) zwei Dachsparren vor, die unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt und durch den Querbalken $D\,F$ gespreizt sind. Die Sparrenlänge sei l, die gleichmäßige Belastung auf die Längeneinheit q Pfund, die Länge $B\,D = B\,F$ sei gleich l_1. Der Theil $B\,D$ hat die Last $q\,l_1$, der Theil $D\,A$ die Last $q\,(l - l_1)$ zu tragen. Der horizontale Schub im Kehlbalken $D\,F$ ist:

$$S = q\,\frac{l + l_1}{2}\,cotg\,\alpha.$$

Fig. 382.

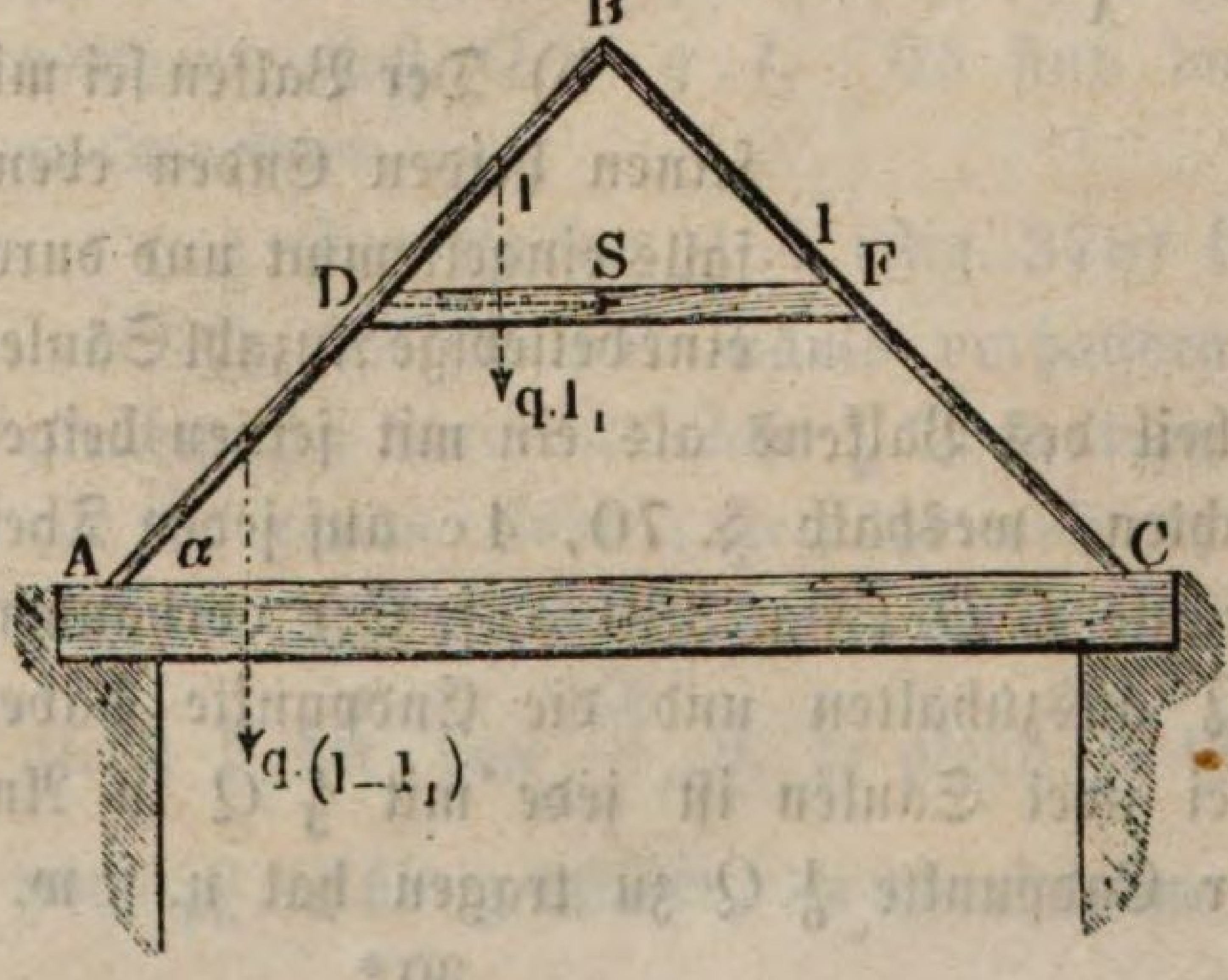
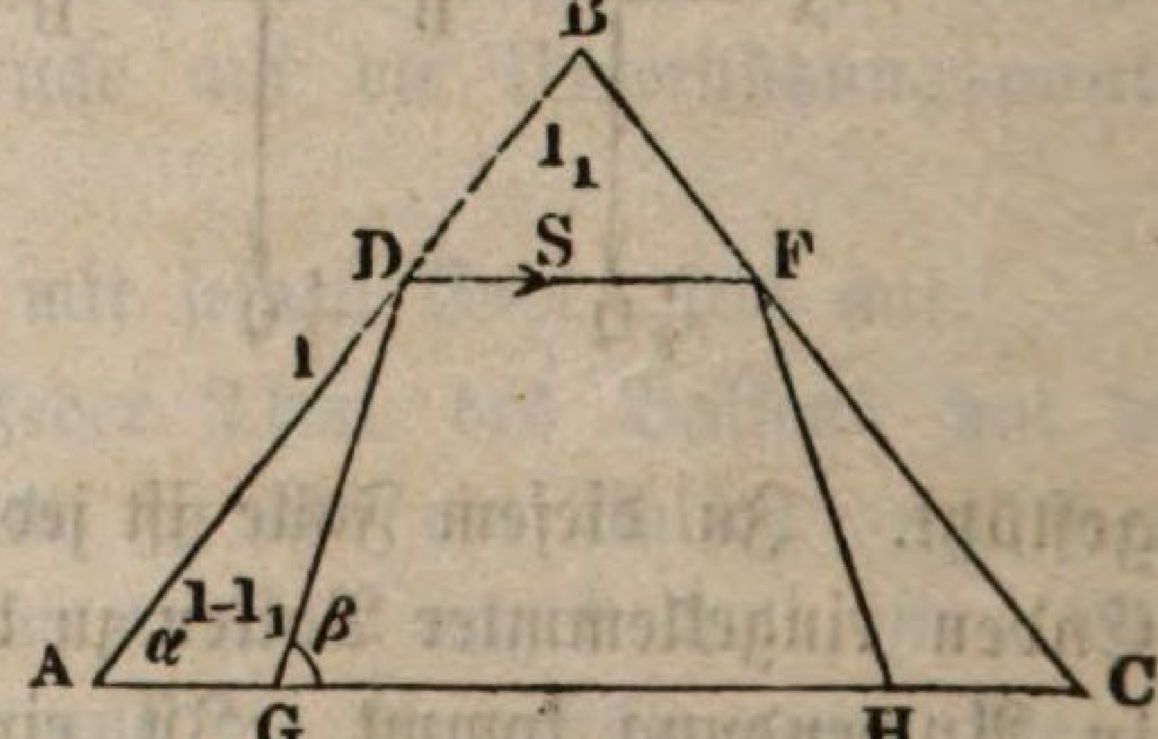


Fig. 383.



Ein gleicher Schub entsteht an den Fußpunkten der Sparren. Mit der Abnahme von l_1 wird dieser Schub kleiner, für $l_1 = 0$ erhält also derselbe seinen kleinsten Werth gleich $\frac{1}{2} q\, l\, cotg\, \alpha$, so daß es vortheilhaft scheint, den Kehlbalken ganz fortzulassen. In diesem Falle würde der Sparren jedoch eine Durchbiegung erleiden, wodurch der Winkel α kleiner, der Schub also sich doch wieder vergrößern würde, weshalb bei langen Sparren der Kehlbalken von Nutzen ist. Ist die Tiefe $A\,C$ (Fig. 383) des Daches bedeutend, so muß der Kehlbalken noch gestützt werden. Die Stützen $D\,G$ und $F\,H$ bilden mit der Horizontalen den Winkel β. Der horizontale Schub im Kehlbalken ist in diesem Falle: $q\, l_1\, cotg\, \beta + \frac{1}{2} q\, (l + l_1)\, cotg\, \alpha.$

Dieser Schub wird um so geringer, je größer der Winkel β wird, für $\beta = 90^0$ erreicht er deshalb seinen kleinsten Werth, weshalb die Unterstützungen rechtwinkelig zu $A\,C$ zu construiren sind.

Wir haben in diesem Falle:

$$S = \tfrac{1}{2} q\, (l - l_1)\; cotg\, \alpha.$$

Nehmen wir $l_1 = \frac{1}{2} l$, so ist im ersten Falle:

$$S = \tfrac{3}{4} q\, l\, cotg\, \alpha,$$

und im zweiten: $$S = \tfrac{1}{4} q\, l\, cotg\, \alpha.$$

84. In dem Folgenden sollen einige besondere Fälle der zusammengesetzten Festigkeit der Betrachtung unterworfen werden.

1) Der prismatische Körper von der Länge l sei auf Biegung und Torsion zugleich in Anspruch genommen, d. h. die äußeren Kräfte reduciren sich für jeden Querschnitt auf zwei Kräftepaare, von denen das eine $Q\,q$ normal zur Querschnittsebene gelegen, das andere $V\,v$ dagegen mit dem Querschnitt zusammenfällt. Es ist ganz allgemein n. F. 143: $Q q = \frac{E J}{\varrho}$ und mit Rücksicht auf Formel 140: $Q\,q = E \frac{J}{e}\, \varepsilon$. Hieraus erhalten wir die durch das Kräftepaar $Q\,q$ in der Entfernung e von der neutralen Faserschicht hervorgerufene Ausdehnung:

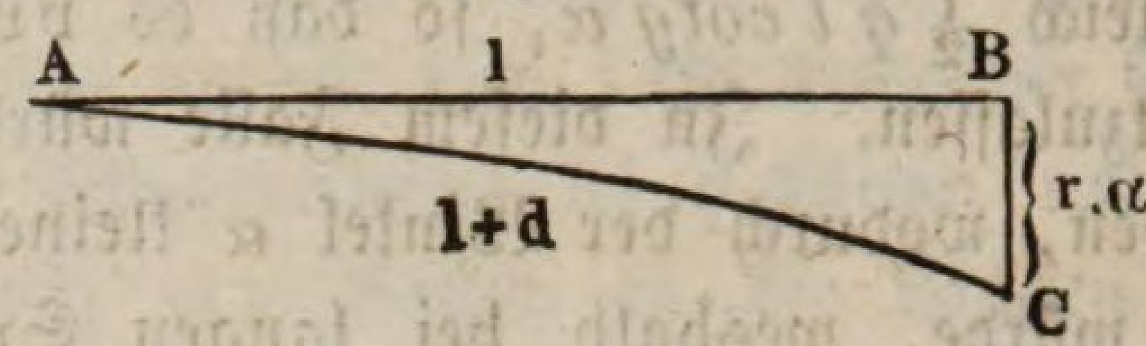
$$\varepsilon = e \frac{Q\,q}{E\,J}.$$

Ferner ist nach F. 149b: $V\,v = \frac{\alpha}{l}\, C\, J_p$, unter α den Verdrehungswinkel in Bogenmaß auf die ganze Körperlänge l verstanden. Ziehen wir allein solche Körper in Betracht, für welche $J_x = J_y$ ist, bei denen also das polare Trägheitsmoment J_p gleich dem doppelten Trägheitsmoment J für relative Festigkeit gesetzt werden darf, so ist $V\,v = 2 \frac{\alpha}{l}\, C\,J$. Die Punkte des Querschnitts, welche in der Entfernung r von der Achse entfernt sind, erleiden die Verdrehung $r\,\alpha$ und es ist daher die Verschiebung:

$$\gamma = \frac{r\,\alpha}{l} = r \frac{V\,v}{2\,.\,C J}.$$

In Fig. 384 sei AB die Faser von der Länge l vor der Verdrehung,

Fig. 384.



AC deren Lage nach derselben und d bezeichne die durch die Verdrehung hervorgerufene Dehnung, dann ist:

$$(l + d)^2 = l^2 + (r\,\alpha)^2$$
$$2\,l\,d + d^2 = (r\,\alpha)^2$$

und wenn man der Kleinheit von d wegen, d^2 gegen $2\,l\,d$ vernachlässigt, so ergiebt sich die durch die Verdrehung hervorgerufene Ausdehnung:

$$\varepsilon_1 = \frac{d}{l} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{r\,\alpha}{l}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(r\frac{V\,v}{2\,CJ}\right)^2.$$

Die Summe der beiden hervorgerufenen Ausdehnungen ε und ε_1, bezogen auf dieselbe Entfernung e von der Achse, darf bei praktischen Ausführungen niemals dem der Elasticitätsgrenze entsprechenden Maximalwerth (ε) gleich werden, es muß also jederzeit

$$\varepsilon + \varepsilon_1 < (\varepsilon) \text{ und ebenso}$$
$$E(\varepsilon + \varepsilon_1) < E(\varepsilon) \text{ sein.}$$

Da nun $E\;(\varepsilon)$ n. F. 134 mit (σ), der Spannung in der Elasticitätsgrenze übereinstimmt, so wird man bei praktischen Ausführungen

$$E\;(\varepsilon + \varepsilon_1) = k \text{ setzen dürfen.}$$

Bei Benutzung der oben entwickelten Werthe von ε und ε_1, indem wir $r = e$ setzen, unter e die Entfernung der äußersten Fasern von der Achse verstanden, erhalten wir:

$$E\left\{e\frac{Q\,q}{EJ} + \tfrac{1}{2}\left(e\frac{V\,v}{2\,CJ}\right)^2\right\} = k$$

$$Q\,q\,\frac{J}{e} + \frac{E}{2}\left(\frac{V\,v}{2\,C}\right)^2 = k\left(\frac{J}{e}\right)^2$$

$$\left(k\frac{J}{e}\right)^2 - Q\,q\,k\,\frac{J}{e} - \frac{k\,E}{2}\left(\frac{V\,v}{2\,C}\right)^2 = 0.$$

Hieraus findet sich zur Berechnung der Querschnittsdimensionen:

$$k\frac{J}{e} = \tfrac{1}{2}\,Q\,q + \tfrac{1}{2}\sqrt{(Q\,q)^2 + \frac{k\,E}{2\,C^2}\,(V\,v)^2}.$$

Die mittelst höherer Mathematik und genauerer Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse entwickelte Formel heißt:

$$\text{a)}\;\; k\frac{J}{e} = \tfrac{3}{8}\,Q\,q + \tfrac{5}{8}\sqrt{(Q\,q)^2 + (V\,v)^2}.$$

Dividiren wir die letzte Gleichung durch $\dfrac{J}{e}$ und berücksichtigen, daß nach

F 144: $e\frac{Qq}{J}$ die in der Entfernung e stattfindende Normalspannung σ und $e\frac{Vv}{J_p} = e\frac{Vv}{2J}$, n. F. 150 die in der Entfernung e auftretende Tangentialspannung τ bezeichnet, so erhalten wir:

$$b)\ k = \tfrac{3}{8}\sigma + \tfrac{5}{8}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Wird diese Gleichung durch E dividirt und dabei $\frac{k}{E}$, die für die Praxis zulässige Gesammtausdehnung, mit ε_0 bezeichnet, $\frac{\sigma}{E}$ aber $= \varepsilon$ gesetzt, so entsteht:

$$\varepsilon_0 = \tfrac{3}{8}\varepsilon + \tfrac{5}{8}\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{2\tau}{E}\right)^2}.$$

Benutzen wir die in Formel 135 angegebene Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsmodul E und C, wonach $C = \frac{2}{5}E$, und führen wir statt $\frac{\tau}{C}$ die Verschiebung γ ein, so ist:

$$c)\ \varepsilon_0 = \tfrac{3}{8}\varepsilon + \tfrac{5}{8}\sqrt{\varepsilon^2 + (\tfrac{4}{5}\gamma)^2}.$$

2) Auf den Körper wirke eine Zug- oder Druckkraft P und das Torsionsmoment Vv.

Wir können hierbei von der oben unter b angegebenen Formel ausgehen und darin, da die sämmtlichen Fasern durch die Zug- oder Druckkraft P dieselbe Spannung σ erleiden, $\sigma = \frac{P}{F}$ setzen, unter F den Querschnitt des Körpers verstanden. Hiernach ist:

$$k = \tfrac{3}{8}\frac{P}{F} + \tfrac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{P}{F}\right)^2 + \left(e\frac{Vv}{J}\right)^2} \text{ oder}$$

$$a)\ k = \frac{P}{F}\left(\tfrac{3}{8} + \tfrac{5}{8}\sqrt{1 + \left[\frac{eFVv}{PJ}\right]^2}\right).$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist $J = \frac{\pi}{64}d^4$, $e = \frac{d}{2}$ und $F = \frac{\pi}{4}d^2$, daher:

$$k = \frac{P}{\pi d^2}\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}\sqrt{1 + \left[\frac{8 \cdot Vv}{Pd}\right]^2}\right).$$

3) Ist der Körper von einer Schubkraft P angegriffen und wird er außerdem auf Biegung in Anspruch genommen, so kann wiederum von Formel 1 b ausgegangen und dabei die Schubspannung τ nach Aufgabe 60 bestimmt werden. Es war die Schubspannung für die neutrale Faserschicht, wenn wir mit δ die Dicke (Breite) des Querschnitts an dieser Stelle bezeichneten, gleich $\frac{\Sigma Y}{J\delta}\sum_0^e f_1\eta$. Für ΣY, die Summe der Verticalkräfte, ist in unserm Falle P zu schreiben, dabei wollen wir eine Faserschicht in der Ent-

fernung η von der neutralen in Betracht ziehen und die betreffende Breite des Querschnitts an dieser Stelle gleich z setzen. Hiernach ist:

$$\tau = \frac{P}{J z} \sum_{\eta}^{e} f_1 \eta.$$

In gleicher Weise ist für σ die Spannung derjenigen Fasern zu setzen, die sich in der Entfernung η von der neutralen befinden, also $\sigma = \eta \frac{Q q}{J}$. Nach diesen Substitutionen erhalten wir aus 1b:

$$k = \tfrac{3}{8} \eta \frac{Q q}{J} + \tfrac{5}{8} \sqrt{\left(\eta \frac{Q q}{J}\right)^2 + \left(\frac{2 P}{J z} \sum_{\eta}^{e} f_1 \eta\right)^2} \text{ oder}$$

$$k = \frac{Q q}{J} \left\{ \tfrac{3}{8} \eta + \tfrac{5}{8} \sqrt{\eta^2 + \left(\frac{2 P}{Q q z} \sum_{\eta}^{e} f_1 \eta\right)^2} \right\}.$$

85. Es ist der Durchmesser d einer gußeisernen Welle zu berechnen, welche ein Torsionsmoment von 1200^{km} zu übertragen hat, und bei welcher der Maximalwerth $(Q q)$ des Spannungsmomentes 1280^{km} beträgt, unter der Voraussetzung, daß die größte irgendwo vorkommende Spannung 500 Kilogr. nicht übersteige.

a) Berechnung auf relative Festigkeit:

$$1280 \cdot 100 = 500 \cdot \frac{\pi}{32} d^3$$

$$d = 13{,}8^{cm}.$$

b) Berechnung auf Torsions-Festigkeit:

$$1200 \cdot 100 = \tfrac{4}{5} \cdot 500 \cdot \frac{\pi}{16} d^3$$

$$d = 11{,}5^{cm}.$$

c) Berechnung auf zusammengesetzte Festigkeit:

$$500 \cdot \frac{\pi}{32} d^3 = \tfrac{3}{8} \cdot 1280 \cdot 100 + \tfrac{5}{8} \cdot 100 \sqrt{1280^2 + 1200^2}$$

$$d = 14{,}8^{cm}.$$

86. Eine Eisenbahnbrücke von 32^m Spannweite soll zwei Blechträger von I Querschnitt erhalten. Derselbe besteht aus Schmiedeeisen und wird als Querschnitt von gleicher Festigkeit construirt, die neutrale Achse liegt also auf der halben Höhe. Nehmen wir dieselbe constant zu $h = 3{,}2^m$, sowie die Breite b (Fig. 385) ebenfalls constant zu $\frac{h}{6} = 0{,}533^m$, so handelt es sich um die Berechnung der Flantschhöhe d und der Dicke δ der Mittelwand, wobei wir noch $\frac{\delta}{d}$ constant gleich $\frac{1}{6}$ nehmen wollen. Die gleichmäßige permanente Last betrage pro Meter 1600 Kilogr., die mobile Belastung durch einen Eisenbahntrain dagegen 3200 Kilogr. pro Meter Länge. Die Spannungsmomente $Q q$ sind am größten bei voller Belastung, die Verticalkräfte ΣY erreichen dagegen ihre größten Werthe, sobald die mobile Last an den betreffenden Querschnitt gelangt.

Es ist nach Aufgabe 60 für einen Querschnitt in der Entfernung x von

dem einen Brückenende, unter der Voraussetzung, daß die mobile Last gerade bis dahin gekommen, die Summe der Verticalcomponenten:

$$\Sigma Y = \tfrac{1}{2} p_1 l - \tfrac{1}{2} p_2 \frac{x^2}{l} - p_1 x$$

und das Spannungsmoment für diesen Querschnitt:

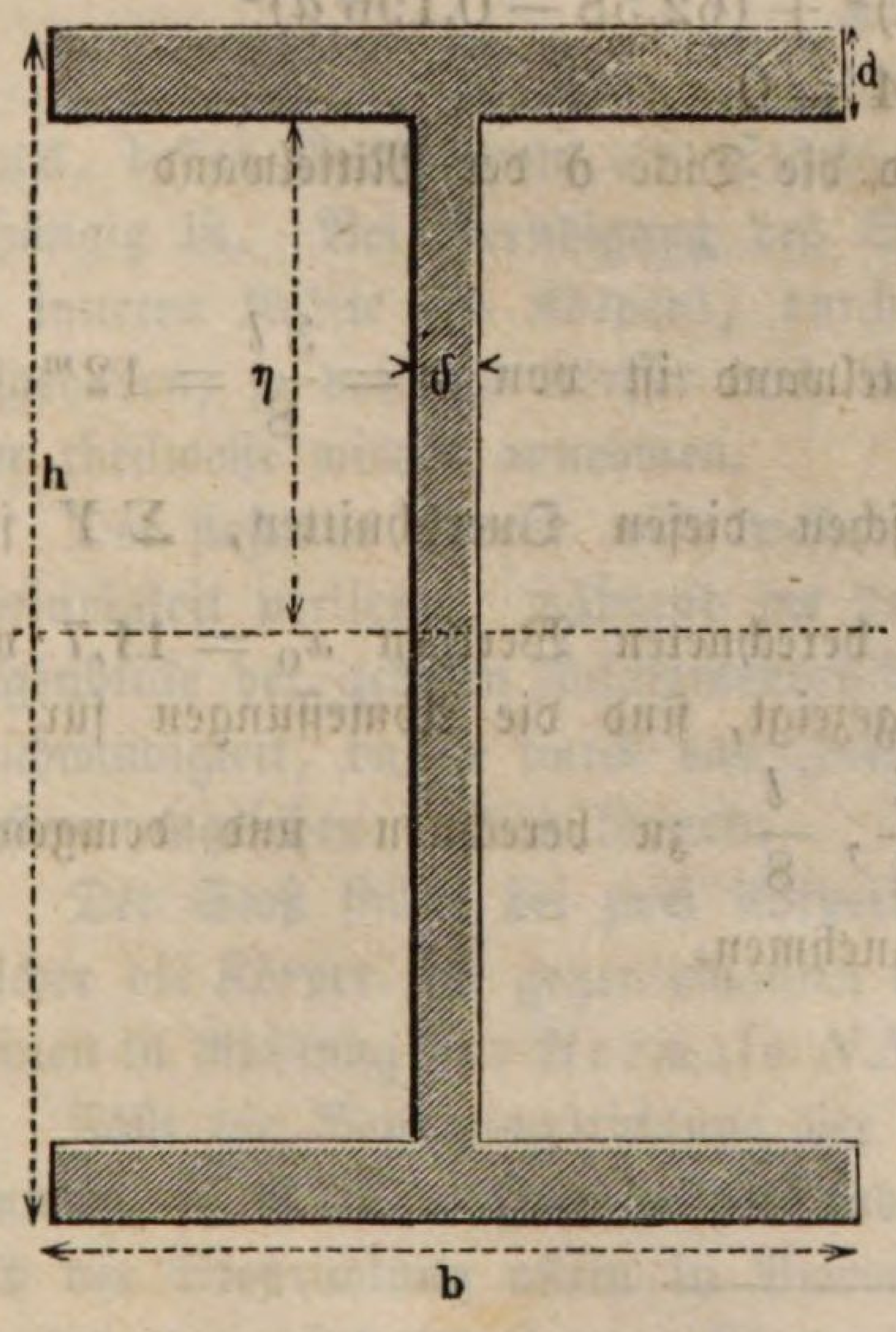
$$Q q = \tfrac{1}{2} p_1 l x + \frac{p_2 - p_1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} p_2 \frac{x^3}{l},$$

da der Druck A auf den Unterstützungspunkt, von dem aus sich die Last bewegt, gleich $\frac{1}{2} p_1 l + p_2 x \frac{2l - x}{2l}$ ist.

Setzen wir in diesen Ausdrücken $p_1 = 1600$ und $p_2 = 3200$ Kilogr., so ergiebt sich für:

$x =$	$\frac{l}{8}$ u. $\frac{7}{8} l$	$\frac{l}{4}$ u. $\frac{3}{4} l$	$\frac{3}{8} l$ u. $\frac{5}{8} l$	$\frac{l}{2}$	x_0 nach Aufgabe 60 $= 11{,}712^m$ und $20{,}288^m$
$Max. \Sigma Y =$	— 58400	— 41600	— 26400	— 12800	— 27441
$Min. \Sigma Y =$	+ 18400	+ 9600	— 800		0
bei voller Belastung ist $\Sigma Y =$	± 57600	± 38400	± 19200	0	± 20582
$Q q =$	11200000 24640000	23040000 38400000	33600000 43200000	40960000	
bei voller Belastung ist $Q q =$	26880000	46080000	57600000	61440000	

Fig. 385.



Führen wir die Rechnung für einen Querschnitt in der Entfernung $x = \frac{3}{8} l$ von dem einen Ende aus, so ist in der unter Nr. 3 der Aufgabe 84 entwickelten Formel $P = 26400$ und $Q q = 43200000$. Für volle Belastung wären dagegen die Werthe 19200 und 57600000 in Rechnung zu bringen. Zur Bestimmung des statischen Momentes $\sum_{\eta}^{e} f_1 \eta$ ist zuerst die Entfernung η von der neutralen Achse zu bestimmen, in welcher durch die doppelte Inanspruchnahme von P und $Q q$, das Material am meisten zu leiden hat. Bei dem vorgelegten Querschnitt ist dies die Uebergangsstelle zwischen der Mittelwand und den Flantschen, da die Längenspannungen hauptsächlich in

den Flantschen, die Schubspannungen dagegen in der Mittelwand auftreten. Es ist demnach $\eta = \frac{h}{2} - d$ und daher $\sum_{\eta}^{e} f_1 \eta = \frac{b}{2} d (h-d)$. Ferner ist das Trägheitsmoment J des Querschnitts gleich:

$$2\left\{\tfrac{1}{3} b \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \tfrac{1}{3}(b-\delta)\left(\frac{h}{2}-d\right)^3\right\} =$$

$$2\left\{\tfrac{1}{3} b \left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(\frac{h}{2}-d\right)^3\right] + \tfrac{1}{3}\delta\left(\frac{h}{2}-d\right)^3\right\} =$$

$$2\left\{b d\left(\frac{h}{2}\right)^2\left[1-\frac{2d}{h}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{2d}{h}\right)^2\right] + \tfrac{1}{3}\delta\left(\frac{h}{2}\right)^2\left[\frac{h}{2}-3d+3\frac{2d^2}{h}-d\left(\frac{2d}{h}\right)^2\right]\right\},$$

oder annähernd gleich

$$2\left\{b d\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \delta\left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{h}{6}\right\}.$$

Unserer Aufgabe gemäß ist aber $\frac{h}{6} = b$ und $\delta = \frac{1}{6} d$, wodurch sich ergiebt: $J = \frac{7}{3} b d \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Endlich ist z in der zu benutzenden Formel gleich $\delta = \frac{1}{6} d$, so daß, wenn wir für k die Annahme machen, daß die Gesammtspannung höchstens 600 Kilogr. betragen soll, die betreffende Gleichung die Form erhält:

$$\frac{600}{Qq}\cdot\tfrac{7}{3} b d \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{8}\left(\frac{h}{2}-d\right) + \tfrac{5}{8}\sqrt{\left(\frac{h}{2}-d\right)^2 + \left[\frac{12P}{Qqd}\frac{bd}{2}(h-d)\right]^2}$$

$$(71{,}4\, d - 96)^2 = (160 - d)^2 + (62{,}58 - 0{,}196\, d)^2$$

$$d^2 - 2{,}6\, d - 4 = 0$$

$d = 3{,}7^{cm}$ und die Dicke δ der Mittelwand

$\delta = 0{,}6^{cm}$.

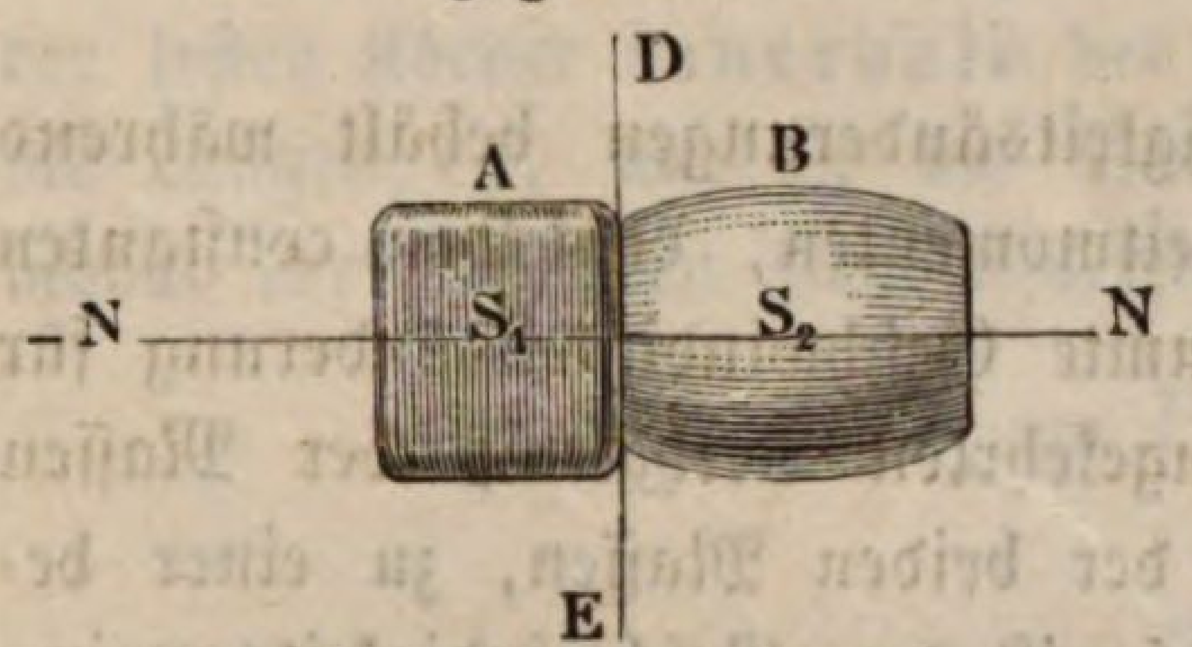
Die erhaltene Stärke δ der Mittelwand ist von $x = \frac{3l}{8} = 12^m$ bis $x = \frac{5l}{8} = 20^m$ zu benutzen, da zwischen diesen Querschnitten, ΣY sein Zeichen ändert, entsprechend den oben berechneten Werthen $x_0 = 11{,}7$ und $20{,}3^m$. In gleicher Weise, wie hier gezeigt, sind die Abmessungen für die Querschnitte in der Entfernung $x = \frac{l}{4}, \frac{l}{8}$ zu berechnen und demgemäß die Construction des Blechträgers vorzunehmen.

Sechstes Capitel.

Stoß fester Körper.

Treffen zwei Körper A und B (Fig. 386), die sich unabhängig von- 73
einander bewegen, während der Bewegung zusammen, so entsteht ein Stoß, d. h. die Körper wirken innerhalb eines Zeitmomentes gegenseitig zerstörend aufeinander ein, wodurch die ursprünglich vorhandenen Geschwindigkeiten der Größe und Richtung nach im Allgemeinen geändert werden. Die Körper bewegen sich daher nach dem Stoße mit veränderter Geschwindigkeit.

Fig. 386.



Durch die gegenseitige Einwirkung der Körper aufeinander erleidet die Oberfläche derselben eine Veränderung, einen Eindruck, dessen Größe von der Stärke des Stoßes und der Art der Körper abhängig ist. Bei Beendigung des Stoßes jedoch wird dieser Eindruck durch die inneren Kräfte des Körpers, durch die Elasticität, ganz oder theilweise aufgehoben, so daß die Körper nach dem Stoße ihre frühere Form vollständig oder theilweise wieder annehmen.

Der stoßende Körper wird während des Stoßes einen Theil seiner Geschwindigkeit verlieren, während die des gestoßenen dabei größer wird. Im Augenblicke der größten Zusammendrückung besitzen beide Körper jedoch dieselbe Geschwindigkeit, da sie durch das Ineinanderdringen als ein fest verbundenes System angesehen werden können.

Der Stoß findet bei zwei Körpern stets allein in der Richtung statt, in welcher die Körper sich gegen einander nicht verschieben können, d. h. im Allgemeinen in Richtung der Normale NN zur Berührungsebene DE der Körper.

Fällt die Bewegungsrichtung der Körper mit der Stoßrichtung nicht zusammen, so ist die erstere entsprechend zu zerlegen, wobei die Componenten nach der Stoßrichtung allein in Betracht kommen, da hier eine Geschwindigkeitsänderung eintreten kann. Hiernach werden wir bei den folgenden Unter-

suchungen die Bewegungsrichtungen mit der Stoßrichtung zusammenfallen lassen, da die in anderen Fällen nothwendige Zerlegung keine Schwierigkeit hat. Außerdem möge vorausgesetzt werden, daß die Verbindungslinie der Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Körper bei dem Stoße normal zur Berührungsebene DE derselben sei. Der hier zunächst zur Behandlung kommende Stoß heißt der gerade Centralstoß.

Einem Körper von der Masse m_1, der die Geschwindigkeit c_1 hat, folge ein zweiter von der Masse m_2 mit der Geschwindigkeit c_2. Setzen wir c_2 größer als c_1 voraus, so wird der zweite Körper den ersten einholen und es wird ein Stoß erfolgen. An der Berührungsstelle entstehen Druckkräfte, durch welche die vorhandenen Bewegungen der Körper allmälig eine Aenderung erfahren. Die in den beiden Massen m_1 und m_2 entwickelten Drucke sind, nach dem Gesetze der Wechselwirkung der Kräfte, jederzeit gleich groß und haben entgegengesetzte Richtung. Bezeichnen wir diesen Druck in einem beliebigen Augenblicke des Stoßes mit P, die betreffenden Geschwindigkeitsänderungen mit j_1 und j_2, so ist n. F. 30, $j_1 = \frac{P}{m_1}$ und $j_2 = \frac{P}{m_2}$, daher ergiebt sich nach Elimination von P:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

d. h. das Verhältniß der beiden Geschwindigkeitsänderungen behält während der ganzen Stoßdauer, in den einzelnen Zeitmomenten, denselben constanten Werth, und es muß deshalb auch die gesammte Geschwindigkeitsänderung für eine beliebige Zeit des Stoßes, diesem umgekehrten Verhältniß der Massen gleich sein. Es seien die Geschwindigkeiten der beiden Massen, zu einer beliebigen Zeit der Stoßwirkung, v_1 und v_2, so ist der Geschwindigkeitsgewinn der Masse m_1 gleich $v_1 - c_1$ und der Geschwindigkeitsverlust der zweiten Masse m_2 beträgt $c_2 - v_2$. Beides sind die während der betrachteten Zeitdauer stattgefundenen Geschwindigkeitsänderungen, so daß wir als Ausgangsgleichung erhalten:

$$\frac{v_1 - c_1}{c_2 - v_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ oder:}$$

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \ldots \ldots \quad (152)$$

d. h. die Summe der Bewegungsgrößen der sich stoßenden Körper, ist in einem beliebigen Momente des Stoßes, gleich der Summe der Bewegungsgrößen zu Anfang desselben.

Ist die im Augenblicke der größten Zusammendrückung beiden Körpern gemeinschaftliche Geschwindigkeit v, so erhält man:

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = (m_1 + m_2) v,$$

d. h.

$$v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}.$$

Wir nehmen die zum Stoße kommenden Körper als unvollkommen elastisch an.

Die Praxis rechtfertigt diese Annahme, da es weder vollkommen elastische noch vollkommen unelastische Körper giebt, wenn man auch der Sicherheit wegen bei den Rechnungen in der Praxis die Körper oft als vollkommen hart oder unelastisch annehmen muß.

Die durch den Stoß hervorgerufenen Eindrücke werden für diese Annahme nur theilweise wieder aufgehoben, es geht also ein Theil der darauf verwendeten Arbeit, d. h. der vorhandenen lebendigen Kraft, verloren. Nennen wir diesen Arbeitsverlust V, die den Massen m_1 und m_2 nach dem Stoße beigebrachten Geschwindigkeiten v_1 und v_2, so gilt einmal §. 152:

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

und dann die Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$\tfrac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) = \tfrac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) + V \quad . \quad . \quad (153)$$

Es sei P der die Formänderung bewirkende Druck oder der entgegengestellte Widerstand; s_1 und s_2 mögen die Größe der Eindrücke in den beiden Körpern nach der Stoßrichtung bezeichnen, so ist die beim Zusammendrücken verrichtete Arbeitgröße, da der Widerstand P allmälig von 0 bis P wächst:

$$\tfrac{1}{2} P (s_1 + s_2) = \tfrac{1}{2} P s_1 + \tfrac{1}{2} P s_2.$$

Nach den Untersuchungen über die Ausdehnung und Zusammendrückung der festen Körper innerhalb der Elasticitätsgrenze haben wir, unter l_1 und l_2 die Längen, f_1 und f_2 die Querschnitte und E_1 und E_2 die Elasticitätsmodul der stoßenden Körper verstanden:

$$s_1 = P \frac{l_1}{f_1 E_1}$$

$$s_2 = P \frac{l_2}{f_2 E_2},$$

daher ist die zur Formänderung nothwendige Arbeitgröße $\tfrac{1}{2} P (s_1 + s_2)$ gleich

$$\tfrac{1}{2} P^2 \left(\frac{l_1}{f_1 E_1} + \frac{l_2}{f_2 E_2}\right).$$

Beide Körper nehmen hierbei dieselbe Geschwindigkeit $v = \dfrac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$ an, und es ist deshalb die zur Formänderung nothwendige Arbeitgröße zweitens:

$$\tfrac{1}{2}(m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) - \tfrac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Durch Gleichsetzung beider Werthe sind wir im Stande, den größten Druck P zu finden, der, durch den Stoß hervorgerufen, die Formänderung der beiden Körper bewirkt:

$$\tfrac{1}{2} P^2 \left(\frac{l_1}{f_1 E_1} \quad \frac{l_2}{f_2 E_2}\right) = \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$P = (c_2 - c_1) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{f_1 E_1 \cdot f_2 E_2}{f_2 l_1 E_2 + f_1 l_2 E_1}} \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

Die Größe der ganzen Zusammendrückung s, gleich $s_1 + s_2$ ist aber nach Einsetzung des Werthes von P:

$$s = (c_2 - c_1)\sqrt{\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{f_2\, l_1\, E_2 + f_1\, l_2\, E_1}{f_1\, E_1 \,.\, f_2\, E_2}} \quad . \quad . \quad (155)$$

Die Masse m_1 möge das $n_1$fache, die Masse m_2 das $n_2$fache der auf Formänderung verbrauchten Arbeit zurückerhalten, unter n_1 und n_2 echte Brüche verstanden.

Der Arbeitverlust V ist dann:

$$V = \tfrac{1}{2} P[(1-n_1)\, s_1 + (1-n_2)\, s_2]$$

$$V = \tfrac{1}{2} P^2 \left(\frac{1-n_1}{f_1\, E_1} l_1 + \frac{1-n_2}{f_2\, E_2} l_2\right).$$

Hierin statt P den oben gefundenen Werth gesetzt, so entsteht:

$$V = \tfrac{1}{2}\,(c_2 - c_1)^2 \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{f_2\, l_1\, E_2\,(1-n_1) + f_1\, l_2\, E_1\,(1-n_2)}{f_2\, l_1\, E_2 + f_1\, l_2\, E_1},$$

wofür wir zur Abkürzung schreiben wollen:

$$V = \tfrac{1}{2}\,(c_2 - c_1)^2 \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

74 Die beiden an die Spitze gestellten Gleichungen 152 und 153 können nun nach Substitution des Arbeitverlustes V zur Berechnung der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße benutzt werden.

Aus der ersten Gleichung ist:

$$m_1\,(v_1 - c_1) = m_2\,(c_2 - v_2).$$

Bezeichnen wir den Geschwindigkeitsgewinn $v_1 - c_1$ des gestoßenen Körpers mit x, so ist der Geschwindigkeitsverlust:

$$c_2 - v_2 = \frac{m_1}{m_2}\, x,$$

n. F. 153 ist:

$$m_2\,(c_2{}^2 - v_2{}^2) - m_1\,(v_1{}^2 - c_1{}^2) - 2\,V = 0,$$

worin wir statt v_1, $x + c_1$, und statt v_2, $c_2 - \frac{m_1}{m_2} x$ schreiben:

$$m_2\left[c_2{}^2 - \left(c_2 - \frac{m_1}{m_2} x\right)^2\right] - m_1\,[(x + c_1)^2 - c_1{}^2] - 2\,V = 0$$

$$x^2 - 2\,x \frac{m_2}{m_1 + m_2}(c_2 - c_1) + 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{m_1}\, V = 0.$$

Substituiren wir für V den in F. 156 bestimmten Werth, so entsteht:

$$x^2 - 2\,x \frac{m_2}{m_1 + m_2}(c_2 - c_1) + (c_2 - c_1)^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 q = 0$$

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,(c_2 - c_1)\,\left(1 + \sqrt{1 - q}\right).$$

Hieraus ergiebt sich die Geschwindigkeit v_1 der gestoßenen Masse m_1 nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 + (c_2 - c_1)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sqrt{1 - q}).$$

Der Geschwindigkeitsverlust des stoßenden Körpers ist:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}(c_2 - c_1)(1 + \sqrt{1 - q}).$$

Die Geschwindigkeit v_2 selbst aber

$$v_2 = c_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(c_2 - c_1)(1 + \sqrt{1 - q}).$$

Aus den allgemeinen Formeln für v_1 und v_2 lassen sich leicht die entsprechenden Werthe für specielle Fälle finden.

Haben beide Körper gleichen Grad der Elasticität, so ist in dem Ausdrucke für q, $n_1 = n_2$ gleich n zu setzen. Dadurch erhalten wir: $q = 1 - n$ und

$$v_1 = c_1 + (c_2 - c_1)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sqrt{n})$$

$$v_2 = c_2 - (c_2 - c_1)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 + \sqrt{n}).$$

Befand sich hierbei die Masse m_1 in Ruhe und war dieselbe im Verhältniß zu m_2 sehr groß, so wird

$$v_1 = 0$$
$$v_2 = -c_2\sqrt{n},$$

d. h. die große Masse bleibt in Ruhe, die andere bewegt sich ihrer ursprünglichen Richtung entgegengesetzt. Der letzte Ausdruck kann zur Bestimmung des Elasticitätsgrades n benutzt werden:

$$n = \frac{v_2^2}{c_2^2} = \frac{v_2^2 : 2g}{c_2^2 : 2g}$$

$$n = \frac{h_2}{h_1},$$

unter h_1 die Höhe verstanden, von welcher man die Masse m_2 herabfallen lassen muß, um beim Aufschlagen die Geschwindigkeit c_2 zu besitzen, während h_2 die Höhe bezeichnet, um welche die Masse m_2 nach dem Stoße zurückspringt.

Nehmen wir für m_1 die Platten-, für m_2 die Kugelform, so sind statt n die in der folgenden Tabelle angegebenen Werthe zu benutzen, die durch Versuche auf die oben angegebene Weise gefunden worden sind.

	Werth von n.
Elfenbein	0,78
Glas	0,879
Kork, Stahl, Wolle	0,309
Holz	fast $= 0$
Gußeisen	fast $= 1$

Setzen wir die beiden zum Stoß kommenden Körper als vollkommen elastisch voraus, so ist:

$$n_1 = n_2 = 1,$$

q wird daher gleich 0, und wir erhalten:

$$v_1 = \frac{2\,m_2\,c_2 + (m_1 - m_2)\,c_1}{m_1 + m_2}$$

und

$$v_2 = \frac{2\,m_1\,c_1 + (m_2 - m_1)\,c_2}{m_1 + m_2}.$$

Sind die beiden Körper vollkommen unelastisch, so ist $n_1 = n_2 = 0$, $q = 1$ und

$$v_1 = \frac{m_1\,c_1 + m_2\,c_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{m_1\,c_1 + m_2\,c_2}{m_1 + m_2}.$$

Es wird hierbei also $v_1 = v_2$ gleich der Geschwindigkeit v, welche die Körper im Augenblicke der größten Zusammendrückung besitzen.

Der bei dem Zusammenstoße zweier Körper stattfindende Arbeitsverlust V, dessen Werth wir oben bestimmt haben, tritt in der Praxis jederzeit ein, da wir hier die Körper niemals als vollkommen elastisch voraussetzen dürfen, woraus sich die Regel für die praktischen Constructionen von selbst ergiebt, daß Stöße in einer Maschine so viel als möglich zu vermeiden sind. Für unvollkommen elastische Körper ist:

$$V = \tfrac{1}{2}\,(c_2 - c_1)^2\,\frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,q,$$

für vollkommen elastische dagegen:

$$V = 0,$$

für vollkommen unelastische aber:

$$V = \tfrac{1}{2}\,(c_2 - c_1)^2\,\frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}.$$

Der auf Formänderung wirksame Druck, oder der Widerstand, der sich demselben entgegenstellt, ist stets gleich dem oben entwickelten Werthe P, ebenso hat die Größe der Zusammendrückung stets den obigen Werth s, so lange die Grenze der Elasticität nicht überschritten wird.

Führen wir in den erhaltenen Resultaten die Geschwindigkeiten c_1 oder c_2 der beiden Körper mit entgegengesetztem Zeichen ein, so beziehen sich die Formeln auf zwei Körper, die sich gegeneinander bewegen und zum Stoße gelangen.

Liegen die Schwerpunkte der beiden zum Stoß kommenden Körper nicht in der Stoßrichtung, so entstehen nicht allein Aenderungen in den Geschwindigkeiten, die sich durch Anwendung obiger Formeln ergeben; es werden auch außerdem, beide Körper als vollkommen frei vorausgesetzt, drehende Bewegungen um die Schwerpunkte der Körper hervorgerufen werden. Für diese gelten die obigen Formeln in gleicher Weise, nur hat man vor der Anwendung derselben die Massen der Körper auf den Punkt des Zusammenstoßes zu reduciren und diese reducirten Massen statt m_1 und m_2 in Rechnung zu bringen.

Es ist hiernach im Allgemeinen bei zwei Körpern A und B, die sich geradlinig bewegen, ein vierfacher Stoß möglich:

1) der gerade Centralstoß (Fig. 387),
2) der schiefe Centralstoß (Fig. 388),
3) der gerade excentrische Stoß (Fig. 389),
4) der schiefe excentrische Stoß.

Fig. 387.

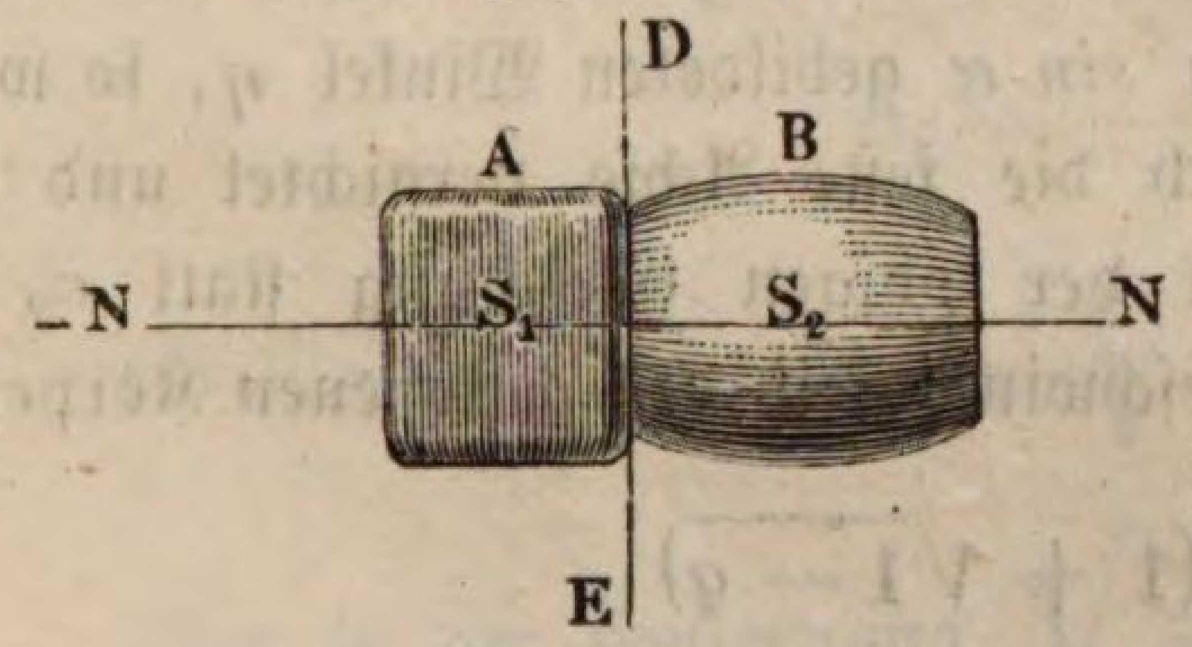


Fig. 389.

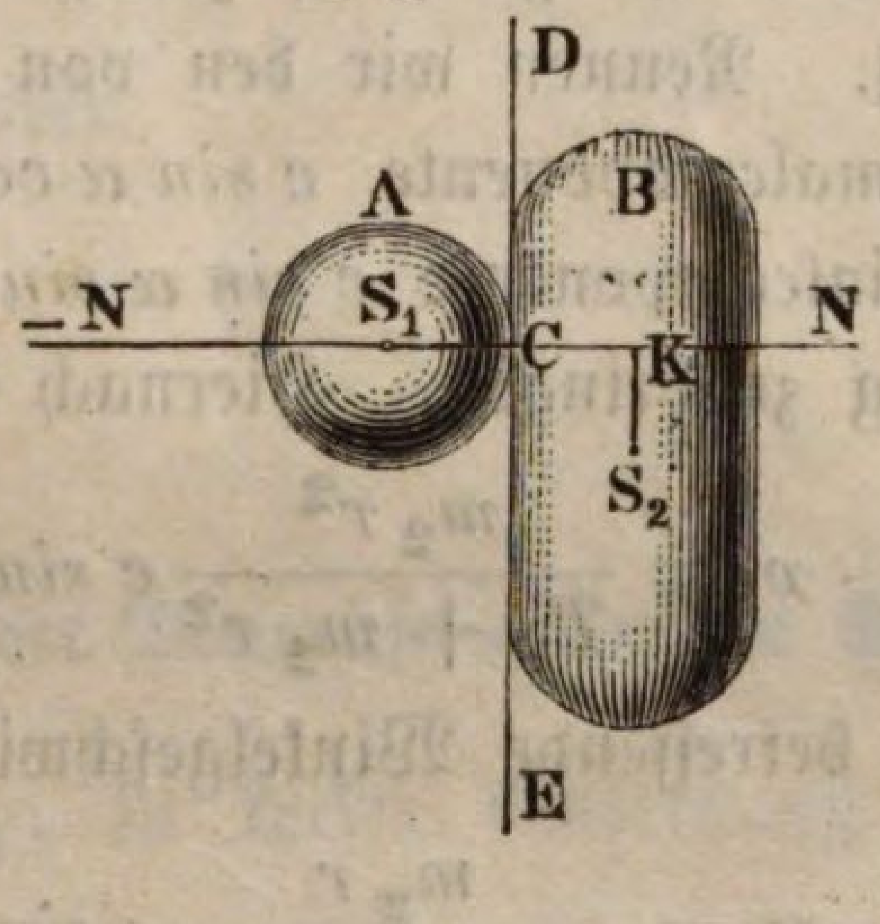


Fig. 388.

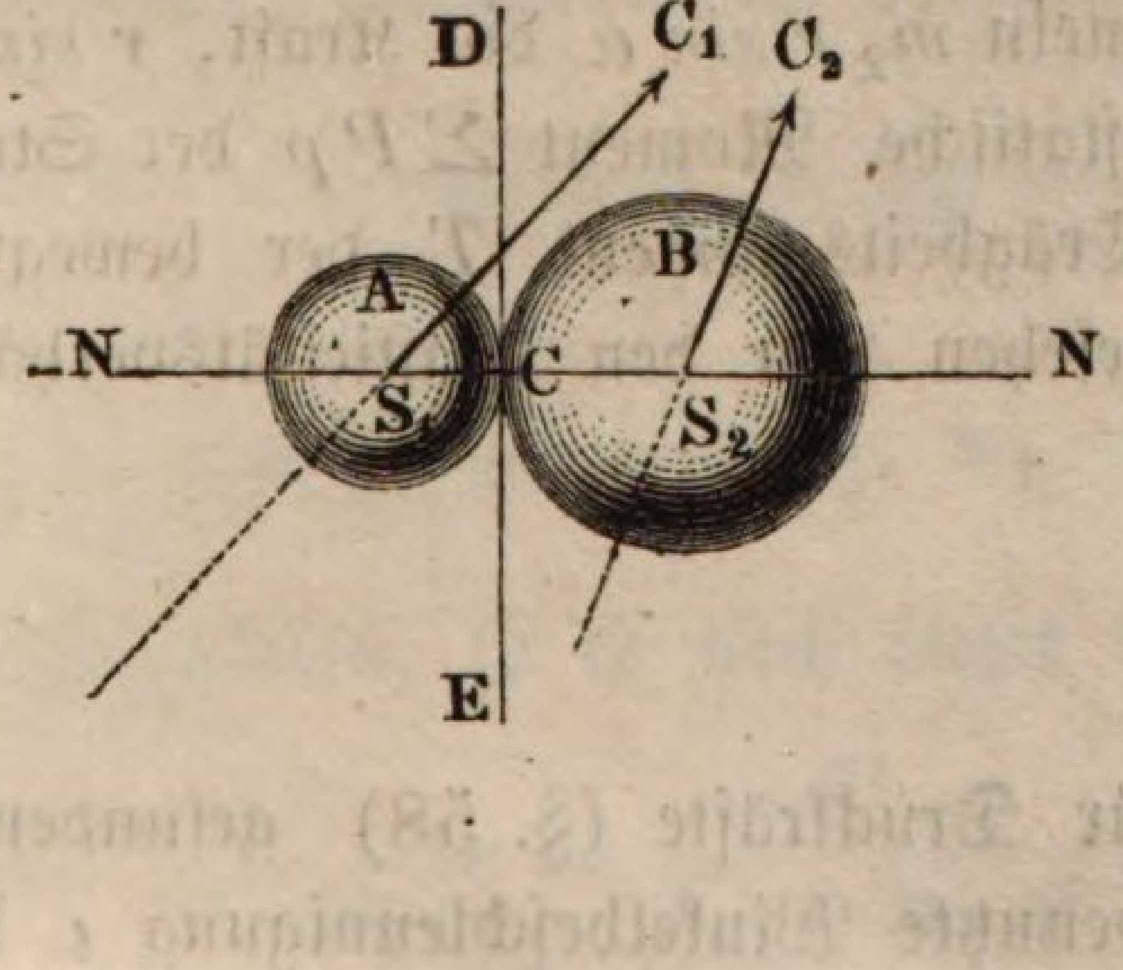
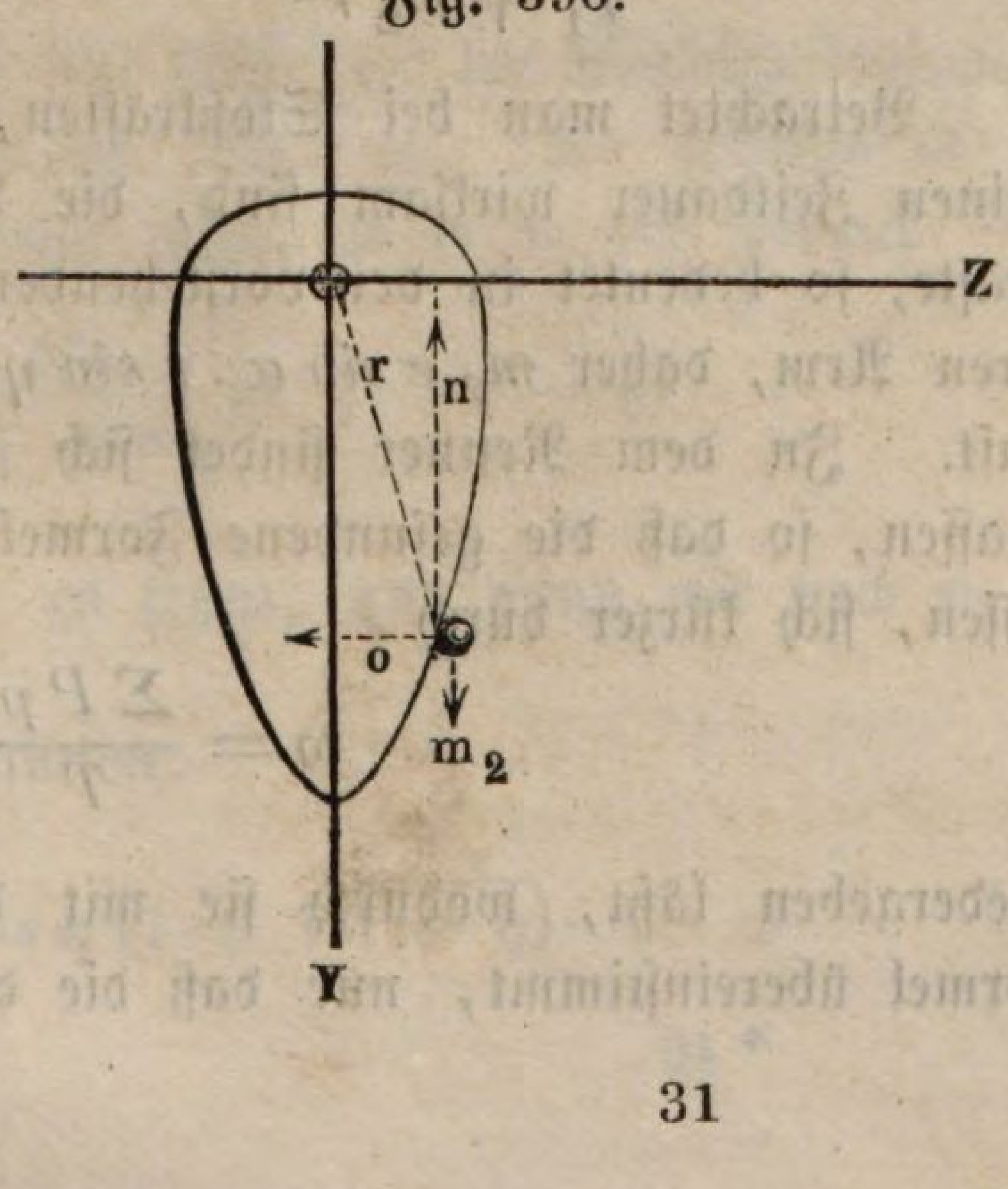


Fig. 390.



75 Ein Körper von der Masse m_1, der gezwungen ist, sich um eine feste Achse zu drehen, erleide durch einen Körper von der Masse m_2 (Fig. 390 a. v. S.) einen Stoß. Der letztere treffe die Masse m_1 mit der Geschwindigkeit c, während diese ruhend vorausgesetzt werden mag. Die feste Achse nehmen wir als X-Achse des Systems, der Punkt des Zusammenstoßes habe die Coordinaten l, n, o und die Stoßrichtung bilde mit den Achsen die Winkel α, β, γ.

Die Geschwindigkeit v der gestoßenen Masse m_1, welche der Annahme gemäß nur eine drehende Bewegung um die feste Achse erfährt, ist nach dem vorigen Paragraph:

$$v = c_1 + (c_2 - c_1)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sqrt{1-q}).$$

Hierin ist, da die Masse m_1 im ruhenden Zustande vorausgesetzt wurde, $c_1 = 0$ zu setzen, und andererseits ist die Masse m_1 auf den getroffenen Punkt, der sich in der Entfernung r von der Drehachse befindet, zu reduciren. Bezeichnen wir daher mit T_1 das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers, in Bezug auf die Drehachse, so ist $m_1 = \frac{T_1}{r^2}$. Zur Bestimmung von c_2 denken wir die Geschwindigkeit c der stoßenden Masse nach Richtung der X-Achse und normal dazu zerlegt. Die erstere Componente $c \,.\, cos\, \alpha$ hat auf die Bewegung keinen Einfluß, die letztere $c \,.\, sin\, \alpha$, in einer zur Drehachse normalen Ebene gelegen, zerlege man weiter nach tangentialer und normaler Richtung. Nennen wir den von r und $c\, sin\, \alpha$ gebildeten Winkel η, so wird die Normalcomponente $c\, sin\, \alpha\, cos\, \eta$ durch die feste Achse vernichtet und die Tangentialcomponente $c\, sin\, \alpha\, sin\, \eta$ ist in der obigen Gleichung statt c_2 in Rechnung zu bringen. Hiernach ist die Geschwindigkeit des gestoßenen Körpers:

$$v = \frac{m_2\, r^2}{T_1 + m_2\, r^2}\, c\, sin\, \alpha\, sin\, \eta\, (1 + \sqrt{1 - q})$$

und die betreffende Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{m_2\, r}{T_1 + m_2\, r^2}\, c\, sin\, \alpha\, sin\, \eta\, (1 + \sqrt{1 - q}).$$

Betrachtet man bei Stoßkräften, welche nur während einer unendlich kleinen Zeitdauer wirksam sind, die Bewegungsgröße als das Maß der Kräfte, so bedeutet in den vorstehenden Formeln $m_2\, c\, sin\, \alpha$ die Kraft, $r\, sin\, \eta$ deren Arm, daher $m_2\, c\, sin\, \alpha \,.\, r\, sin\, \eta$ das statische Moment ΣPp der Stoßkraft. In dem Nenner findet sich das Trägheitsmoment T der bewegten Massen, so daß die gefundene Formel, abgesehen von den Elasticitätsverhältnissen, sich kürzer durch

$$\omega = \frac{\Sigma Pp}{T}$$

wiedergeben läßt, wodurch sie mit der für Druckkräfte (§. 58) gefundenen Formel übereinstimmt, nur daß die dort benutzte Winkelbeschleunigung ι bei

Stoßkräften durch die Winkelgeschwindigkeit ω ersetzt wurde. Denkt man ΣPp direct aus der gegebenen Stoßkraft $m_2 c$ durch Zerlegung nach den drei Achsen entwickelt, so findet sich der Figur gemäß:

$$\Sigma Pp = m_2 c \, (o \, . \cos \beta - n \, . \cos \gamma).$$

Die Größe der gefundenen Winkelgeschwindigkeit ω ändert sich dem oben gefundenen Ausdruck zufolge, abgesehen von den anderen maßgebenden Werthen, mit der Entfernung r des getroffenen Punktes von der Drehachse. Soll unter den obwaltenden Verhältnissen ω ein Maximum werden, so muß hiernach $\frac{r}{T_1 + m_2 r^2}$ ein Maximum oder $\frac{T_1}{r} + m_2 r$ ein Minimum sein.

Zur Bestimmung des gesuchten Werthes von r ist

$$lim \frac{\frac{T_1}{r} + m_2 r - \left(\frac{T_1}{r_1} + m_2 r_1\right)}{r - r_1} = 0 \text{ zu setzen.}$$

Es ist aber

$$\frac{\frac{T_1}{r} + m_2 r - \left(\frac{T_1}{r_1} + m_2 r_1\right)}{r - r_1} = \frac{m_2 (r - r_1) - \frac{T_1 (r - r_1)}{r_1 r}}{r - r_1},$$

daher der Grenzwerth, für $r = r_1$

$$m_2 - \frac{T_1}{r^2} = 0 \text{ oder}$$

$$r = \sqrt{\frac{T_1}{m_2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (157)$$

Der in der Entfernung $\sqrt{\frac{T_1}{m_2}}$ von der Drehachse getroffene Punkt heißt **Stoßpunkt** und erhält also die Masse m_1, in dieser Entfernung getroffen, die größtmöglichste Geschwindigkeit.

Trifft umgekehrt der sich um eine feste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehende Körper einen Körper von der Masse m_2, der dadurch in eine geradlinig fortschreitende Bewegung versetzt wird, so ist in der Formel

$$v_1 = c_1 + (c_2 - c_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{1 - q})$$

$c_1 = r \, \omega \cos \eta$; $c_2 = 0$; $m_1 = \frac{T_1}{r^2}$ zu setzen, und wenn wir noch v_1 mit c bezeichnen, so ist nach dieser Substitution:

$$c = \frac{T_1}{T_1 + m_2 r^2} r \, \omega \cos \eta \, (1 + \sqrt{1 - q}).$$

Die größtmöglichste Geschwindigkeit ergiebt sich hier wieder für

$$r = \sqrt{\frac{T_1}{m_2}},$$

weshalb der schwingende Körper zur Hervorbringung derselben wieder wie im vorigen Falle mit seinem Stoßpunkte die Masse m_2 treffen muß.

Bringen wir den erhaltenen Ausdruck für c auf folgende Form:

$$c = \frac{\frac{T_1}{r^2}\, r\, \omega \cos \eta}{\frac{T_1}{r^2} + m_2}\left(1 + \sqrt{1 - q}\right),$$

so bedeutet der Nenner die zu bewegende Masse m, der Zähler dagegen die Bewegungsgröße des stoßenden Körpers, so daß wir wiederum Uebereinstimmung mit der in §. 57 für Druckkräfte aufgestellten Formel finden, wenn die Bewegungsgröße als Maß der Stoßkräfte angesehen und die Geschwindigkeitsänderung j durch die Geschwindigkeit c selbst ersetzt wird. Die Formel hat, die Bewegungsgröße kurz mit P bezeichnend, die Form:

$$c = \frac{P}{m}.$$

76 In den beiden zuletzt behandelten Fällen hat die feste Drehachse durch den hervorgerufenen Stoß verschiedene Kräfte aufzuheben, und daher selbst durch diese Zerstörung der Kräfte, den Stoß auszuhalten.

In Richtung der Drehachse wirkt die Stoßkraft $m_2\, c \cos \alpha$, welche ein Verschieben der Drehachse, in ihren Lagern, hervorzurufen sucht. Der dadurch entstehende Stoß ist sogleich vermieden, wenn die Wirkung der Stoßkraft in einer zur Drehachse normalen Richtung erfolgt. Für diese Annahme wird die durch den Stoß hervorgerufene Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{r}{T_1 + m_2 r^2} m_2\, c \sin \eta.$$

Zerlegt man jetzt die Stoßkraft, welche mit dem Drehungshalbmesser r des getroffenen Punktes den Winkel η bildet (Fig. 391), nach Richtung des Drehungshalbmessers und normal dazu, so wird die letztere Componente allein Bewegung verursachen, die erstere dagegen die Drehachse zu zerbrechen suchen. Soll das vermieden werden, so muß η gleich $1\,R$ sein, die Stoßkraft also tangential zu dem Kreisbogen wirken, den der getroffene Punkt beschreiben würde. In diesem Falle ist:

$$\omega = \frac{r}{T_1 + m_2 r^2} m_2\, c.$$

Stößt andererseits der schwingende Körper gegen den fortschreitenden (Fig. 392), so liegt zwar die Stoßkraft in einer zur Drehachse normalen Ebene, es geht jedoch die Componente $\frac{T_1}{r^2}\, r\, \omega \sin \eta$ für die Bewegung ver-

loren. Um dies zu verhindern und andererseits die aus der Componente nach Richtung der Bewegung hervorgerufene Reaction gegen die Drehachse zu vernichten, muß $\eta = 0$ gesetzt werden, d. h. es muß auch hier die fortschreitende

Fig. 391.

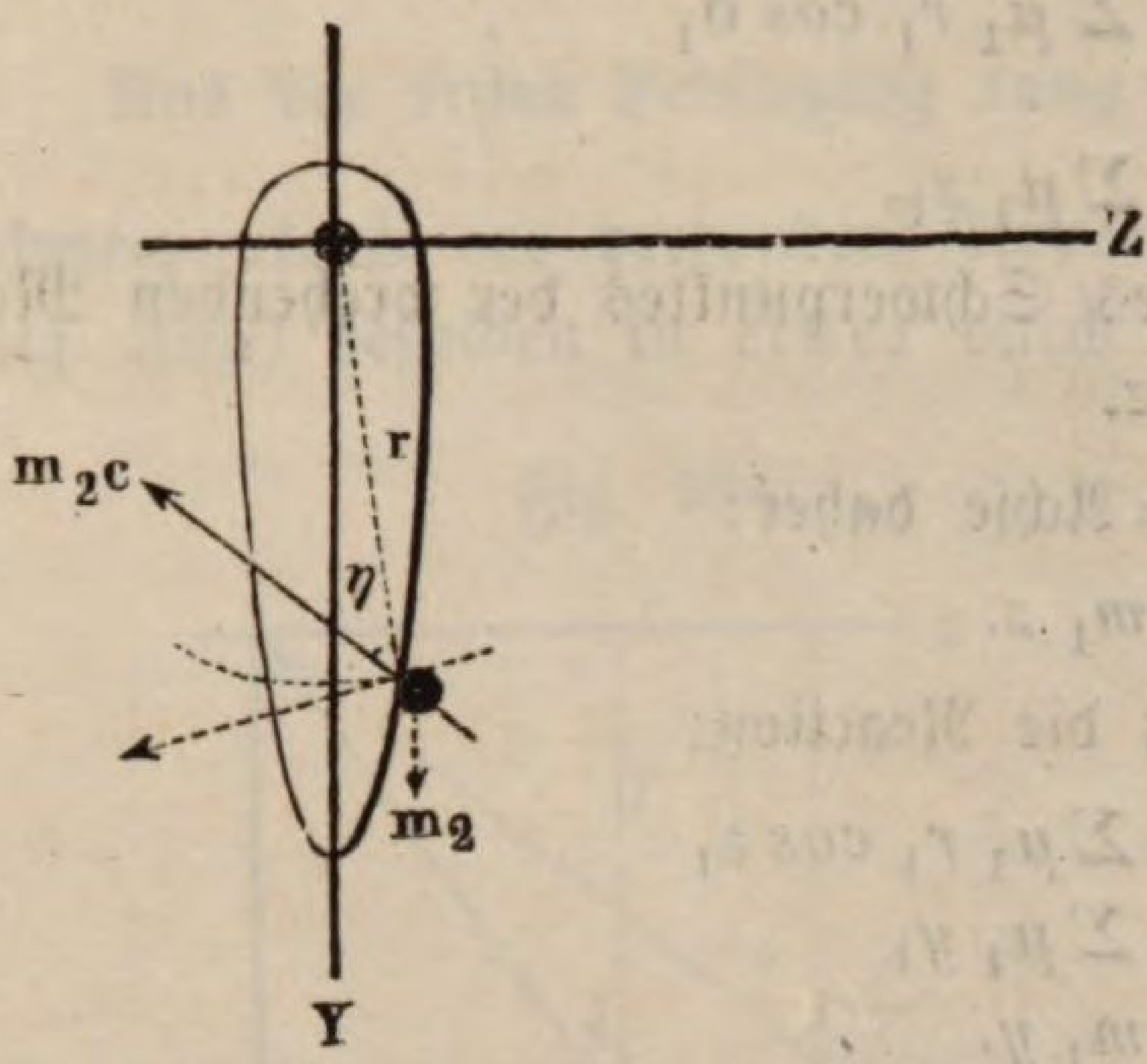
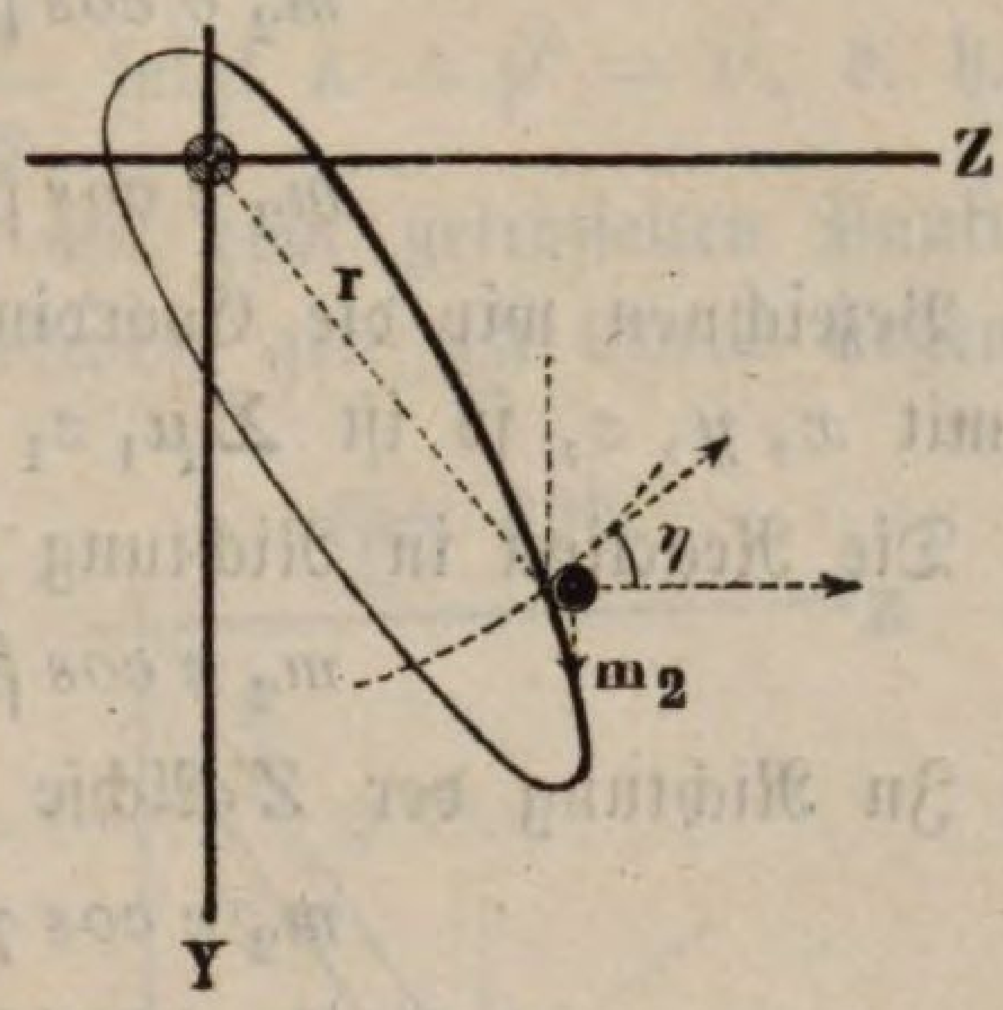


Fig. 392.

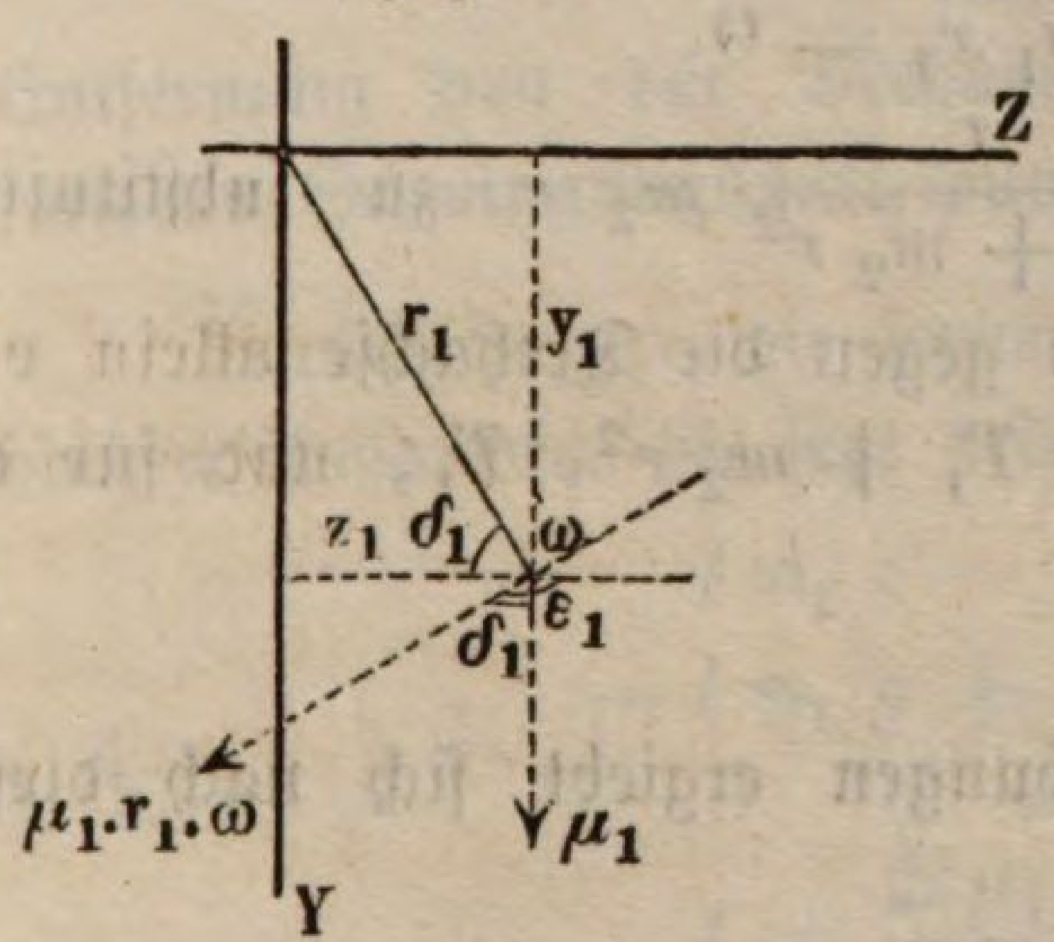


Bewegung der Masse m_2, in tangentialer Richtung des, vom getroffenen Punkte beschriebenen Kreisbogens erfolgen. Für diese Voraussetzung ist die Geschwindigkeit c der Masse m_2 nach dem Stoße:

$$c = \frac{T_1}{T_1 + m_2 r^2} r \omega.$$

Nachdem wir auf diese Weise die Richtung und Lage der Stoßkraft so 77
bestimmt haben, daß keine ihrer Componenten verloren geht und stoßend auf die Drehachse wirkt, werden die einzelnen Massenelemente, durch den Stoß plötzlich in eine andere Geschwindigkeit versetzt, allein noch eine Reaction auf die Drehachse äußern können. Diese entsteht durch die gegenseitige Zerstörung der ursprünglich angebrachten Kräfte mit den Gegenkräften der Bewegung. Um die Reaction zu bestimmen, bezeichnen wir die einzelnen Massenelemente des um die feste Achse schwingenden Körpers (Fig. 393) mit $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$, ihre Entfernungen von der Drehachse mit $r_1, r_2, r_3 \ldots$, ihre Coordinaten mit x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; $x_3, y_3, z_3 \ldots$

Fig. 393.



Für diese Annahmen sind die tangentialen bewegenden Kräfte bei der vorhandenen Winkelgeschwindigkeit ω, $\mu_1 r_1 \omega$, $\mu_2 r_2 \omega$, $\mu_3 r_3 \omega$ u. s. w. Die Winkel, welche dieselben mit der Y- und Z-Achse bilden, seien δ_1, ε_1; δ_2, ε_2; $\delta_3, \varepsilon_3 \ldots$

Nehmen wir zuerst den Fall, daß der um die feste Achse drehbare Körper

gestoßen wird, nennen die Coordinaten des getroffenen Punktes wie oben l, n, o; seine Entfernung von der Drehachse r und die Winkel, welche die Stoßkraft mit der Y-und Z-Achse bildet, β und γ, so ist die Reaction in Richtung der Y-Achse:

$$m_2\, c \cos\beta - \omega\, \Sigma\, \mu_1\, r_1 \cos\delta_1$$

oder

$$m_2\, c \cos\beta - \omega\, \Sigma\, \mu_1\, z_1.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Schwerpunktes der drehenden Masse m_1 mit x, y, z, so ist $\Sigma\, \mu_1\, z_1 = m_1\, z$.

Die Reaction in Richtung der Y-Achse daher:

$$m_2\, c \cos\beta - \omega\, m_1\, z.$$

In Richtung der Z-Achse entsteht die Reaction:

$$\begin{aligned} & m_2\, c \cos\gamma - \omega\, \Sigma\, \mu_1\, r_1 \cos\varepsilon_1 \\ = {} & m_2\, c \cos\gamma + \omega\, \Sigma\, \mu_1\, y_1 \\ = {} & m_2\, c \cos\gamma + \omega\, m_1\, y. \end{aligned}$$

Außer diesen Reactionen selbst sind noch die hieraus hervorgehenden Paare in Betracht zu ziehen. Diese sind:

a) für die Reactionen parallel der Y-Achse:

$$l\, m_2\, c \cos\beta - \omega\, \Sigma\, \mu_1\, z_1\, x_1;$$

b) für die Reactionen parallel der Z-Achse:

$$l\, m_2\, c \cos\gamma + \omega\, \Sigma\, \mu_1\, y_1\, x_1.$$

Sollen hiernach sämmtliche Stoßwirkungen auf die Drehachse verschwinden, so müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} m_2\, c \cos\beta - \omega\, m_1\, z &= 0 \\ m_2\, c \cos\gamma + \omega\, m_1\, y &= 0 \\ l\, m_2\, c \cos\beta - \omega\, \Sigma\, \mu_1\, z_1\, x_1 &= 0 \\ l\, m_2\, c \cos\gamma + \omega\, \Sigma\, \mu_1\, y_1\, x_1 &= 0, \end{aligned}$$

worin statt ω der oben gefundene Werth $\frac{r}{T_1 + m_2\, r^2}\, m_2\, c$ zu substituiren wäre. Beachtet man jedoch, daß die Reaction gegen die Drehachse allein von der bewegten Masse m_1 herrührt, so ist statt $T_1 + m_2\, r^2$, T_1, und für die Winkelgeschwindigkeit ω, $\frac{r}{T_1}\, m_2\, c$ zu setzen.

Aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen ergiebt sich nach dieser Substitution (Fig. 394):

$$\cos\beta = \frac{r}{T_1}\, m_1\, z = \sin\gamma'$$

$$\cos\gamma = -\frac{r}{T_1}\, m_1\, y = -\cos\gamma'.$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen entsteht:

$$\operatorname{tang}\gamma' = \frac{z}{y}.$$

Durch Addition erhält man andererseits, nachdem die Gleichungen quadrirt sind:

$$r = \frac{T_1}{m_1 \sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Aus der ersten Bedingung $tang\, \gamma' = \frac{z}{y}$ folgt $\lambda = \gamma' = \nu$, d. h. der Schwerpunkt S des drehenden Körpers muß mit dem getroffenen Punkte A (Fig. 395) desselben in einer durch die Drehachse gelegten Ebene liegen, zu-

Fig. 394.

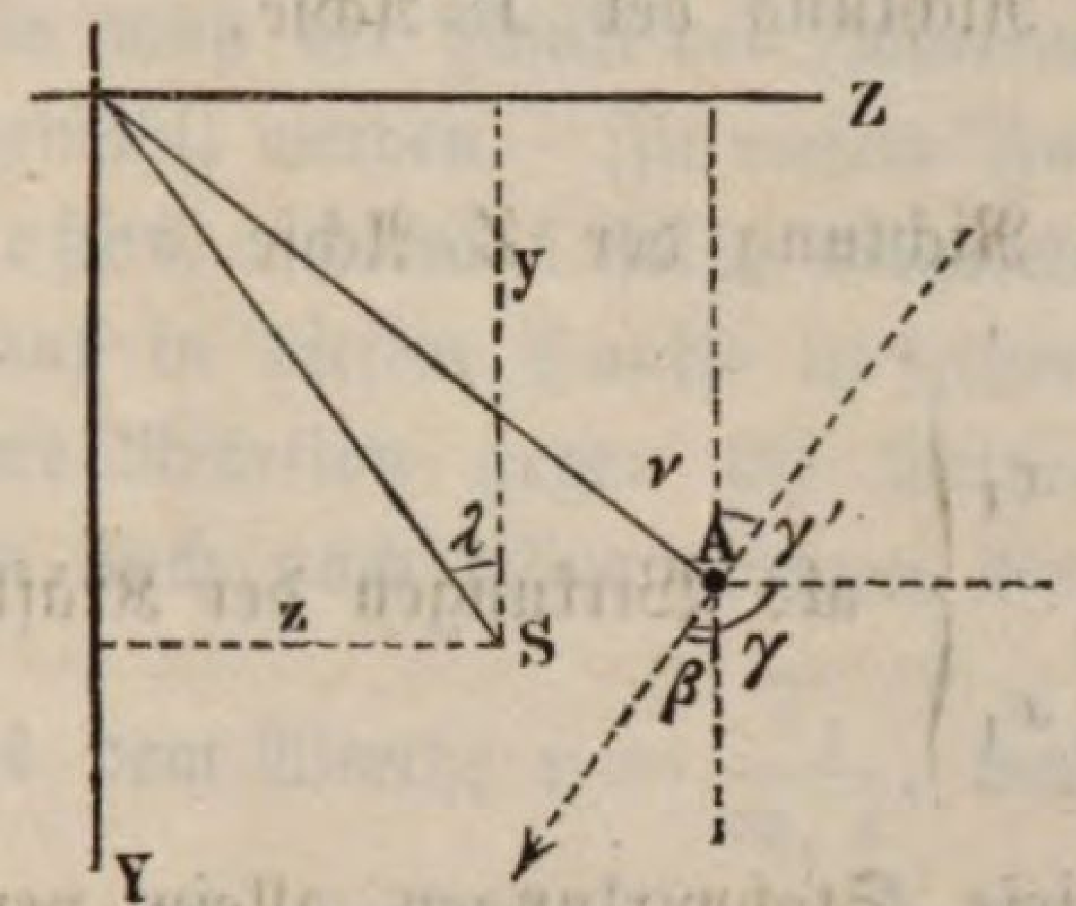
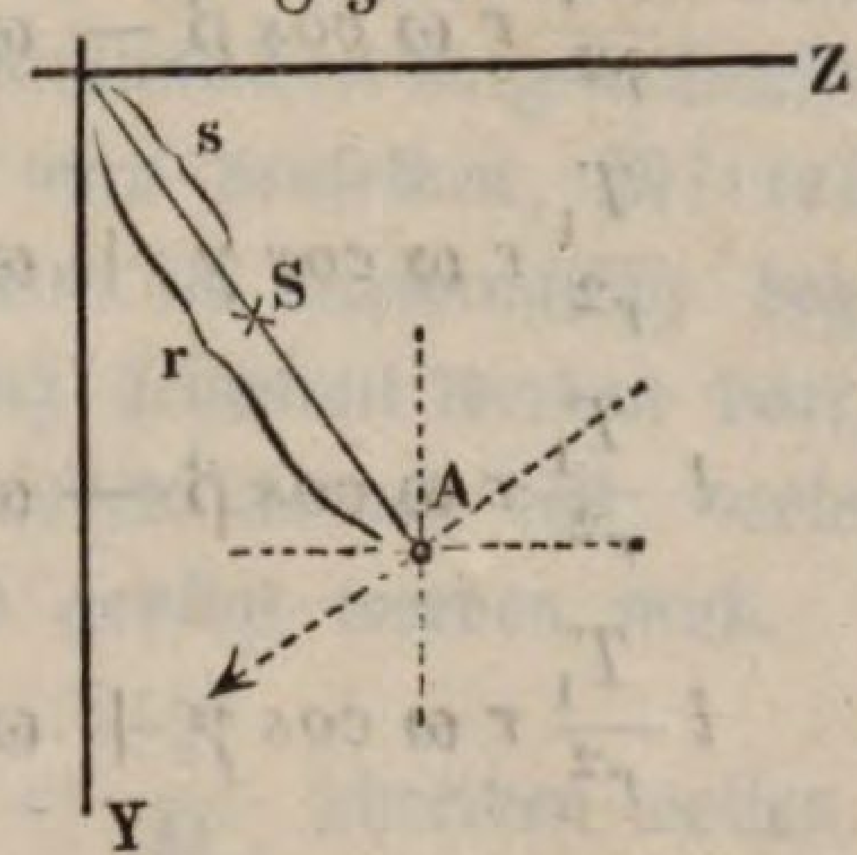


Fig. 395.



der also die Stoßkraft normal gerichtet ist. Setzen wir die normale Entfernung des Schwerpunktes S von der Drehachse gleich s, so ist der zweiten Bedingung gemäß:

$$r = \frac{T_1}{m_1\, s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

die Entfernung r des getroffenen Punktes A von der Drehachse ist also in Bezug auf dieselbe gleich $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$, d. h. dieser Punkt muß dieselbe Entfernung von der Drehachse haben wie der beim physischen Pendel gefundene Schwingungsmittelpunkt.

Berücksichtigen wir ferner die Wirkung der Kräftepaare und setzen in den obigen Ausdrücken die jetzt bekannten Werthe von $cos\, \beta$ und $cos\, \gamma$, so entsteht:

$$l\, m_1\, z - \Sigma \mu_1\, z_1\, x_1 = 0$$
$$- l\, m_1\, y + \Sigma \mu_1\, y_1\, x_1 = 0,$$

d. h.

$$l = \frac{\Sigma \mu_1\, z_1\, x_1}{m_1\, z} = \frac{\Sigma \mu_1\, y_1\, x_1}{m_1\, y}.$$

Diesen beiden gleichzeitig bestehenden Werthen von l kann man im Allgemeinen nur Genüge leisten, wenn $l = 0$, d. h. wenn $\Sigma \mu_1\, z_1\, x_1 = \Sigma \mu_1\, y_1\, x_1 = 0$ ist. Aus dieser Bedingung schließen wir nach §. 60, daß die Drehachse eine der drei Hauptachsen des Körpers sein muß, die sich wegen $l = 0$, in dem Durchschnittspunkte, der Stoßkraft Ebene mit der Drehachse, schneiden.

Stößt im zweiten Falle der drehende Körper gegen den sich geradlinig bewegenden, so werden die in der Masse m_1 durch den Stoß rege gewordenen Widerstände sich gerade so wie oben berechnen. Die Componenten der ursprünglich wirksamen Kraft sind diesmal:

$$\text{in der } Y\text{-Achse } \frac{T_1}{r^2} r \omega \cos\beta,$$

$$\text{in der } Z\text{-Achse } \frac{T_1}{r^2} r \omega \cos\gamma.$$

Die auf die Achse stattfindenden Reactionen sind daher:

$$\frac{T_1}{r^2} r \omega \cos\beta - \omega m_1 z \text{ in Richtung der } Y\text{-Achse},$$

$$\frac{T_1}{r^2} r \omega \cos\gamma + \omega m_1 y \text{ in Richtung der } Z\text{-Achse},$$

$$\left.\begin{array}{l} l \dfrac{T_1}{r^2} r \omega \cos\beta - \omega \Sigma \mu_1 z_1 x_1 \\ l \dfrac{T_1}{r^2} r \omega \cos\gamma + \omega \Sigma \mu_1 y_1 x_1 \end{array}\right\} \text{ als Wirkungen der Kräftepaare.}$$

Für den Fall, daß das System diese Stoßwirkungen allein vernichtet, haben wir, die Kräfte gleich Null gesetzt:

$$\frac{T_1}{r} \omega \cos\beta - \omega m_1 z = 0$$

$$\frac{T_1}{r} \omega \cos\gamma + \omega m_1 y = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen wie oben:

$$tang\, \gamma' = \frac{z}{y} \text{ und}$$

$$r = \frac{T_1}{m_1 s}.$$

Wir setzen zweitens die Wirkung der Kräftepaare gleich Null, indem wir statt $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ die durch die letzten Gleichungen bestimmten Werthe substituiren:

$$l m_1 z - \Sigma \mu_1 z_1 x_1 = 0$$

$$- l m_1 y + \Sigma \mu_1 y_1 x_1 = 0,$$

wir kommen also in gleicher Weise zu derselben Bedingung wie oben, es muß

$$l = \frac{\Sigma \mu_1 z_1 x_1}{m_1 z} = \frac{\Sigma \mu_1 y_1 x_1}{m_1 y},$$

d. h.

$$\Sigma \mu_1 z_1 x_1 = \Sigma \mu_1 y_1 x_1 = 0$$

sein.

Fassen wir die Bedingungen, unter welchen die Drehachse eines schwingenden Körpers durch den Stoß keine Erschütterung erleidet, zusammen, so erhalten wir:

1) Die Stoßkraft wirkt normal zu der durch die Drehachse und den Schwerpunkt gelegten Ebene. In derselben befindet sich der Angriffspunkt der Stoßkraft.

2) Die Entfernung r des Angriffspunktes von der Drehachse ist durch $r = \frac{T_1}{m_1 s}$ bestimmt.

3) Die Drehachse des Körpers ist für denselben eine Hauptachse.

Soll hiernach die Achse des schwingenden Körpers im Augenblicke des Stoßes gar keine Reaction auszuhalten haben, gar keine Erschütterung erleiden, so muß der Punkt des Zusammenstoßes sämmtlichen obigen Bedingungen gemäß gewählt werden. In diesem Falle nennt man denselben, Mittelpunkt des Stoßes. Hieraus folgt umgekehrt, daß ein in Schwingung begriffener Körper nur in diesem Punkte in seiner Bewegung gehemmt werden darf, wenn dabei eine Reaction gegen die Drehachse vermieden werden soll, wobei aber außerdem auch noch allen übrigen Bedingungen genügt werden muß.

Aus dem Werthe $r = \frac{T_1}{m_1 s}$, wofür wir $r = \frac{T_1}{M s}$ schreiben wollen, folgt, 78
daß wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt des schwingenden Körpers geht, die Entfernung des Stoßmittelpunktes von der Drehachse unendlich groß wird. Die Construction desselben ist also in diesem Falle unmöglich, so daß die Drehachse dann immer durch den Stoß Erschütterungen erleiden wird. Andererseits folgt aber für die weitere Bewegung des schwingenden Körpers nach dem Stoße, wenn im Stoßmittelpunkte das Zusammentreffen erfolgte, wenn also sämmtlichen obigen Bedingungen genügt wird, daß die durch die Bewegung hervorgerufenen, in §. 60 bestimmten Drucke D_1 und D_2 nicht aufgehoben sind, daß also die Drehachse auch in diesem Falle Druck auszuhalten hat. Es ist hieraus ersichtlich, daß es für die Drehachse in einem schwingenden Körper keine Lage giebt, in welcher sie beide Reactionen, die durch den Stoß veranlaßte und die durch die weitere Bewegung hervorgebrachte, vernichten könnte.

In der Praxis macht man hiervon bei dem Hammerbetriebe Gebrauch, und legt die Drehachse so an, daß die durch den Stoß hervorgerufene Reaction aufgehoben wird, läßt also das Zusammentreffen stets im Mittelpunkte des Stoßes erfolgen. Läßt sich der schwingende Körper durch eine zur Drehachse normale Ebene in zwei gleiche und symmetrische Theile zerlegen, so wird die Drehachse für den Durchschnittspunkt mit dieser Ebene eine Hauptachse sein. In derselben Ebene liegt der Schwerpunkt des Körpers. Soll ein Stoß gegen denselben keine Erschütterung auf die Drehachse ausüben, so muß die Richtung des Stoßes in derselben Ebene und normal zu der durch den Schwerpunkt und die Drehachse gelegten Ebene liegen und endlich muß der Stoß in der Entfernung $r = \frac{T_1}{M s}$ von der Drehachse erfolgen.

79 **Theorie der Bewegung der Maschinen.** Eine Maschine ist eine Verbindung von Körpern, die den Zweck haben, mittelst einer disponiblen Kraft irgend eine Arbeit zu verrichten. Es soll hiernach eine vorhandene Kraft durch die Maschine an irgend einen Punkt gebracht werden, wo sie den verlangten Umständen gemäß besser wirksam sein kann. Die Maschine kann dieser Erklärung gemäß weder Kraft entwickeln, noch soll sie von der gegebenen Kraft, irgend etwas verbrauchen. Das letztere wird sich nicht vollständig erreichen lassen, da Reibung, Trägheit der Massen, unvermeidliche Stöße in der Maschine und andere Nebenumstände auf Kosten der zu verrichtenden Arbeit die disponible Kraft während der Uebertragung verringern werden. Eine Maschine ist hiernach um so besser construirt, um so größer der Theil der vorhandenen Kraft ist, der an den Ort der Arbeit gebracht wird.

Die in der Praxis zur Verwendung kommenden Kräfte sind:

Menschen- und Thierkräfte, die Kraft des Windes, die Kraft des durch die Schwerkraft bewegten Wassers, die Expansivkraft des Wasserdampfes.

Bei jeder arbeitenden Maschine sind drei Haupttheile zu unterscheiden: der erste empfängt die vorhandene Kraft unmittelbar, der zweite ändert dieselbe dem vorliegenden Zwecke gemäß um und der dritte verrichtet die Arbeit, zu deren Herstellung die ganze Maschinenanlage gemacht wurde.

Den ersten dieser Theile nennt man die Kraftmaschine, den dritten in Verbindung mit dem zweiten die Arbeitsmaschine, wodurch sich zugleich die beiden Hauptabtheilungen ergeben, in welche die einzelnen Maschinen gehören.

Wir denken eine Maschine in Bewegung gesetzt und nehmen an, die einzelnen Theile seien in einer solchen Weise construirt, daß sie den darauf wirkenden Kräften vollkommenen Widerstand entgegensetzen, daß also jeder einzelne Theil als vollkommen fest angesehen werden darf. Diese Voraussetzung würde unzulässig werden, wenn sich während der Bewegung häufig Stöße wiederholten, die eine Formänderung bewirken könnten, wodurch die Arbeitgröße der sich der Formänderung entgegensetzenden Widerstände mit in Rechnung gebracht werden müßte. In den Fällen jedoch, wo man durch den Stoß selbst eine Arbeit verrichten läßt, wie bei den Stampfen und Hammerwerken, sind die den Stoß erleidenden Theile so stark construirt, daß die Formänderung vernachlässigt werden darf; die Geschwindigkeit in der Maschine wird jedoch geändert, wodurch, wie wir in §. 73 gesehen haben, ein Verlust der vorhandenen Arbeitgröße herbeigeführt wird. Die den Stoß erleidenden Theile sind daher so viel als möglich elastisch herzustellen, um diesen Verlust an Arbeitgröße so gering als möglich zu machen.

In den Fällen, wo die Verrichtung der Arbeit nicht durch einen Stoß geschehen soll, muß man die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen um so mehr vermeiden, da damit jedesmal ein Verlust an lebendiger Kraft verbunden ist. Zu dem Ende wendet man, um eine continuirliche Bewegung allmälig in eine abwechselnde umzuändern, Krummzapfen und Excentriks an.

Die Arbeitgröße einer Kraft oder eines Widerstandes bestimmt sich nach §. 53 durch das Product Ps, wenn der Druck P constant bleibt. Trifft

das nicht zu, wie es im Allgemeinen bei einer in Bewegung befindlichen Maschine der Fall sein kann, so ist für jeden einzelnen Zeitmoment die Arbeitgröße jeder Kraft oder jedes in der Maschine vorhandenen Widerstandes zu bestimmen und die algebraische Summe derselben als Arbeitgröße der vorhandenen Kräfte und Widerstände anzusehen.

Es sei hiernach $\Sigma P_1 s_1$ die Arbeitgröße der bewegenden Kräfte; $\Sigma P_2 s_2$ sei die der nützlichen Widerstände in der Maschine, das ist die von derselben verrichtete nützliche Arbeit; $\Sigma P_3 s_3$ sei die Arbeitgröße aller schädlichen Widerstände, die sich während der Bewegung geltend machen, und $\Sigma P_4 s_4$ sei endlich die Arbeitgröße derjenigen Theile in der Maschine, die vermöge ihres Gewichtes bald im Sinne der Bewegung, bald in entgegengesetzter Weise wirksam sind. Blieb die Geschwindigkeit während der Bewegung der Maschine dieselbe, befand sich die Maschine also im Beharrungszustande, so ist die Arbeitgröße der bewegenden Kräfte gerade im Stande gewesen, die übrigen Leistungen zu verrichten. Für diese Voraussetzung erhalten wir die allgemeine Gleichung:

$$\Sigma P_1 s_1 - \Sigma P_2 s_2 - \Sigma P_3 s_3 \pm \Sigma P_4 s_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

Befand sich die Maschine dagegen nicht in dem Beharrungszustande, so mußten die bewegenden Kräfte in den einzelnen Massentheilchen auch noch die Geschwindigkeiten ändern. Die hierzu nothwendige Arbeitgröße ist n. F. 57 gleich dem Zuwachse an lebendiger Kraft für jedes einzelne Massenelement, wenn wir die Aenderung in der Geschwindigkeit gleichmäßig annehmen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit zu Anfang der Bewegung mit v_1, zu Ende derselben mit v_2, und ein Massenelement mit m_1, so ist die zur Geschwindigkeitsänderung nothwendige Arbeit:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m_1 (v_2^2 - v_1^2).$$

In diesem Falle haben wir die allgemeine Gleichung:

$$\Sigma P_1 s_1 - \Sigma P_2 s_2 - \Sigma P_3 s_3 \pm \Sigma P_4 s_4 - \Sigma \tfrac{1}{2} m_1 (v_2^2 - v_1^2) = 0 \quad (160)$$

Erfolgt die Bewegung in einem Kreise, so ist der Ausdruck $\Sigma \frac{1}{2} m_1 (v_2^2 - v_1^2)$ noch durch $\frac{1}{2} T (\omega^2 - \varepsilon^2)$ zu ersetzen, worin T das Trägheitsmoment der bewegten Masse, ε die Winkelgeschwindigkeit zu Anfang der Bewegung und ω dieselbe, zu Ende derselben bezeichnet.

Wir lassen der Bequemlichkeit wegen die Summenzeichen (Σ) aus der Gleichung fort, müssen aber jederzeit bei der Anwendung derselben daran denken, daß jeder einzelne Summand eine algebraische Summe der Arbeitgrößen der einzelnen Kräfte oder Widerstände darstellt.

Wir legen hiernach den folgenden Untersuchungen die allgemeine Gleichung zu Grunde:

$$P_1 s_1 - P_2 s_2 - P_3 s_3 \pm P_4 s_4 - \tfrac{1}{2} m_1 (v_2^2 - v_1^2) = 0.$$

Man nennt die Arbeitgröße $P_1 s_1$ der bewegenden Kräfte die **rohe** Arbeitgröße der Maschine, während $P_2 s_2$ die **nutzbare** Arbeitgröße genannt wird.

Eine Maschine ist um so zweckmäßiger construirt, je mehr sich der Werth von $P_2\,s_2$ dem von $P_1\,s_1$ nähert, jedoch ist aus der obigen Gleichung ersichtlich, daß die nutzbare Arbeit niemals die Größe der rohen erreichen kann.

Wir entwickeln aus obiger Gleichung $P_2\,s_2$ und suchen die Bedingungen auf, für welche dieser Werth so groß als möglich wird:

$$P_2\,s_2 = P_1\,s_1 - P_3\,s_3 \pm P_4\,s_4 - \tfrac{1}{2}\,m_1\,(v_2^2 - v_1^2).$$

Die bewegende Kraft ist zwar durch die Natur gegeben, eine verschiedene Wirkungsweise wird jedoch auf die Größe ihrer Arbeit Einfluß haben, so daß das Glied $P_1\,s_1$ unter allen Umständen so groß als möglich herzustellen ist, wenn die nutzbare Arbeitgröße ein Maximum werden soll. Dem Maximum der Arbeitgröße $P_1\,s_1$ entspricht ein Maximum der Arbeitstärke $P_1\,v_1$. Diese ist sowohl von der Größe des zu übertragenden Druckes P_1 als auch von der ertheilten Geschwindigkeit v_1 abhängig. Erreicht einer dieser Factoren seinen größten Werth, so wird der andere Factor zu Null, also auch die verrichtete Arbeitstärke. Andererseits müssen bei der Uebertragung Stöße sowie eine Zerlegung des Druckes oder der Geschwindigkeit vermieden werden, die einen nachtheiligen Einfluß ausüben können.

Der Summand $P_3\,s_3$ stellt die Arbeitgröße der passiven Widerstände vor, die stets einen Theil der rohen Arbeit auf Kosten der nutzbaren verbrauchen werden. Eine zweckmäßige Construction der Maschine und ihrer einzelnen Theile wird die Arbeitgröße der betreffenden Widerstände vermindern können, so daß es für den Constructeur Hauptaufgabe ist, den Summand $P_3\,s_3$ zu einem Minimum zu machen.

Was den Summand $P_4\,s_4$ anbetrifft, der sich mit einem Doppelzeichen in der Gleichung findet und sich auf das Heben oder Sinken von Körpern, in der Maschine während der Bewegung bezieht, so wird das Glied natürlich verschwinden, wenn der Schwerpunkt des ganzen Systemes während der Bewegung in derselben Horizontalen bleibt, wie sich das z. B. bei gut centrirten Rädern, Riemscheiben oder horizontal bewegten Körpern findet.

Das Glied $P_4\,s_4$ ist dagegen mit einem positiven Zeichen in Rechnung zu bringen, wird also die rohe Arbeitgröße vermehren, wenn die Körper, welche diese Arbeit erzeugen, während der Bewegung beständig niedersinken. Der Summand ist weiter mit einem negativen Zeichen einzuführen, wenn die Körper durch die Maschine beständig gehoben werden müssen. In diesem Falle macht die Arbeitgröße $P_4\,s_4$ einen Theil der nutzbaren Arbeitgröße aus. Findet endlich bald ein Heben, bald ein Sinken von Körpern in der Maschine statt, wie es bei einem schlecht centrirten Rade oder bei dem Sägegatter einer Schneidemühle vorkommt, so wird die nutzbare Arbeit während der Bewegung periodisch vermehrt und vermindert, erhält jedoch jedesmal den ursprünglichen Werth, wenn der Maschinentheil in dieselbe Lage zurückgekommen ist.

Wenn auch hierdurch im Allgemeinen die nutzbare Arbeitgröße nicht vermindert wird, so wird doch eine periodische Veränderung in der lebendigen Kraft des Systemes hervorgerufen. Hieraus entspringt eine Aenderung in der

Geschwindigkeit, was möglicherweise auf die Qualität der Arbeit nachtheilig einwirken kann.

Das letzte Glied $\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$ endlich in der obigen allgemeinen Gleichung giebt den Zuwachs an lebendiger Kraft während der Bewegung an. Es verschwindet, wie schon oben angegeben, ganz aus der Gleichung, wenn die Bewegung eine gleichförmige, wenn also $v_2 = v_1$ ist. So lange $v_2 > v_1$, ist zur Bewegung der Massen ein Zuwachs an lebendiger Kraft nothwendig, welcher jederzeit die nutzbare Arbeitgröße vermindert. Es ist hiernach die Bewegung in einer Maschine so viel als möglich gleichförmig einzurichten.

Wird eine Maschine in Betrieb gesetzt, so muß die Geschwindigkeit derselben allmälig von 0 bis zu der normalen v wachsen, die wo möglich zu erhalten ist. Während dieser Zeit muß die Maschine zur Bewegung der Massen die lebendige Kraft $\frac{1}{2} m v^2$ entwickeln, welche für die nutzbare Arbeitgröße verloren geht. Hieraus folgt, daß es unvortheilhaft ist, die Maschine während der Arbeit wiederholentlich anzuhalten, da die zur Herstellung der Geschwindigkeit nothwendige lebendige Kraft der nutzbaren Arbeitgröße verloren geht.

Wenn die Arbeit der Maschine darin besteht, Körper nach irgend einer Richtung zu bewegen, so ist ersichtlich, daß dieselben die Maschine mit der möglichst geringsten Geschwindigkeit verlassen müssen, wenn ein größerer Verlust an lebendiger Kraft vermieden werden soll.

Wird die erlangte Geschwindigkeit in der Maschine erhalten, so besteht die Gleichung 159:

$$P_1 s_1 - P_2 s_2 - P_3 s_3 \pm P_4 s_4 = 0.$$

Aus derselben folgt unmittelbar, daß die in der Maschine vorhandenen Massen dieselbe Geschwindigkeit angenommen haben, da nur in diesem Falle die lebendige Kraft in der Maschine den constanten Werth behalten kann.

Hieraus folgt: In einer Maschine, die einen gleichförmigen Gang angenommen, kann sich kein Körper befinden, der eine hin- und hergehende Bewegung hat. Bei einer vollkommenen Gleichförmigkeit in der Maschine muß die letzte Gleichung für jeden Zeitmoment richtig sein, weshalb wir, unter σ die virtuellen Geschwindigkeiten verstanden, für den gleichförmigen Gang der Maschine die Gleichung erhalten:

$$P_1 \sigma_1 - P_2 \sigma_2 - P_3 \sigma_3 \pm P_4 \sigma_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

Hierin liegt das Gesetz: Für den gleichförmigen Gang einer Maschine muß die Summe der virtuellen Momente gleich Null sein, die bewegenden Kräfte müssen also sämmtliche Widerstände gerade überwinden, d. h. zwischen den in der Maschine auftretenden Kräften und Widerständen findet Gleichgewicht statt (§. 40).

Betrachten wir die letzte Bedingungsgleichung noch einmal, so ist in Betreff des Gliedes $\pm P_4 \sigma_4$ zu bemerken, daß es gleich 0 oder positiv oder negativ sein kann, jenachdem der Schwerpunkt jedes Körpers sich auf derselben Höhe erhält, oder $P_4 \sigma_4$ zu der rohen oder nutzbaren Arbeitgröße zu rechnen

ist. Ein abwechselndes Steigen oder Sinken ist unmöglich, da dies die obige Bedingungsgleichung aufheben müßte. Fassen wir das zuletzt Aufgestellte zusammen, so kann eine Maschine nur dann einen gleichförmigen Gang erhalten, wenn sich darin keine hin- und hergehenden Theile, sondern allein genau centrirte Räder, Wellen, Riem- und Schnurscheiben rc. vorfinden.

80 Aus der allgemeinen Gleichung 160

$$P_1 s_1 - P_2 s_2 - P_3 s_3 \pm P_4 s_4 - \tfrac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = 0,$$

entwickeln wir die nutzbare Arbeitgröße $P_2 s_2$:

$$P_2 s_2 = P_1 s_1 - P_3 s_3 \pm P_4 s_4 - \tfrac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$
$$= P_1 s_1 - [P_3 s_3 \mp P_4 s_4 + \tfrac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)].$$

Setzen wir statt des Klammerausdruckes, $\alpha . P_1 s_1$, unter α einen echten Bruch verstanden, so entsteht:

$$P_2 s_2 = (1 - \alpha) . P_1 s_1.$$

Der Factor $1 - \alpha$, welcher selbst wieder ein echter Bruch ist, heißt der Nutzeffect der Maschine und mag durch η bezeichnet werden:

$$\eta = \frac{P_2 s_2}{P_1 s_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

Es ist hiernach der Nutzeffect einer Maschine gleich der nutzbaren Arbeitgröße, dividirt durch die rohe Arbeitgröße. In der Regel wird der Nutzeffect einer Maschine in Procenten der rohen Arbeitgröße angegeben.

Will man die nutzbare Arbeitgröße einer Maschine nach der oben aufgestellten Gleichung berechnen, so ist vor Allem die Kenntniß der rohen Arbeitgröße der disponiblen Kraft nothwendig.

a) Für Menschen- und Thierkräfte ist die Sache bereits in Nr. 28 der Uebungen des zweiten Abschnitts erledigt (durch die, für die Mittelwerthe von P, v, t gegebene Tabelle und die Gerstner'sche Formel).

b) Bestimmung der Arbeit der bewegten Luft.

Es bezeichnen v die Geschwindigkeit des Windes in Metern, γ das Gewicht einer Kubikeinheit in Kilogrammen, Q das Volumen der bewegten Luft in Kubikmetern. Die rohe Arbeitgröße L ist gleich der lebendigen Kraft:

$$L = \tfrac{1}{2} \frac{Q \gamma}{g} v^{2\ km}.$$

Da die Luft circa 800 mal leichter als Wasser ist, so ist statt γ, $\frac{1000}{800}$ Kilogramm zu setzen.

Bezeichnet F den Querschnitt des Windstromes normal zur Bewegungsrichtung in Quadratmetern, so ist $Q = Fv$ und die rohe Arbeitstärke $\overline{L}$ ist nach der Substitution und Ausrechnung der numerischen Werthe:

$$\overline{L} = 0{,}064\, F v^{3\ km}.$$

c) Bestimmung der Arbeitstärke des durch die Schwerkraft bewegten Wassers.

Bezeichnet Q das Wasserquantum in Kubikmetern, das in einer Secunde

auf die Maschine fließt, und h die Höhe in Metern, von welcher dasselbe herabsinkt, so verrichtet dasselbe die Arbeitstärke:

$$L^{=} = 1000\, Q\, h^{km}.$$

Ist dagegen die Geschwindigkeit v bekannt, mit der das Wasser das sich entgegenstellende Hinderniß trifft, so ist die Arbeitstärke, welche das Wasser aufgenommen, welche es daher auch wieder an das Hinderniß abgiebt:

$$L^{=} = \frac{1000\, Q}{2\, g}\, v^{2\, km}.$$

d) Um die rohe Arbeit des Wasserdampfes zu bestimmen, haben wir zwei Untersuchungen zu machen, jenachdem der Dampf während des ganzen Kolbenlaufes einströmt oder nicht, d. h. jenachdem der Dampf ohne oder mit Expansion wirkt.

α) Der Dampf wirke ohne Expansion.

Es sei der Dampfdruck auf 1 Quadratcentimeter Kolbenfläche gleich p Kilogramm, und der Inhalt des Kolbens gleich F Quadratcentimeter. Der Druck auf die Gegenseite des Kolbens betrage für jeden Quadratcentimeter q Kilogramm, und s sei die Länge des Kolbenweges in Metern.

Die Arbeitgröße L ist für diese Voraussetzungen:

$$L = F(p - q)\, s^{\,km}.$$

Wenn die Maschine in jeder Minute u Spiele macht, der Kolben also in dieser Zeit den Weg $2\,u\,s$ Meter zurücklegt, so ist die mittlere Geschwindigkeit v des Kolbens:

$$v = \frac{2\,u\,s}{60}$$

und die Arbeitstärke:

$$L^{=} = \frac{u}{30}\, F\,(p - q)\, s^{\,km}.$$

Bei den Condensationsmaschinen ist q der Druck im Condensator, bei den Maschinen ohne Condensation ist q gleich dem Atmosphärendruck auf jeden Quadratcentimeter = 1 Kilogramm.

β) Der Dampf wirke mit Expansion.

Es bezeichne F die Kolbenfläche in Quadratcentimetern, p die stärkere Spannung des Dampfes, p_1 die schwächere in Kilogrammen für jeden Quadratcentimeter, q den Druck in Kilogrammen für jeden Quadratcentimeter der Gegenseite des Kolbens, s die Länge des Kolbenweges, der beim Anfange der Expansion bereits zurückgelegt ist, und s_1 die ganze Länge des Kolbenweges in Metern.

Die Arbeitgröße L findet sich mittelst höherer Mathematik:

$$L = F\, s\, p \left[1 + 2{,}3026\, log\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1}\right]^{km}.$$

Die Arbeitstärke $L^{=}$ erhalten wir daher, wenn die Maschine in einer Minute u Kolbenspiele macht, wenn wir L mit $\frac{u}{30}$ multipliciren:

$$L^{=} = \frac{u}{30} F s p \left[1 + 2{,}3026 \log \left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1}\right] \overset{km}{=}.$$

81 Wenn auch im Allgemeinen bei neu zu entwerfenden Maschinen die nutzbare Arbeit nach der oben hingestellten allgemeinen Gleichung bestimmt wird, so verfährt man bei bereits ausgeführten Maschinen gewöhnlich in anderer Weise. Hier zieht man eine directe Messung der Berechnung vor, und hat dabei außer dem zu übertragenden Druck P, den Weg s oder die Geschwindigkeit v desselben zu bestimmen, jenachdem die Arbeitgröße oder Arbeitstärke der Kraft verlangt wird. Die Instrumente, welche zur Bestimmung der Kräfte (Druck, Widerstand ꝛc.) benutzt werden, heißen:

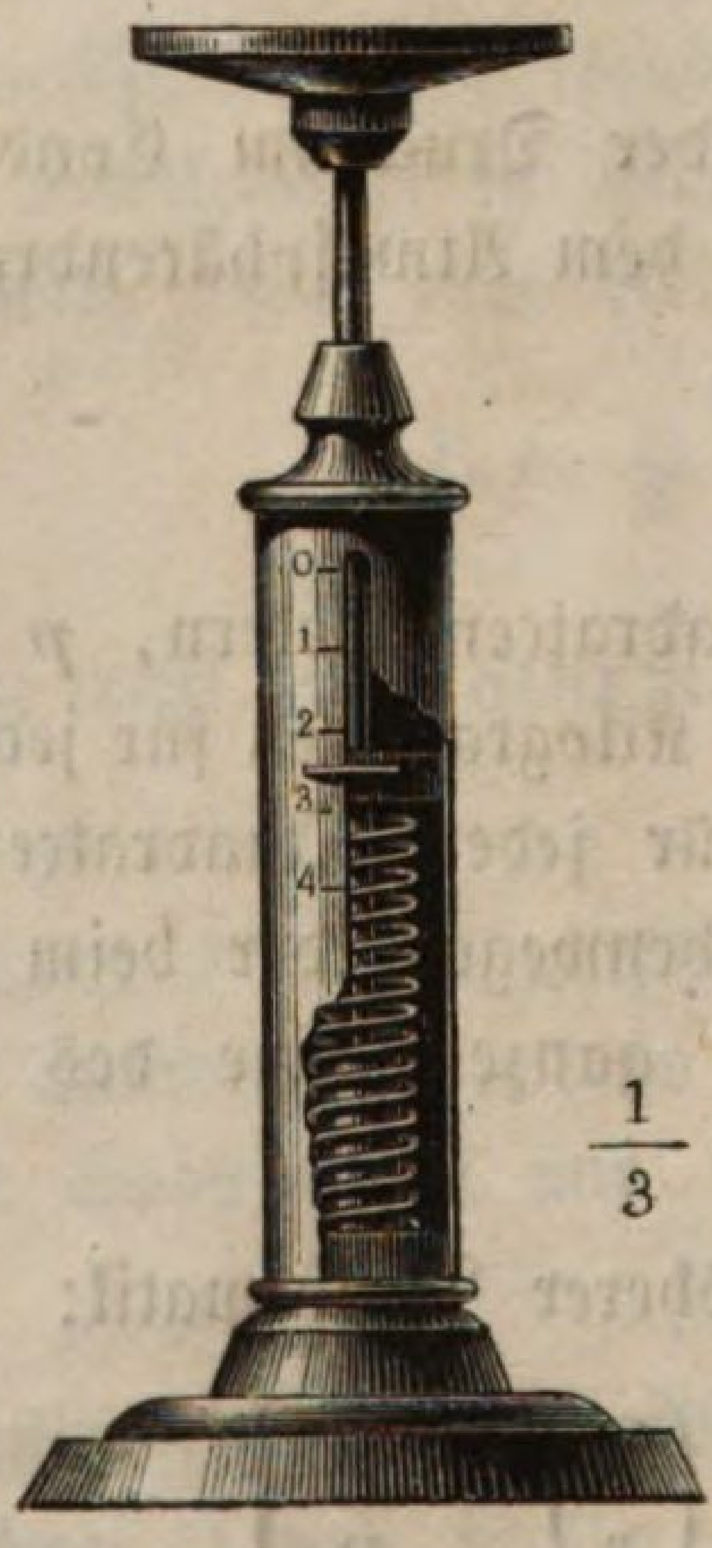
Kraftmesser, Dynamometer.

Diese zerfallen in Gewicht-, Feder- und Bremsdynamometer.

Die Gewicht- und Federdynamometer sind mit den Gewicht- und Federwagen im Allgemeinen übereinstimmend. Die Gewichtswagen sind bereits in Nr. 34 bis 38 der Uebungen des zweiten Capitels behandelt.

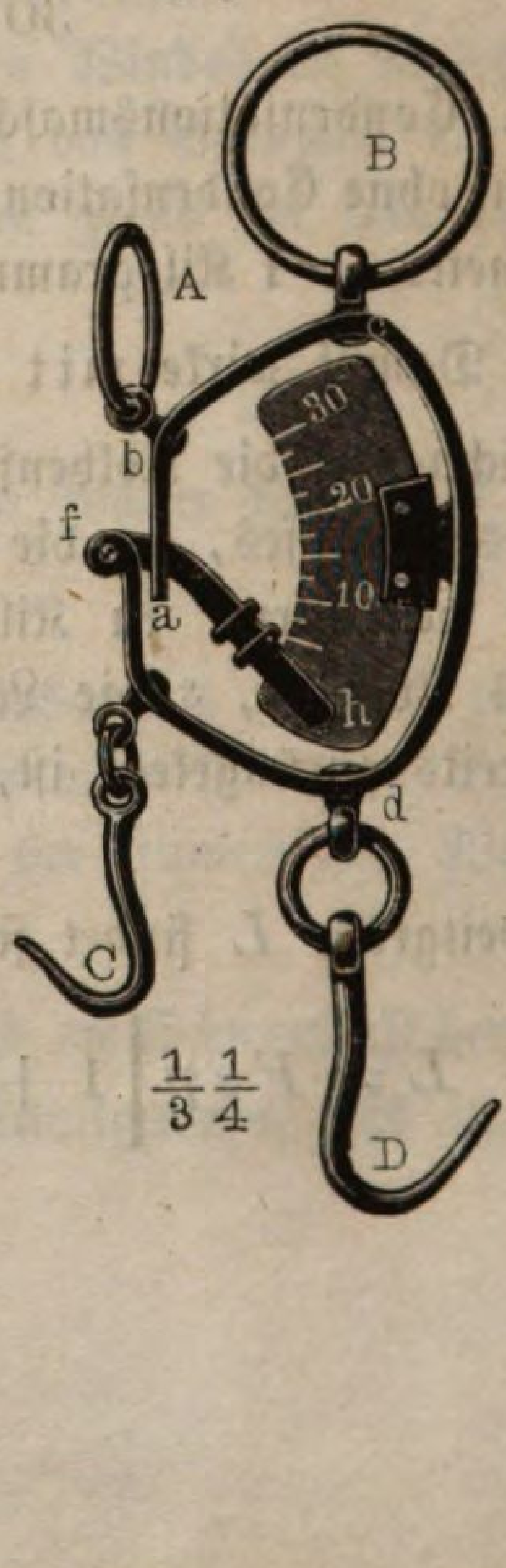
Die Federwagen oder Federdynamometer bestehen aus gehärteten Stahlfedern, auf welche die zu messenden Kräfte wirken und eine Formänderung hervorbringen, die durch einen Zeigerapparat bemerkbar gemacht wird, wodurch sich mittelbar die Größe der Kraft angeben läßt. Die Stahlfedern müssen so viel als möglich vollkommen elastisch sein, weshalb die darauf wirkenden Kräfte niemals so groß gewählt werden dürfen, daß die Elasticitätsgrenze der Federn überschritten werde. Die zu diesen Dynamometern verwendeten Federn erhalten je nach der verschiedenen Anwendung verschiedene Formen (Fig. 396 und 397).

Fig. 396.



1/3

Fig. 397.

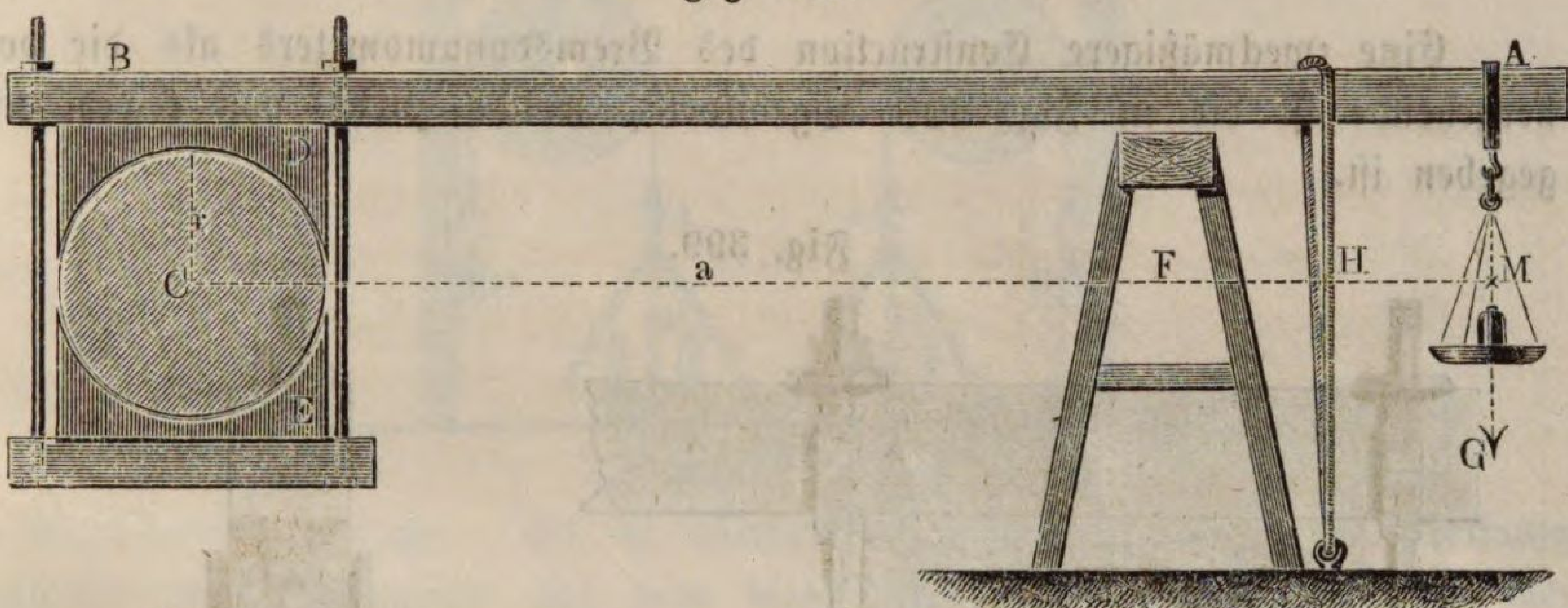


1/3 1/4

Das **Bremsdynamometer** oder der **Prony'sche Zaum** wird benutzt, um die Arbeitstärke einer rotirenden Welle zu bestimmen. Das Princip der Messung beruht hierbei darauf, die Maschine von der gewöhnlich zu verrichtenden Arbeit zu befreien und statt dessen von der Maschine eine Arbeit verrichten zu lassen, die sich leichter messen läßt.

Das Bremsdynamometer (Fig. 398) besteht aus dem Hebel AB und dem Backenstück D, welches auf der rotirenden Welle C ruht. Ein zweites ähnliches Backenstück E, welches unter der Welle liegt, kann mittelst Schraubenbolzen gegen den Hebel beliebig stark angezogen und die Welle durch die beiden Backenstücke also beliebig eingezwängt werden. Durch das Einzwängen entsteht an dem Umfange der Welle Reibung, die von der Betriebskraft überwunden werden muß, da der Balken AB wegen des untergestellten

Fig. 398.



Bockes F und des befestigten Seiles H der Bewegung nicht Folge leisten kann. Bevor eine Messung vorgenommen wird, sind während der gewöhnlichen Arbeit die Anzahl Umdrehungen in der Minute von derjenigen Welle zu notiren, auf welcher das Bremsdynamometer angebracht werden soll. Nachdem die gewöhnliche Arbeit entfernt, wird das Dynamometer angebracht und die Schrauben werden so stark angezogen, daß die Welle wieder die vorher beobachtete Anzahl Umdrehungen mache. Sobald dieser Zustand eingetreten, können wir schließen, daß die Arbeitgröße der erzeugten Reibung mit der gewöhnlich zu verrichtenden Arbeit **gleiche** Größe haben muß.

Ist Q der durch das Anziehen der Schraubenbolzen hervorgerufene Druck in Kilogrammen am Umfange der Welle, r deren Halbmesser, μ der Reibungscoefficient, so ist die Arbeitstärke der Reibung, wenn u Umdrehungen in der Minute gemacht werden:

$$L = \mu Q \frac{2 \pi r u}{60} \frac{km}{=}.$$

Da sich der Druck Q nur auf schwierige Weise direct finden läßt, so sucht man mittelst der auf die Wagschale bei M gelegten Gewichte oder durch eine

hier angebrachte Federwage der Reibung μQ das Gleichgewicht zu halten. Dasselbe tritt ein, sobald der Balken AB während der Bewegung der Welle eine horizontale Lage angenommen hat. Bezeichnet G das durch die Wage angegebene Gewicht in Kilogrammen plus dem an den Punkt M reducirten Gewicht des Hebels, so ist die Gleichgewichtsbedingung für den Mittelpunkt der Welle als Momentenpunkt:

$$\mu Q r = G . MC.$$

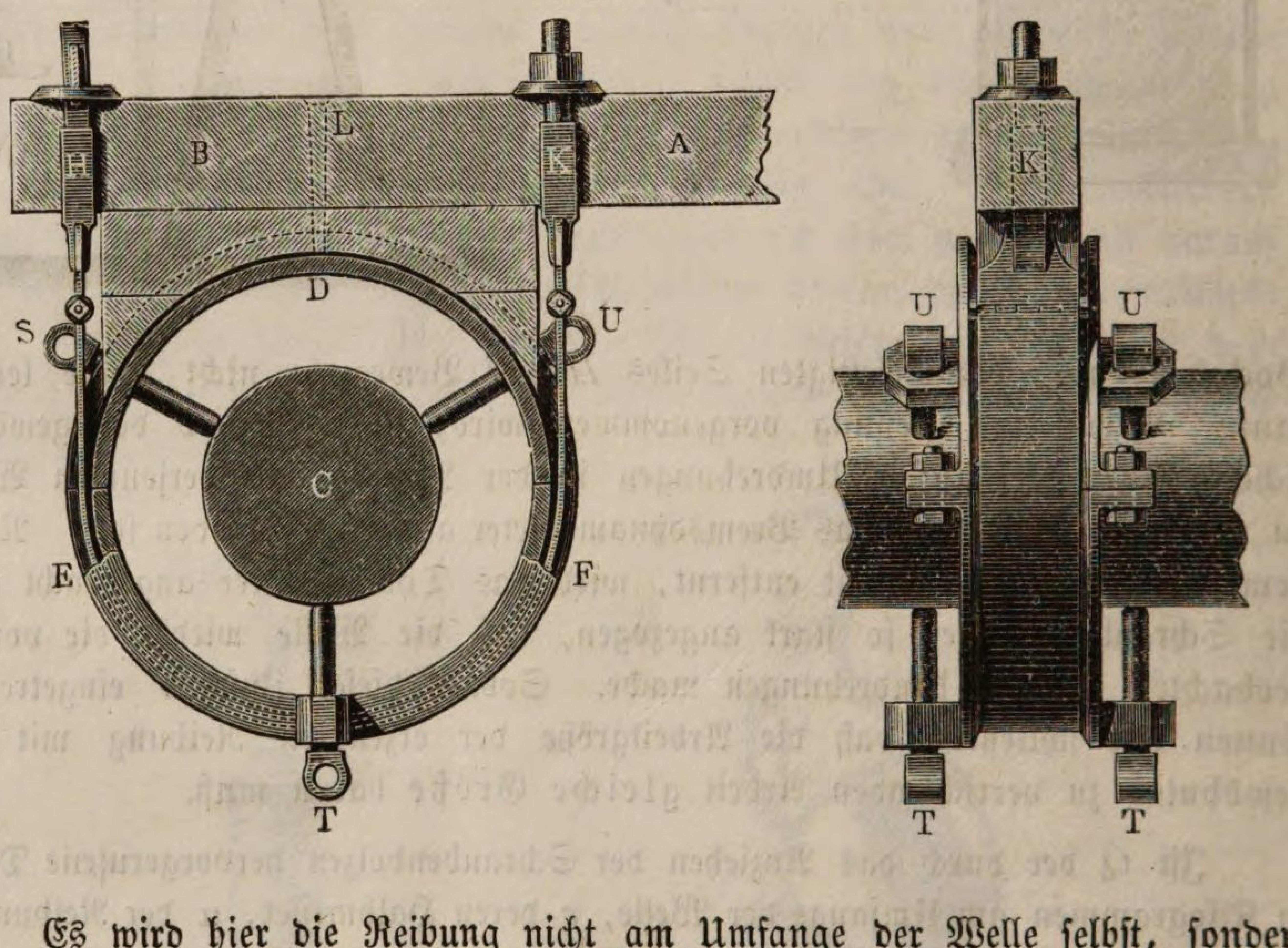
Setzen wir $MC = a$, so ist hiernach die Arbeitstärke der Reibung, d. h. zu gleicher Zeit die Arbeitstärke der vorhandenen Kraft, wenn die gewöhnliche Arbeit von der Maschine verrichtet wird:

$$L = G \frac{2 \pi a u}{60} \overset{km}{=}$$

$$L = 0,1047\, G a u \overset{km}{=}.$$

Eine zweckmäßigere Construction des Bremsdynamometers als die vorhergehende ist die in Fig. 399 abgebildete, welche zuerst von Egen angegeben ist.

Fig. 399.

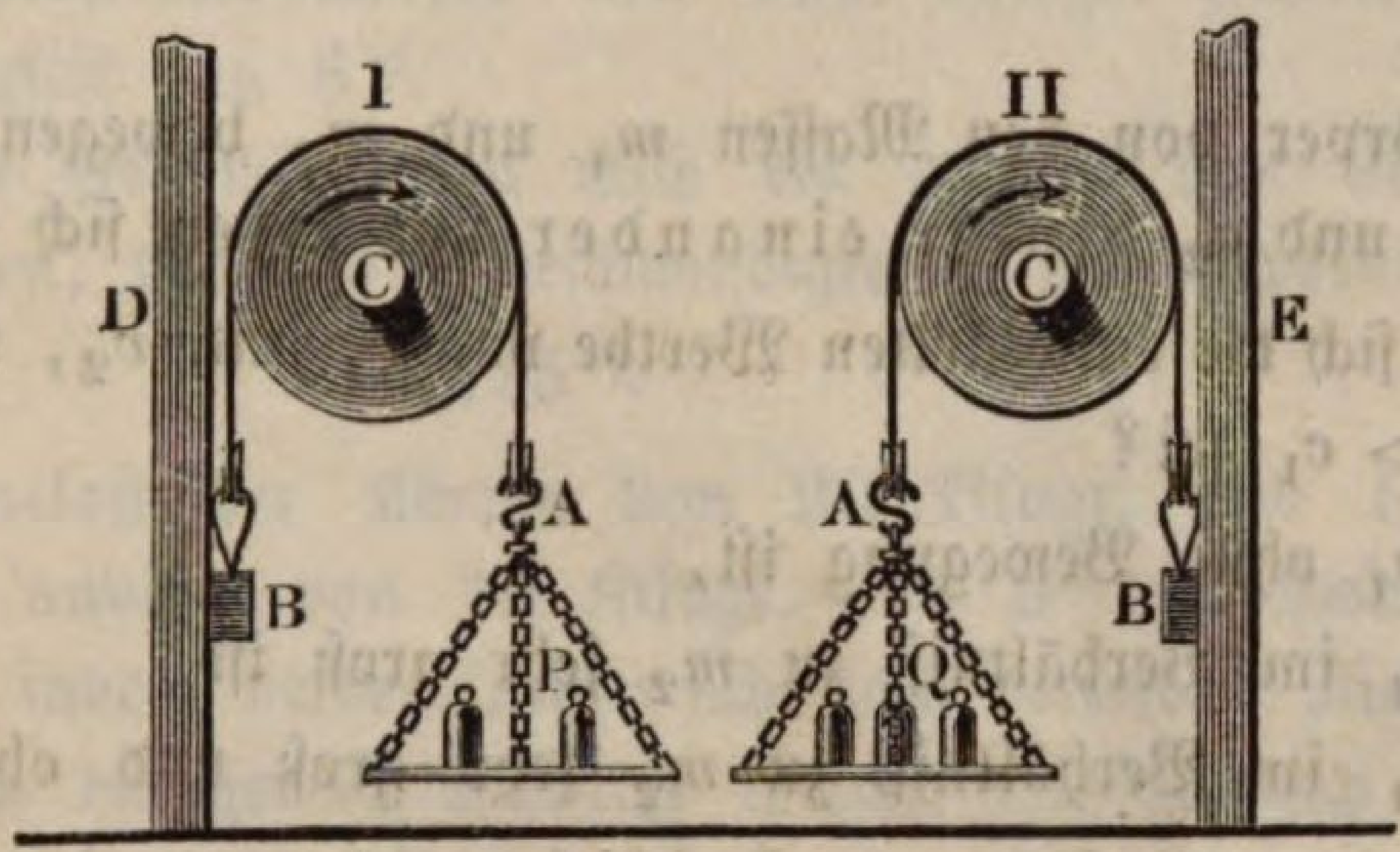


Es wird hier die Reibung nicht am Umfange der Welle selbst, sondern an dem Umfange des gußeisernen Ringes DEF hervorgerufen, wodurch der Apparat für Wellen von verschiedenem Durchmesser brauchbar wird. Die untere Backe ist durch das schmiedeeiserne Band ersetzt, an dessen einem Ende K sich eine Schraube mit Mutter zum bequemen Anziehen des Bandes befindet, während das andere Ende H durch einen Keil oberhalb des Balkens AB festgehalten wird. Durch das Loch L wird dem Apparate Schmiere zugeführt. Die Befestigung des Dynamometers auf der Welle geschieht durch

sechs Schrauben S, T, U. Der gußeiserne Kranz $D\,E\,F$ besteht gewöhnlich aus zwei halbkreisförmigen Theilen, die durch Schraubenbolzen aneinander befestigt werden, wodurch das Aufbringen des Apparates auf die Welle bedeutend erleichtert wird.

In Ermangelung eines Bremsdynamometers kann man nach Professor Weisbach die nutzbare Arbeitstärke auch mittelst eines einfachen Gurtes bestimmen (Fig. 400), indem man den Versuch zweimal ausführt und dabei das eine Ende B des Gurtes einmal auf der einen Seite in D und das zweite mal auf der entgegengesetzten Seite in E befestigt. Das andere Ende A des Gurtes, mit einer Wagschale versehen, wird in beiden Fällen so stark belastet, daß die Welle die für die gewöhnliche Arbeit nothwendige Anzahl

Fig. 400.



u Umdrehungen mache. Es ist hierbei durch die Maschine die Reibung zwischen dem Wellmantel und dem biegsamen Bande zu überwinden. Bei dem ersten Versuche hat für die in der Figur angegebene Bewegungsrichtung das befestigte Ende die größere Spannung $Q = P +$ die Reibung (F) auszuhalten, beim zweiten Versuche wird dagegen das mit den Gewichten versehene Ende so stark beansprucht. Beide Spannungen P und Q, demnach auch die Differenz $Q - P$ derselben, d. i. die am Wellmantel stattfindende Reibung F, ergeben sich durch den doppelten Versuch unmittelbar. Bezeichnen wir den Halbmesser der Welle wieder mit r, so ist für die vorausgesetzten u Umdrehungen pro Minute, die Arbeitstärke:

$$L = \frac{2\,r\,\pi\,u}{60} \cdot F = \frac{2\,r\,\pi\,u}{60}\,(Q - P)\,\overset{km}{=}.$$

Uebungen.

1. Zwei Körper von den Massen m_1 und m_2 bewegen sich mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 hinter einander und stoßen sich geradlinig central.

Wie ändern sich die entwickelten Werthe von v_1 und v_2, unter der Voraussetzung, daß $c_2 > c_1$ sei?

a) Wenn m_1 ohne Bewegung ist,

b) wenn m_1 im Verhältniß zu m_2 sehr groß ist,

c) wenn m_1 im Verhältniß zu m_2 sehr groß und ohne Bewegung ist.

1) Für unelastische Körper:

a) $v = \frac{m_2 c_2}{m_1 + m_2}$.

b) $v = c_1$.

c) $v = 0$.

2) Für vollkommen elastische Körper:

a) $v_1 = \frac{2 m_2 c_2}{m_1 + m_2}$; $v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} c_2$.

b) $v_1 = c_1$; $v_2 = 2 c_1 - c_2$.

c) $v_1 = 0$; $v_2 = - c_2$.

2. Wie ändern sich dieselben Werthe v_1 und v_2, wenn sich die Körper gegen einander bewegen?

1) Für unelastische Körper:

$$v = \frac{m_2 c_2 - m_1 c_1}{m_1 + m_2}.$$

2) Für vollkommen elastische Körper:

$$v_1 = \frac{2 m_2 c_2 - c_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{c_2 (m_2 - m_1) - 2 m_1 c_1}{m_1 + m_2}.$$

3. Was wird aus v_1 und v_2 für die letzte Voraussetzung,

a) wenn beide Körper gleiche Bewegungsgrößen,

b) wenn beide Körper gleiche Massen haben.

1) Für unelastische Körper:

a) $v = 0$.

b) $v = \frac{c_2 - c_1}{2}$.

2) Für vollkommen elastische Körper:

$v_1 = c_1; \quad v_2 = - c_2$

$v_1 = c_2; \quad v_2 = - c_1$.

4. Ein unelastischer Körper von 12,5 Kilogr. Gewicht bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 6^m.

Mit welcher Geschwindigkeit muß ein anderer von 24 Kilogr. Gewicht gegen diesen stoßen, damit die Geschwindigkeiten beider vernichtet werden?

$3{,}125^m$.

5. Ein unelastischer Körper von 20 Kilogr. und 5^m Geschwindigkeit wird von einem andern von 15 Kilogr. und 9^m Geschwindigkeit geradlinig central gestoßen, indem beide Körper sich nach derselben Richtung bewegen.

Wie groß ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit nach dem Stoße?

$6\frac{5}{7}{}^m$.

6. Wie groß ist aber die gemeinschaftliche Geschwindigkeit, wenn beide Körper sich gegen einander bewegen?

1^m nach Richtung des Körpers von 15 Kilogr. Gewicht.

7. Um einen unelastischen Körper von 37,5 Kilogr. Gewicht aus einer Geschwindigkeit von $0{,}6^m$ in eine von $1{,}6^m$ zu versetzen, läßt man ihn durch einen Körper von 30 Kilogr. geradlinig central stoßen. Welche Geschwindigkeit hat der letztere?

$2{,}85^m$.

8. Zwei unelastische Körper bewegen sich, der eine mit 9^m, der andere mit 12^m Geschwindigkeit, nach derselben Richtung. Nach dem geradlinig centralen Stoße haben sie eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit von 10^m, wenn der gestoßene Körper 10 Kilogr. Gewicht hatte. Wie viel Kilogr. wiegt der stoßende Körper? 10 Kilogr.

9. Zwei vollkommen elastische Kugeln von 6 Kilogr. und 15 Kilogr. stoßen, indem sie sich nach entgegengesetzter Richtung mit den Geschwindigkeiten von 5^m und $2{,}6^m$ bewegen, geradlinig central auf einander.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoße?

$v_1 = 5\frac{6}{7}{}^m$

$v_2 = -1{,}74^m$.

10. Von zwei gleich schweren elastischen Kugeln hat die eine 8^m, die andere 3^m Geschwindigkeit; sie bewegen sich gegen einander.

Welche Geschwindigkeit besitzen sie nach dem geradlinig centralen Stoße?

$$v_1 = 3^m$$
$$v_2 = -8^m.$$

11. Von zwei gleich schweren elastischen Kugeln hat die eine 4^m Geschwindigkeit, die andere ruht.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem geradlinig centralen Stoße, wenn sie sich nach derselben Richtung bewegen?

Für $c_1 = 4$ und $c_2 = 0$ ergiebt sich $v_1 = 0$ und $v_2 = -4^m$.

12. Zwei Kugeln aus Stahl bewegen sich geradlinig central gegeneinander und zwar die eine mit 25^m, die andere mit $8{,}6^m$ Geschwindigkeit. Nach dem Stoße hat die erste Kugel bei einem Gewichte von 15 Kilogr. eine Geschwindigkeit von $6{,}6^m$ nach ihrer ursprünglichen Richtung.

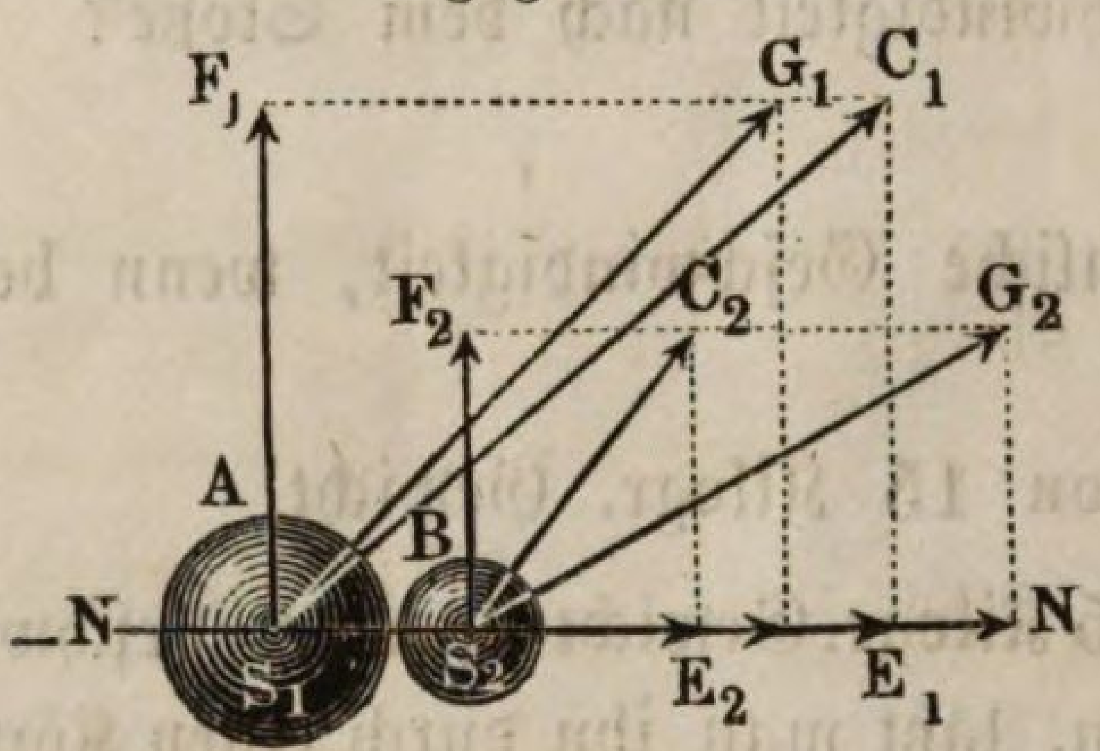
Welches Gewicht und welche Geschwindigkeit hat die zweite Kugel nach dem Stoße?

Wir wählen n aus der oben mitgetheilten Tabelle gleich 0,309:

8,2 Kilogr. und $v_2 = -25^m$.

13. Zwei Körper von den Massen m_1 und m_2 (Fig. 401) bewegen sich mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 hinter einander und kommen zum schiefen Centralstoß. Es sei $c_1 > c_2$ und die Bewegungsrichtung $S_1\ C_1$ des ersten Körpers bilde mit der Berührungsebene den Winkel α_1, die des zweiten bilde mit derselben Ebene den Winkel α_2.

Fig. 401.



Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stoße und welche Winkel bilden die Bewegungsrichtungen nach dem Stoße mit der Berührungsebene?

$$S_1\,G_1 = v_1 = \sqrt{w_1{}^2 + (c_1 \cos \alpha_1)^2}$$
$$S_2\,G_2 = v_2 = \sqrt{w_2{}^2 + (c_2 \cos \alpha_2)^2}.$$

In diesen Ausdrücken ist zu setzen:

$$w_1 = c_1 \sin \alpha_1 - (c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{1 - q}) \text{ und}$$

$$w_2 = c_2 \sin \alpha_2 + (c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{1 - q}).$$

Die Winkel der Bewegungsrichtungen nach dem Stoße mit der Berührungsebene bestimmen sich durch:

$$\cotg \beta_1 = \frac{c_1 \cos \alpha_1}{w_1}$$

$$\cotg \beta_2 = \frac{c_2 \cos \alpha_2}{w_2}.$$

14. Wie ändern sich die vorigen Formeln,

a) wenn sich die Körper gegen einander bewegen?

b) wenn die gestoßene Masse m_2 im Verhältniß zu m_1 sehr groß und in Ruhe ist?

$$\text{a)}\quad v_1 = \sqrt{w_1^{\,2} + (c_1 \cos \alpha_1)^2}$$

$$v_2 = \sqrt{w_2^{\,2} + (c_2 \cos \alpha_2)^2}$$

$$w_1 = \quad c_1 \sin \alpha_1 - (c_1 \sin \alpha_1 + c_2 \sin \alpha_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{1 - q})$$

$$w_2 = - c_2 \sin \alpha_2 + (c_1 \sin \alpha_1 + c_2 \sin \alpha_2) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{1 - q})$$

$$cotg\, \beta_1 = \frac{c_1 \cos \alpha_1}{w_1}$$

$$cotg\, \beta_2 = \frac{c_2 \cos \alpha_2}{w_2}.$$

b) $m_2 = \infty$ und $c_2 = 0$ gesetzt:

$$v_2 = w_2 = 0$$

$$v_1 = \sqrt{w_1^{\,2} + (c_1 \cos \alpha_1)^2}$$

$$w_1 = - c_1 \sin \alpha_1 \sqrt{1 - q}$$

$$cotg\, \beta_1 = - cotg\, \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{1 - q}}.$$

15. Von zwei unelastischen Körpern, die sich hinter einander bewegen, wiegt der eine 10 Kilogr., der andere 6 Kilogr. Der erste bewegt sich mit 26^m Geschwindigkeit unter einem Winkel von 75° gegen die Berührungsebene. Der andere bewegt sich mit 10^m Geschwindigkeit und seine Bewegungsrichtung bildet mit derselben Ebene einen Winkel von 45°.

Mit welcher Geschwindigkeit und nach welcher Richtung bewegen sich die Körper nach dem erfolgten schiefen Centralstoße?

Es ist $w_1 = w_2 = 18{,}35^m$; $v_1 = 19{,}5^m$, $v_2 = 19{,}66^m$;
$\beta_1 = 69°\,51'\,30''$, $\beta_2 = 68°\,55'\,40''$.

16. Zwei Kugeln aus Elfenbein von 12,5 Kilogr. und 7 Kilogr. Gewicht bewegen sich schief gegen einander und kommen zum Centralstoß. Die erste bewegt sich mit 13^m Geschwindigkeit unter einem Winkel von 30°, die andere mit 5^m Geschwindigkeit unter einem Winkel von 75° gegen die Berührungsebene.

Welche Bewegungsveränderungen finden nach dem Stoße statt?

Es ist, wenn wir nach der Tabelle $n = 0{,}79$ setzen,
$w_1 = -1{,}19^m$; $v_1 = 11{,}32^m$; $w_2 = 8{,}89^m$; $v_2 = 9^m$;
$\beta_1 = 173°\,58'\,10''$, $\beta_2 = 81°\,43'$.

17. Zwei Körper aus Stahl stoßen sich geradlinig central. Der erste hat ein Gewicht von 100 Kilogr. und eine Geschwindigkeit von 5^m, der zweite wiegt 60 Kilogr. und bewegt sich mit 12^m Geschwindigkeit.

Wie groß ist der durch den Stoß verursachte Verlust an Arbeitgröße? Wir setzen n nach der Tabelle gleich 0,309:

$$V = \tfrac{1}{2}(12-5)^2 \frac{100 \cdot 60}{160 \cdot 9{,}81} \cdot (1-0{,}309) = 65^{km}.$$

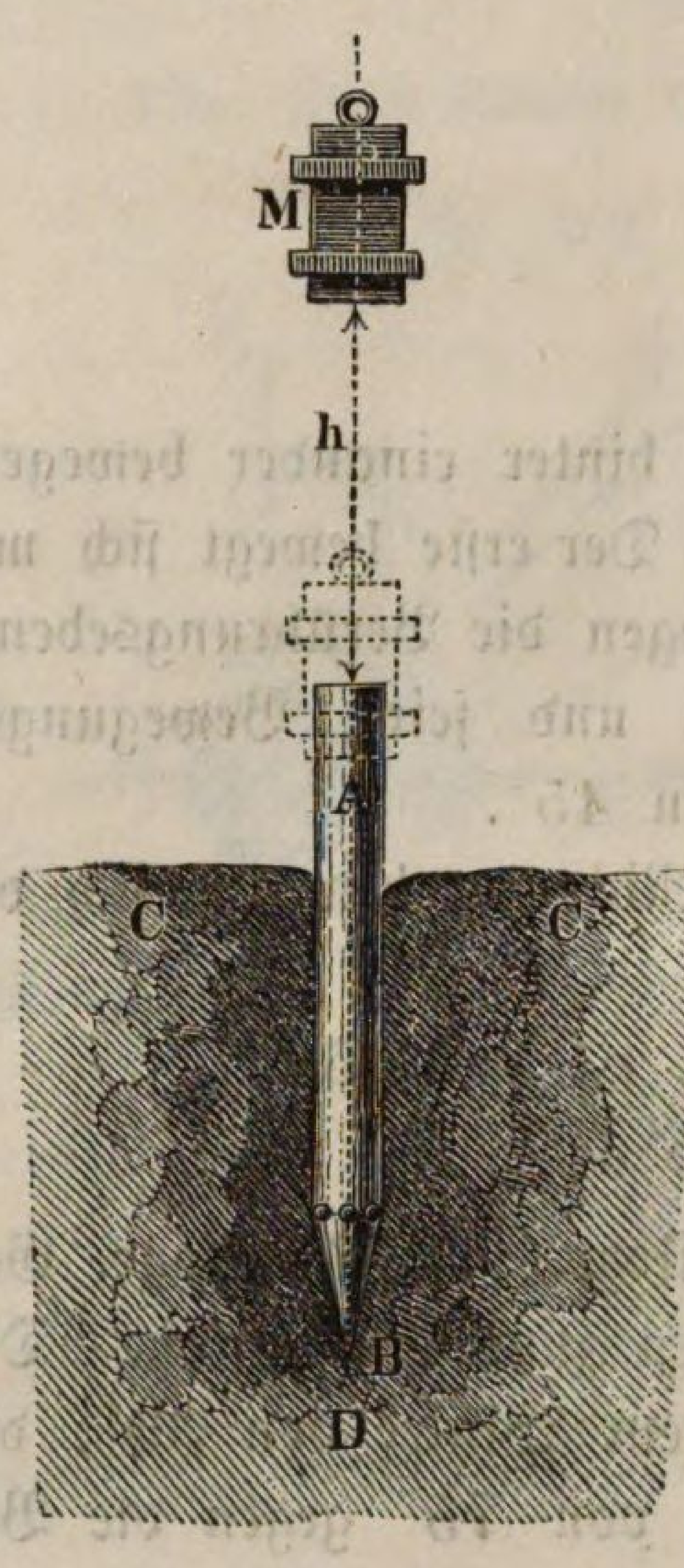
18. Zwei Eisenbahnzüge stoßen sich geradlinig central, indem sie sich hintereinander bewegen. Der erste hat ein Gewicht von 250 000 Kilogr. und eine Geschwindigkeit von 6,6^m, der zweite wiegt 275 000 Kilogr. und hat 10^m Geschwindigkeit.

Wie groß ist die auf Zerstörung wirkende Arbeitgröße, wenn die Elasticität nicht berücksichtigt wird?

$$V = \tfrac{1}{2}(10-6{,}6)^2 \frac{250000 \cdot 275000}{525000 \cdot 9{,}81} = 77160^{km}.$$

19. Das Einrammen von Pfählen bietet eine Anwendung der Stoßgesetze. Hierbei läßt man eine schwere Masse m_2, den Rammbär M (Fig. 402), mit der Geschwindigkeit c_2 auf den Pfahl A fallen, dessen Masse gleich m_1 sein mag und dessen Geschwindigkeit c_1 gleich Null ist.

Fig. 402.



Die Geschwindigkeit v_1, mit welcher der Pfahl nach dem Zusammenstoße eindringt, finden wir bei Annahme unvollkommen elastischer Körper:

$$v_1 = c_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{1-q}).$$

Die hierbei ausgeführte Arbeitgröße des Pfahles ist $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ gleich

$$\tfrac{1}{2} c_2^2 \frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2} (1 + \sqrt{1-q})^2.$$

Die Arbeitgröße des Widerstandes P, der sich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt, muß dem entwickelten Werthe gleich sein. Sehen wir den Widerstand als constant an und setzen den vom Pfahl nach einem Schlage des Bären zurückgelegten Weg gleich σ, so ist:

$$P\sigma = \tfrac{1}{2} c_2^2 \frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2} (1 + \sqrt{1-q})^2.$$

Führen wir anstatt der Massen die Gewichte G_1 und G_2 ein und setzen anstatt $\frac{c_2^2}{2g}$ die Fallhöhe h des Bären, so ist:

$$P\sigma = \left(\frac{G_2(1+\sqrt{1-q})}{G_1+G_2}\right)^2 G_1 h.$$

Es läßt sich die Länge σ des Eindringens nach einem Schlage schlecht messen, weshalb man dafür das arithmetische Mittel aus a Schlägen (Hitze genannt) setzt. Ist der Pfahl nach a Schlägen um s Meter eingedrungen, so haben wir:

$$P\frac{s}{a} = \left(\frac{G_2 (1 + \sqrt{1-q})}{G_1 + G_2}\right)^2 G_1 h.$$

Es läßt sich aus dieser Formel entweder der Widerstand P finden, den ein Pfahl dem weiteren Eindringen entgegensetzt, oder die Tiefe s des Eindringens bei der letzten Hitze, damit der Pfahl dem Eindringen einen Widerstand von P Kilogramm entgegenstelle. Sind diese Aufgaben in der Praxis zu lösen, so nimmt man der Sicherheit wegen Bär und Pfahl als unelastische Körper an und rechnet bei gewöhnlichen Wohngebäuden vierfache, bei wichtigeren Bauten sechsfache Sicherheit. Die zu Grunde zu legenden Formeln sind also:

$$P = a\frac{h}{s}\left(\frac{G_2}{G_1 + G_2}\right)^2 G_1$$

$$s = a\frac{G_1}{P}\left(\frac{G_2}{G_1 + G_2}\right)^2 h.$$

Beachtet man, daß für die Voraussetzung unelastischer Körper beide sich nach dem Stoße mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit gleichzeitig weiter bewegen, so ist in den letzten Formeln statt des Factors G_1, $G_1 + G_2$ zu setzen, wodurch sich die genaueren Werthe ergeben:

$$P = a\frac{h}{s}\,\frac{G_2}{G_1 + G_2}\,G_2$$

$$s = a\frac{G_2}{P}\,\frac{G_2}{G_1 + G_2}\,h.$$

20. Welches Verhältniß müssen die Gewichte des Bären und Pfahles haben, damit die durch das Einrammen verursachten Kosten recht klein werden?

Die Kosten sind jederzeit als ein Product aus Arbeit und Zeit anzusehen. Die Arbeitgröße besteht in dem Heben des Bären, ist also gleich $G_2\,h$. Die Zeit ist hier der Anzahl der Schläge a proportional, die zur Erzielung einer bestimmten Festigkeit geschehen müssen. Hiernach sind die Kosten dem Producte $a\,G_2\,h$ proportional, das wir bei gegebenem Gewicht G_1 zu einem Minimum zu machen haben. Es ist:

$$h\,a\,G_2 = \frac{P}{G_1}\,s\,\frac{(G_1 + G_2)^2}{G_2}.$$

Soll dieser Ausdruck ein Minimum werden, so muß

$$\frac{(G_1 + G_2)^2}{G_2} = \frac{G_1^{\,2}}{G_2} + 2\,G_1 + G_2$$

ein Minimum sein.

Da das Gewicht G_1 gegeben, so ist der Grenzwerth von $\frac{G_1^2}{G_2} + G_2$ zu untersuchen. Es ist

$$\frac{\frac{G_1^2}{G_2} + G_2 - \frac{G_1^2}{G_2'} - G_2'}{G_2 - G_2'} = 1 - \frac{G_1^2}{G_2 \,.\, G_2'}.$$

Geht man hierin zur Grenze über, so ist $G_2 = G_2'$ und der obige Quotient gleich 0 zu setzen. Hiernach ergiebt sich:

$$G_2 = G_1,$$

d. h. das Gewicht des Bären muß gleich dem des Pfahles sein.

21. Man wendet beim Rammen häufig einen Rammknecht an. Derselbe besteht aus einem Körper, der zwischen Pfahl und Rammbär gestellt wird, den Schlag daher unmittelbar empfängt und die empfangene Geschwindigkeit an den Pfahl überträgt.

Wir behalten die in den letzten Nummern getroffenen Bezeichnungen bei und setzen für das Gewicht des Rammknechts G_3, für seine Geschwindigkeit nach dem Schlage v_3. Für diese Annahmen ist der Widerstand P bei einer Tiefe σ_1 des Eindringens nach einem Schlage zu bestimmen, ein Vergleich zwischen σ_1 und dem oben gefundenen Werthe σ anzustellen und das Gewicht des Rammknechtes zu bestimmen, damit das Nachtheilige desselben so viel als möglich vermieden, σ_1 also recht groß werde.

$$\text{a)} \begin{cases} P = G_1 \dfrac{h}{\sigma_1} \left(\dfrac{G_2\, G_3}{(G_1 + G_3)\,(G_2 + G_3)} \right)^2 \\[2ex] \sigma_1 = \dfrac{G_1}{P}\, h \left(\dfrac{G_2\, G_3}{(G_1 + G_3)\,(G_2 + G_3)} \right)^2 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \sigma_1 = \sigma \left(\frac{G_3\,(G_1 + G_2)}{(G_1 + G_3)\,(G_2 + G_3)} \right)^2,$$

d. h. unter denselben Verhältnissen ist $\sigma_1 < \sigma$, die Anwendung eines Rammknechtes daher unvortheilhaft.

$$\text{c)} \quad G_3 = \sqrt{G_1\, G_2}.$$

22. Bei einer Ramme fällt der Rammbär, der ein Gewicht von 350 Kilogr. hat, $1{,}6^m$ hoch herab, auf einen Pfahl, dessen Gewicht 250 Kilogr. sein mag. Während der letzten Hitze von 20 Schlägen sei der Pfahl $0{,}105^m$ eingedrungen.

Welchen Widerstand leistet der Erdboden?

Welche ruhige Belastung kann der Pfahl auf die Dauer tragen?

$$P = 20 \, \frac{1{,}6}{0{,}105} \cdot \frac{250 \,.\, 250}{600} = 31\,746 \text{ Kilogr.}$$

$$P_1 = \frac{P}{4} = 7936 \text{ Kilogr.}$$

23. Wie tief darf ein Pfahl von 225 Kilogr. Gewicht bei der letzten Hitze von 15 Schlägen eindringen, wenn der Bär das Gewicht von 300 Kilogr. hat, von 3^m Höhe herabfällt und der Pfahl einen Widerstand von 100 000 Kilogr. leisten soll?

$$s = 15 \frac{225}{100000} \frac{225}{525} \cdot 3 = 0{,}043^m.$$

24. Für das Einrammen von Pfählen ist noch zu bemerken, daß man bei einer Zugramme auf je 50 Kilogr. Bärgewicht drei Arbeiter rechnen muß. Der Bär wird bei sechs Stunden Arbeitszeit mit einer Geschwindigkeit von $0{,}209^m$ gehoben.

An einer Zugramme sei ein Bär von 500 Kilogr. auf $1{,}6^m$ Höhe zu heben. Ein Pfahl gebrauche 1200 Schläge, um die nöthige Sicherheit zu gewähren. Wie viel Pfähle können täglich eingerammt werden?

Das Gewicht des Bären verlangt dreißig Arbeiter. Diese arbeiten mit einer Zugkraft gleich

$$\tfrac{50}{3} = 16\tfrac{2}{3} \text{ Kilogr.}$$

Die täglich entwickelte Arbeitgröße der dreißig Arbeiter ist daher

$$30 \,.\, 16\tfrac{2}{3} \,.\, 0{,}209 \,.\, 60 \,.\, 60 \,.\, 6.$$

Andererseits ist die zum Festschlagen eines Pfahles nothwendige Arbeitgröße:

$$500 \,.\, 1{,}6 \,.\, 1200.$$

Die Anzahl x der Pfähle bestimmt sich demnach durch die Gleichung:

$$x \,.\, 500 \,.\, 1{,}6 \,.\, 1200 = 30 \,.\, 16\tfrac{2}{3} \,.\, 0{,}209 \,.\, 60 \,.\, 60 \,.\, 6.$$

$$x = 2{,}4 \text{ Pfähle täglich.}$$

25. Der bei dem Stoße auftretende Arbeitsverlust ruft bei unelastischen Körpern oder bei Körpern, die durch den Stoß über die Elasticitätsgrenze hinaus in Anspruch genommen sind, eine Formänderung hervor. In den Fällen der Praxis, wo man eine derartige Formänderung beabsichtigt, bildet hiernach der durch den Stoß hervorgerufene Arbeitsverlust, die eigentliche Nutzarbeit, während die Arbeit, welche eine weitere Bewegung erzeugen würde, vortheilhafterweise bis auf Null abnehmen könnte. Der Werth von

$$V = \tfrac{1}{2} (c_2 - c_1)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

wird aber für folgende zwei Bedingungen zu einem Maximum:

a) $c_2 = 0$, d. h. die gestoßene Masse befindet sich in Ruhe.

b) $m_2 = \infty$, d. h. die gestoßene Masse sei in Bezug auf die stoßende Masse m_1 so groß, daß man den Summand m_1 im Nenner des Ausdrucks vernachlässigen kann.

Es ist für diese Annahmen $Max\ V = \frac{1}{2} m_1 c_1^2$ gleich der lebendigen Kraft des stoßenden Körpers und bei Benutzung dieses Werthes wird n. F. 153 die lebendige Kraft $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$, welche zur Erzeugung der weiteren Bewegung dienen würde, zu Null.

26. Ein Dampfhammer, welcher 8000 Kilogr. wiegt, fällt von 2^m Höhe auf das zu schmiedende Stück herab. Das Gewicht des Ambos betrage mit dem zu bearbeitenden Schmiedestücke 60 000 Kilogr. Wie groß ist der Arbeitsverlust, wie groß ist die auf Bewegung des Ambos, auf Erschütterungen der Gebäude, Fundamente ꝛc., wirkende Arbeitgröße:

$$V = \tfrac{1}{2}(c_2 - c_1)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{c_1^2}{2} m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

da c_2, die Geschwindigkeit des Ambos, gleich 0.

Ersetzen wir noch die Massen durch die Gewichte und führen für $\frac{c_1^2}{2g}$ die Fallhöhe h des Hammers ein, so ist

$$V = G_1 . h \frac{G_2}{G_1 + G_2} = 8000 . 2 \frac{60\,000}{68\,000} = 14\,118^{km};$$

die lebendige Kraft $\frac{1}{2} m_1 c_1^2 = G_1 h$ des Hammers ist dagegen $16\,000^{km}$, daher ist die auf Bewegung verwandte Arbeitgröße

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = 16\,000 - 141\,18 = 1882^{km}.$$

27. Stangenförmige Körper haben bei Maschinenconstructionen manchmal Stöße in Richtung ihrer geometrischen Achse zu erleiden, wodurch die absolute oder relative Festigkeit in Anspruch genommen wird.

Wird bei dem Körper von der Länge l und dem Querschnitte f eine Ausdehnung oder Zusammendrückung d hervorgerufen, wobei die Grenze der Elasticität nicht überschritten werden mag, so ist, unter P den entgegengesetzten Widerstand verstanden:

$$d = \frac{1}{E} \frac{Pl}{f}.$$

Die Arbeitgröße des Widerstandes ist, da derselbe allmälig von Null bis P wächst:

$$\tfrac{1}{2} P d,$$

d. h.

$$\tfrac{1}{2} \frac{1}{E} \frac{P^2 l}{f}.$$

Die Arbeit wird durch den Stoß hervorgerufen, wobei wir vollkommen elastische Körper voraussetzen müssen, da die Elasticitätsgrenze nicht überschritten werden soll. Bezeichnen wir die stoßende Masse mit m_2, die eine Geschwindigkeit c_2 besitzt, indem sie von einer Höhe h herabfällt. Der gestoßene Körper habe die Masse m_1 und befinde sich in Ruhe, dann ist die Geschwindigkeit des letzteren:

$$v_1 = c_1 + (c_2 - c_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sqrt{1 - q}).$$

Hierin ist $c_1 = 0$, ebenso $q = 0$ zu setzen:

$$v_1 = 2 c_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Mit dieser Geschwindigkeit bewegt sich die gestoßene Masse m_1 und verrichtet die Dehnung d. Die dadurch hervorgerufene Arbeitgröße $\frac{1}{2}\, m_1\, v_1^2$ ist daher:

$$4 \cdot \tfrac{1}{2}\, c_2^2 \frac{m_1\, m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

oder, wenn wir statt der Massen die Gewichte einführen und statt $\frac{c_2^2}{2\,g}$, h setzen:

$$4\; G_1\, h \left(\frac{G_2}{G_1 + G_2}\right)^2.$$

Wird dieser Ausdruck gleich dem oben gefundenen $\frac{1}{2}\, P\, d$ gesetzt, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung des Widerstandes P:

$$\tfrac{1}{2}\frac{P^2\, l}{f\, E} = 4\; G_1\, h \left(\frac{G_2}{G_1 + G_2}\right)^2$$

$$P = 2\,\frac{G_2}{G_1 + G_2}\sqrt{2\; G_1\, h \frac{f\,E}{l}}.$$

Wird bei der durch den Stoß hervorgerufenen Ausdehnung die Elasticitätsgrenze erreicht, so sind die Körper als unelastisch anzusehen, und sie bewegen sich nach dem Stoße gemeinschaftlich mit der Geschwindigkeit

$$v = c_2 \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Es ist daher in diesem Falle:

$$\tfrac{1}{2}\frac{P^2\, l}{f\, E} = \frac{c_2^2}{2\, g} \cdot \frac{G_2^2}{G_1 + G_2}.$$

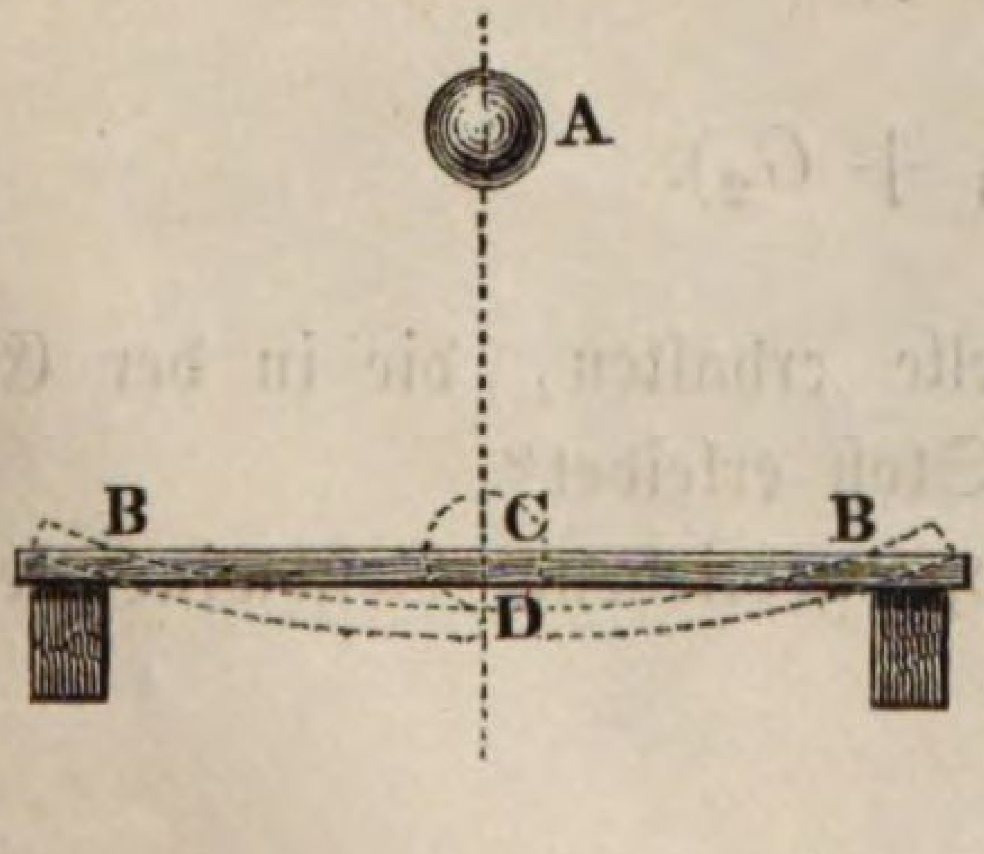
Statt P setzen wir $f \cdot (\sigma)$, so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\frac{f\, l}{E}(\sigma)^2 = h\,\frac{G_2^2}{G_1 + G_2}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich die Fallhöhe h des Gewichtes G_2 berechnen, damit ein Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder zusammengedrückt werde:

$$h = \tfrac{1}{2}\left(\frac{(\sigma)}{G_2}\right)^2 \frac{f\, l}{E}(G_1 + G_2).$$

Fig. 403.



28. Von welcher Höhe muß eine schwere Masse A (Fig. 403) auf einen an seinen beiden Enden unterstützten prismatischen Körper $B\,B$ herabfallen, um denselben zu zerbrechen?

Die durch den Stoß verrichtete Arbeitgröße ist, unelastische Körper vorausgesetzt:

$$\tfrac{1}{2}\, c^2 \frac{m_2^2}{m_1 + m_2},$$

worin c die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers unmittelbar vor dem Zusammenstoße, m_2 die fallende und m_1 die getroffene Masse bezeichnet. Die letztere erleidet jedoch nur eine Durchbiegung, wird also nicht vollständig fortbewegt, so daß in der obigen Formel nur ein Theil von m_1 in Rechnung gebracht werden darf.

Versuche in der neuesten Zeit haben ergeben, daß statt m_1, $\frac{1}{2} m_1$ zu setzen ist. Die durch den Stoß verrichtete Arbeitgröße ist daher:

$$\tfrac{1}{2} c^2 \frac{m_2^2}{\frac{1}{2} m_1 + m_2},$$

oder statt der Massen die Gewichte und statt der Geschwindigkeit c die Fallhöhe h eingeführt:

$$h \frac{G_2^2}{\frac{1}{2} G_1 + G_2}.$$

Ist P der in der Mitte des unterstützten Körpers bei der Durchbiegung s hervorgerufene Widerstand, so entspricht dieser größten Senkung eine Arbeitgröße gleich $\frac{1}{2} P s$, da P allmälig von Null bis P wächst. Für s setzen wir den in §. 70 2c angegebenen Werth der Durchbiegung:

$$s = \frac{P l^3}{48 E J}$$

unter l die Länge des unterstützten Körpers verstanden. Die zu verrichtende Arbeitgröße $\frac{1}{2} P s$ ist demnach:

$$\tfrac{1}{96} \frac{P^2 l^3}{E J}.$$

Sobald die Elasticitätsgrenze erreicht wird, ist:

$$P = 4 (\sigma) \frac{J}{e l}.$$

Die zu verrichtende Arbeitgröße ist daher:

$$\tfrac{1}{6} (\sigma)^2 \frac{J}{e^2 E} l.$$

Wird dieser Werth dem Obigen gleichgesetzt, so erhält man die zur Berechnung von h nothwendige Gleichung:

$$h \frac{G_2^2}{\frac{1}{2} G_1 + G_2} = \tfrac{1}{6} (\sigma)^2 \frac{J}{e^2 E} l$$

$$h = \tfrac{1}{6} \left(\frac{(\sigma)}{G_2}\right)^2 \frac{J l}{e^2 E} (\tfrac{1}{2} G_1 + G_2).$$

29. Welchen Halbmesser muß eine Welle erhalten, die in der Entfernung R von der geometrischen Achse einen Stoß erleidet?

Die der Welle nach dem Zusammenstoß gebliebene Geschwindigkeit ist nach §. 76:

$$\frac{T_1}{T_1 + m_2 R^2} R \omega,$$

wenn ω die Winkelgeschwindigkeit unmittelbar vor dem Stoße, T_1 das Trägheitsmoment der Welle und m_2 die gestoßene Masse bezeichnet. Die durch den Stoß verrichtete Arbeit ist demnach bei Annahme unelastischer Körper:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{T_1}{R^2} + m_2\right)\frac{T_1^{\,2}}{(T_1 + m_2 R^2)^2} R^2 \omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{T_1^{\,2}}{T_1 + m_2 R^2}\omega^2.$$

Durch den Stoß wird die Torsionsfestigkeit der Welle in Anspruch genommen. Nennen wir den Torsionswiderstand P, den Verdrehungswinkel α, so ist die zu verrichtende Arbeitgröße:

$$\tfrac{1}{2} P R \alpha.$$

Statt α setzen wir n. F. 149 b: $\frac{P R l}{C J_p}$, wonach die zu verrichtende Arbeitgröße gleich $\frac{1}{2}(P R)^2 \frac{l}{C J_p}$ wird. Wird der Körper bis zur Elasticitätsgrenze durch den Stoß in Anspruch genommen, so ist n. F. 150: $P R = (\tau)\frac{J_p}{e}$ und daher die zu verrichtende Arbeitgröße $\frac{1}{2}(\tau)^2 \frac{J_p l}{e^2 C}$. Durch Gleichsetzung der beiden Werthe, welche die verrichtete und die zu verrichtende Arbeit ausdrücken, erhalten wir eine Gleichung zur Bestimmung von e, d. i. der Halbmesser r der Welle. Es ist $J_p = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{2} r^4$ und

$$\tfrac{1}{2}\frac{T_1^{\,2}}{T_1 + m_2 R^2}\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tau)^2 \frac{\pi r^4 l}{2 r^2 C}, \text{ daher}$$

$$r = \frac{T_1 . \omega}{(\tau)}\sqrt{\frac{\frac{2}{\pi}}{l(T_1 + m_2 R^2)}}.$$

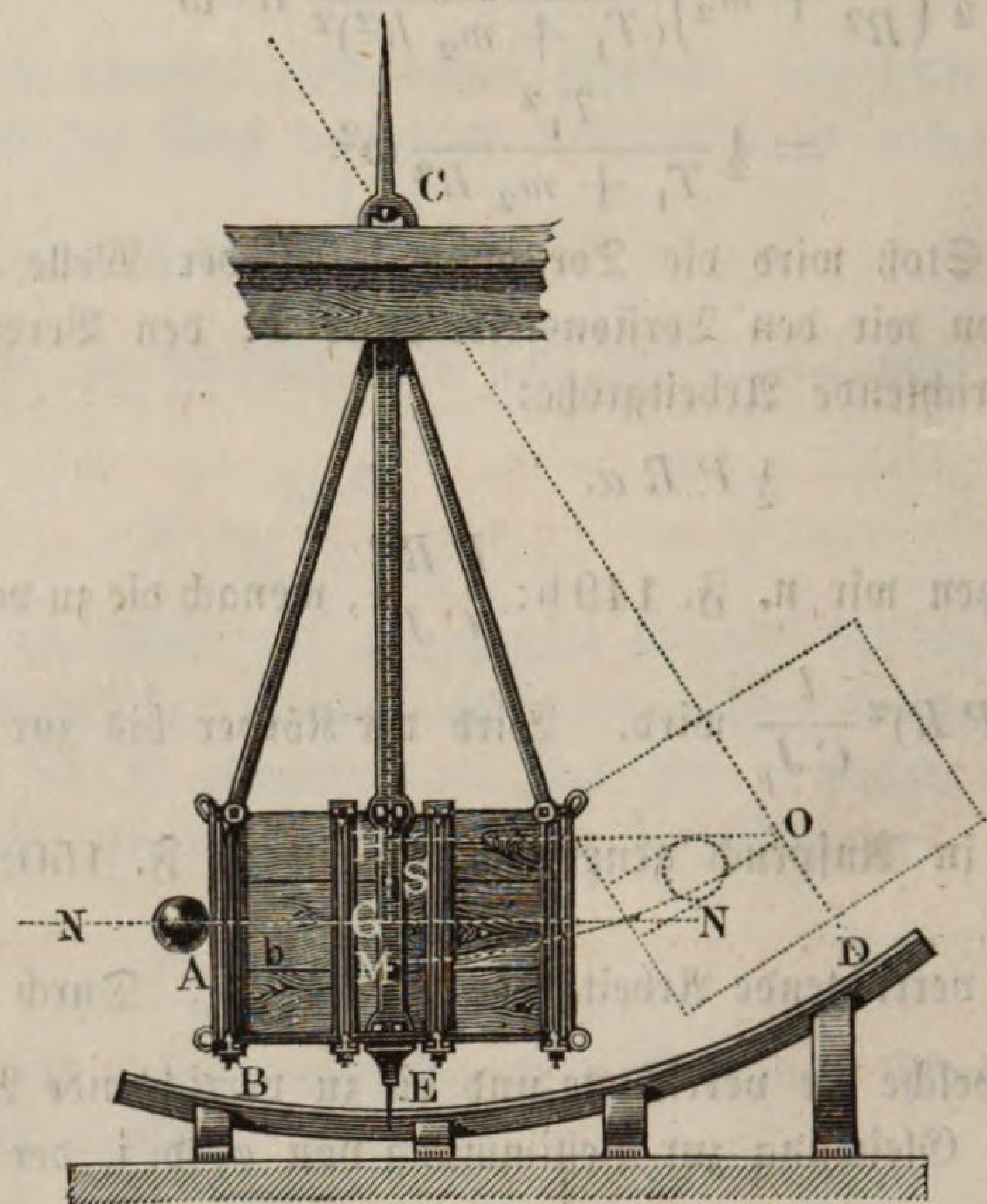
30. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit von abgeschossenen Kugeln bedient man sich eines Pendels (Fig. 404 a. f. S.), das hierbei aus einer recht schweren Masse hergestellt und an der Anschlagseite der Kugel mit weichem Holze oder Thon ausgefüttert ist, um den Zusammenstoß so viel als möglich unelastisch zu erhalten. In dieser Anwendung heißt der Apparat ballistisches Pendel.

Es sei m_2 die Masse der Kugel A, c die Geschwindigkeit, mit der sie anschlägt, r die Entfernung des Anschlagpunktes von der Drehachse des Pendels, T_1 das Trägheitsmoment desselben für diese Achse. Hat das Pendel vor dem Zusammenstoße keine Geschwindigkeit, so ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit ω nach dem Anschlage der Kugel, in Folge §. 76:

$$\omega = \frac{r}{T_1 + m_2 r^2} m_2 c.$$

Nachdem das Pendel durch das Anschlagen der Kugel in Bewegung gesetzt worden ist, wird es den Gesetzen des physischen Pendels im Allgemeinen folgen. Bezeichnet l die Entfernung des Schwingungspunktes von der Drehachse,

Fig. 404.



so ist $l\,\omega$ die Geschwindigkeit desselben, welche von der Höhe des vom Schwingungspunkte durchlaufenen Kreisbogens abhängig ist. Wir erhalten, wenn α den Ausschlagwinkel ECD des Pendels bezeichnet:

$$(l\,\omega)^2 = 2\,g\,l\,(1 - \cos\alpha)$$

$$(l\,\omega)^2 = 4\,g\,l\,\sin\frac{\alpha^2}{2}$$

$$\omega = 2\,\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für ω gefundenen Werthe erhält man ein Mittel, die Anfangsgeschwindigkeit c der Kugel zu finden:

$$\frac{r}{T_1 + m_2\,r^2}\,m_2\,c = 2\,\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$c = 2\,\frac{T_1 + m_2\,r^2}{m_2\,r}\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Die Zeitdauer t einer Schwingung ist aber:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{60}{n},$$

wenn das Pendel n Schwingungen in einer Minute macht.

Hieraus erhält man:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{n\,\pi}{60},$$

und nach Substitution dieses Ausdruckes in dem Werth für die Geschwindigkeit c:

$$c = 0{,}1047\, n \frac{T_1 + m_2 r^2}{m_2\, r}\, sin\, \frac{\alpha}{2}.$$

31. Es ist mit Hülfe eines ballistischen Pendels von 2000 Kilogr. Gewicht die Geschwindigkeit einer abgeschossenen Kugel von 5 Kilogr. zu bestimmen. Der Ausschlagwinkel des Pendels ist 16°, wobei in einer Minute 30 Schwingungen gemacht werden. Die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse sei $1{,}9^m$, die des getroffenen Punktes von derselben $2{,}2^m$.

Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn der getroffene Punkt Mittelpunkt des Stoßes ist, wenn also in der obigen Formel r gleich l gesetzt wird?

Wie groß ist dagegen die Geschwindigkeit der Kugel, wenn das Pendel im Stoßpunkte getroffen wird, wenn man also $r = \sqrt{\frac{T_1}{m_2}}$ setzt?

Das Trägheitsmoment T_1 des Pendels findet sich nach §. 61:

$$T_1 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 M s g.$$

Es ist

$$T_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 . 2000 . 1{,}9 = 1540$$

$$c_1 = 0{,}1047 . 30 . \frac{1540 . g + 5 . 2{,}2^2}{5 . 2{,}2}\, sin\, 8 = 601{,}4^m$$

$$c_2 = 0{,}1047 . 30 . \frac{1540 . g + 5 . 3{,}98^2}{5 . 3{,}98}\, sin\, 8 = 333{,}6^m$$

$$c_3 = 0{,}1047 . 30 . \frac{1540 . g + 5 . 55^2}{5 . 55}\, sin\, 8 = 48^m.$$

32. Ein cylindrisches Geschoß aus Schmiedeeisen von d^{cm} Durchmesser und l^{cm} Länge trifft eine schmiedeeiserne Panzerplatte mit 400^m Geschwindigkeit. Welche Dicke δ erhält die Platte unter der Voraussetzung, daß der Widerstand derselben sich mit dem durch den Stoß hervorgerufenen Druck gerade im Gleichgewicht befinde.

Die abzuscheerende Fläche ist $\pi\, d\, \delta$, daher der zur Abscheerung nothwendige Druck n. F. 139b gleich $T \pi\, d\, \delta$ und die Arbeitgröße desselben, unter der Voraussetzung, daß der Abscheerungswiderstand constant bleibt, gleich:

$$T \pi\, d\, \delta \frac{\delta}{100}.$$

Diese Arbeitgröße ist für den Gleichgewichtszustand gleich der lebendigen Kraft des Geschosses, daher haben wir die Ausgangsgleichung, das specifische Gewicht des Eisens zu 7,7 genommen:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2 l}{1000} \cdot \frac{1}{2g} \cdot 7{,}7 \,.\, 400^2 = T \pi d \delta \,.\, \frac{\delta}{100} \text{ oder}$$

$$\delta^2 = \frac{7{,}7 \,.\, 400^2}{4 \,.\, 10 \,.\, 2 \,.\, 9{,}81 \,.\, T} d\, l.$$

Setzen wir $T = 3500$ Kilogr., so ergiebt sich:

$$\delta^2 = 0{,}448\, d\, l.$$

Nehmen wir $l = 2\, d$, so finden wir $\delta = 0{,}95\, d$.

Macht man hiernach die Dicke δ der Panzerplatte gleich dem Durchmesser d des Geschosses, so ist eine Gefahr der Zerstörung nicht vorhanden.

33. Daumenwellen werden in der Praxis häufig zum Heben von Stampfen benutzt.

Das Gewicht einer Stampfe sei G_1, ihre Masse m_1, der Zusammenstoß zwischen Daumen und Hublatte liege, wie es gewöhnlich der Fall ist, mit dem Mittelpunkte der Daumenwelle in einer horizontalen Linie und habe die Entfernung R. Die Daumenwelle besitze vor dem Stoße die Winkelgeschwindigkeit ω, ihr Trägheitsmoment sei T.

Unter der Voraussetzung unelastischer Körper haben wir nach §. 76 für die nach dem Stoße gemeinschaftlich stattfindende Geschwindigkeit c:

$$c = \frac{T}{T + m_1 R^2} R\, \omega.$$

Die durch den Stoß geänderte Geschwindigkeit bedingt die vorhandene Arbeitgröße:

$$\tfrac{1}{2} c^2 \left(m_1 + \frac{T}{R^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{T^2}{T + m_1 R^2} \omega^2.$$

Vor dem Stoß besaß die Welle eine Arbeitgröße gleich $\frac{1}{2} \omega^2 T$.

Die durch den Stoß verlorengegangene Leistung ist deshalb:

$$\tfrac{1}{2} (R\, \omega)^2 \frac{m_1 T}{T + m_1 R^2}.$$

Die träge Masse m_1 der Stampfe muß durch die vorhandene Kraft in die Geschwindigkeit c versetzt werden. Die hierzu nothwendige Arbeitgröße ist:

$$\tfrac{1}{2} m_1 c^2 = \tfrac{1}{2} (R\, \omega)^2 \frac{T^2 m_1}{(T + m_1 R^2)^2}.$$

Die Stampfe ist endlich auf die Höhe h zu heben, wozu die Arbeitgröße $m_1 g h$ gehört. Die vorhandene Betriebskraft muß hiernach, abgesehen von

der Arbeit der Reibungswiderstände, zur einmaligen Bewegung einer Stampfe eine Arbeitgröße entwickeln, welche gleich ist:

$$\tfrac{1}{2}(R\,\omega)^2 \frac{(2\,T + m_1\,R^2)\,T}{(T + m_1\,R^2)^2} m_1 + m_1\,g\,h.$$

Sind bei dem Stampfbetriebe α Stampfen vorhanden und soll jede derselben n mal in einer Minute gehoben werden, so ist die nothwendige Arbeitstärke:

$$L = \frac{n\,\alpha}{120} \cdot m_1 \left\{(R\,\omega)^2 \frac{(2\,T + m_1\,R^2)\,T}{(T + m_1\,R^2)^2} + 2\,g\,h\right\}$$

und wenn man zweckmäßigerweise $R\,\omega = 1{,}12\sqrt{h}$ setzt, so ist:

$$L = \frac{n\,\alpha}{120} \cdot m_1\,h \left\{\tfrac{5}{4} \frac{(2\,T + m_1\,R^2)\,T}{(T + m_1\,R^2)^2} + 2\,g\right\}.$$

Bei Annahme dieser Hubgeschwindigkeit $R\,\omega = v = 1{,}12\sqrt{h}$ wird die Hubzeit $t_1 = \dfrac{h}{1{,}12\sqrt{h}} = 0{,}89\sqrt{h}$. Die Fallzeit t_2 einer Stampfe ist andererseits gleich $\sqrt{\dfrac{2\,h}{g}} = 0{,}45\sqrt{h}$. Hieraus findet sich die Zeit t zwischen zwei aufeinander folgenden Huben, wenn man $\frac{1}{6}$ derselben als Ruhezeit zuläßt, damit bei einiger Unregelmäßigkeit die Hublatte nicht auf den Daumen schlage. Aus $\frac{5}{6}\,t = t_1 + t_2$ folgt:

$$t = 1{,}6\sqrt{h}.$$

Weiter ist $n\,t = 60$, daher die Anzahl n der Hübe pro Minute:

$$n = \frac{60}{1{,}6\sqrt{h}} = \frac{37{,}5}{\sqrt{h}}.$$

Bezeichnet β die Zahl der Stampfen, welche zu gleicher Zeit an der Welle hängen, so kommen β Anhübe auf die Hubzeit eines Daumen, und es ist darnach diese Hubzeit $t_1 = \dfrac{60\,\beta}{n\,\alpha}$, welche um die Fallzeit t_2 vermehrt, bei Annahme von $\frac{1}{6}$ der ganzen Zeit als Ruhepause, zu der Gleichung führt:

$$\frac{60\,\beta}{n\,\alpha} + 0{,}45\sqrt{h} = \frac{5}{6} \cdot \frac{60}{n}.$$

Hieraus findet sich ein zweiter Werth für $n = 22{,}2 \cdot \dfrac{5\,\alpha - 6\,\beta}{\alpha\sqrt{h}}$.

Setzen wir beide Werthe von n einander gleich, so entsteht:

$$\frac{37{,}5}{\sqrt{h}} = 22{,}2 \cdot \frac{5\,\alpha - 6\,\beta}{\alpha\sqrt{h}} \text{ und}$$

$$\beta = 0{,}55\,\alpha.$$

Ergiebt sich hieraus für β keine ganze Zahl, so wäre die Arbeit ungleichförmig, und es ist dann n und v so lange zu ändern, bis sich für β eine

ganze Zahl herausstellt. Soll die Daumenwelle in einer Minute u Umdrehungen machen und ist a die Anzahl der Daumen, welche im Umfange der Welle auf eine Stampfe wirken, so ist $n = u . a$. In Folge dieser Gleichung ist u so zu wählen, daß bei bestimmtem Werthe von n sich auch für a eine ganze Zahl ergiebt. Der Theilrißhalbmesser R der Daumen bestimmt sich endlich durch die Gleichung $v = \frac{2 \pi R u}{60}$.

34. Die Bewegung von großen Hämmern geschieht ebenfalls durch Daumenwellen. Je nach der Lage des Angriffspunktes der Daumen unterscheidet man drei Arten von Hämmern, die in der Eisenfabrikation zur Anwendung kommen.

1) Schwanzhämmer. Dieselben haben einen über den Drehpunkt verlängerten Stiel oder Helm, der Schwanz genannt, gegen dessen Ende die Daumen abwärtsdrückend wirken. Schwanzhämmer machen 200 bis 400 Schläge in einer Minute, und wiegen 40 bis 75 Kilogr.

2) Aufwurfhämmer. Die Daumenwelle liegt hier dem Helme parallel und die Daumen greifen zwischen Drehpunkt und Hammer von der Seite unter den Helm. Dergleichen Hämmer machen 70 bis 200 Schläge in einer Minute und wiegen 300 bis 400 Kilogr.

3) Stirnhämmer. Das Heben eines solchen Hammers geschieht an der Stirn, indem die Daumenwelle quer vor dem Hammer liegt. Ein solcher Hammer macht 50 bis 60 Schläge in einer Minute und wiegt mit dem Helme 2500 bis 4000 Kilogr.

Die beiden ersten Arten sind mit hölzernen Helmen versehen, während ein Stirnhammer ganz aus Gußeisen besteht.

Bei den Hämmern ist die Lage der Drehachse von der größten Wichtigkeit, da die plötzlichen Bewegungsänderungen Stoß gegen dieselbe verursachen. Während des Betriebes haben zwei verschiedene Punkte Stoß zu erleiden, der Angriffspunkt der Daumen und die Bahn des Hammers beim Aufschlagen desselben auf den Amboß.

Beide Punkte müßten n. F. 158 damit jegliche Reaction gegen die Drehachse vernichtet werde, Mittelpunkte des Stoßes sein. Im Allgemeinen ist das nicht vollständig zu erreichen, bei den Stirnhämmern ist es sogar unmöglich. Man begnügt sich daher, in der Praxis die größere Reaction zu verhindern, die durch das Aufschlagen des Hammers auf den Amboß hervorgerufen wird. Dieser Punkt wird als Mittelpunkt des Stoßes construirt und liegt also mit der Drehachse in einer horizontalen Ebene, in der sich auch der Schwerpunkt des Hammers befinden muß, während der Hammer selbst durch eine zur Drehachse normale Ebene in zwei gleiche und symmetrische Theile zerlegt wird, was die Drehachse als Hauptachse des schwingenden Systems erkennen läßt. Die Entfernung des Aufschlagpunktes von der Drehachse muß endlich n. F. 158 gleich $\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$ des schwingenden Körpers sein.

Für den Angriffspunkt der Daumen und des Hammers wird sich bis auf die Entfernung von der Drehachse das eben Angeführte in gleicher Weise ausführen lassen, so daß die durch den Stoß des Daumen hervorgerufene Reaction sich auf ein Minimum dadurch reduciren läßt.

35. Hiernach findet sich der Angriffspunkt der Daumen mit der Drehachse des Hammers in einer horizontalen Ebene, der Stoß erfolgt also normal zu derselben und man findet daher die Geschwindigkeit c, mit der Daumenwelle und Hammer sich nach dem Stoße gemeinschaftlich bewegen, nach §. 76:

$$c = \frac{T_1}{T_1 + m_2 r_1^2} r_1 \omega,$$

worin ω die Winkelgeschwindigkeit der Daumenwelle unmittelbar vor dem Stoße, T_1 deren Trägheitsmoment, r_1 die Entfernung des Daumenangriffspunktes von dem Mittelpunkte der Daumenwelle und m_2 die auf den Angriffspunkt des Daumen reducirte Masse des Hammers bezeichnet. Nennen wir T_2 das Trägheitsmoment des Hammers für die Drehachse und r_2 die Entfernung des Daumenangriffpunktes von derselben, so ist

$$m_2 = \frac{T_2}{r_2^2} \text{ und } c = \frac{T_1 r_2^2}{T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2} r_1 \omega.$$

Der durch den Anstoß des Daumen entstandene Verlust an lebendiger Kraft findet sich n. F. 156, wenn wir

$$q = 1,\ c_1 = 0,\ c_2 = r_1 \omega,\ m_1 = \frac{T_2}{r_2^2} \text{ und } m_2 = \frac{T_1}{r_1^2}$$

setzen.

Derselbe ist:

$$\tfrac{1}{2} (r_1 \omega)^2 \frac{T_1 T_2}{T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2}.$$

Die von der Daumenwelle an den Hammer zu übertragende Arbeitgröße, die zur Ueberwindung der Trägheit gebraucht wird, ist für die erhaltene Geschwindigkeit c gleich:

$$\tfrac{1}{2} c^2 \frac{T_2}{r_2^2} = \tfrac{1}{2} (r_1 \omega)^2 \frac{T_1^2 T_2 r_2^2}{(T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2)^2}.$$

Um den Angriffspunkt des Daumen auf die Höhe h zu heben, ist endlich eine Arbeitgröße nothwendig gleich

$$\frac{G_1 s}{r_2} h,$$

worin G_1 das Gewicht des Hammers und s die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehachse bezeichnet.

Für jeden Schlag des Hammers muß hiernach von der Betriebskraft eine Arbeitgröße entwickelt werden, die gleich

$$\tfrac{1}{2} (r_1 \omega)^2 \frac{T_1 T_2 (2 T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2)}{(T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2)^2} + \frac{G_1 s}{r_2} h$$

ist, wobei auf die Arbeit der Reibungswiderstände noch nicht Rücksicht genommen wurde. Soll der Hammer in jeder Minute n Schläge machen, so ist die zu übertragende Arbeitstärke $L =$

$$L = \frac{n}{60}\left(\tfrac{1}{2}(r_1\,\omega)^2 \frac{T_1\,T_2\,(2\,T_1\,r_2^2 + T_2\,r_1^2)}{(T_1\,r_2^2 + T_2\,r_1^2)^2} + \frac{G_1\,s}{r_2}\,h\right)\frac{km}{\,}.$$

36. Es sei die von dem Hammer bei dem Aufschlagen auf den Amboß entwickelte Arbeitgröße zu bestimmen:

a) Für Stirnhämmer. Nachdem der Daumen den Hammer verlassen, bewegt sich derselbe vermöge der vorhandenen Geschwindigkeit allein um die Höhe h' weiter. Behalten wir die obigen Bezeichnungen bei, so ist $\frac{c}{r_2}$ die Winkelgeschwindigkeit des Hammers nach dem Zusammenstoß mit dem Daumen, die dadurch aufgenommene Arbeitgröße daher

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{c}{r_2}\right)^2 T_2.$$

Ist r die Entfernung des Stoßmittelpunktes von der Drehachse, so ist dieselbe Arbeitgröße auch gleich

$$\frac{G_1\,s}{r}\,h'.$$

Durch Gleichsetzung der beiden Werthe erhalten wir:

$$h' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{c}{r_2}\right)^2 \frac{T_2\,r}{G_1\,s}.$$

Der Hammer fällt hierauf von der Höhe $h + h'$ auf den Amboß, und die dadurch erlangte Arbeitgröße L, die vollständig auf Veränderung des auf dem Amboß befindlichen Körpers benutzt wird, ist, wenn wir annähernd $h + h'$ gleich dem Wege des Hammer-Endpunktes setzen:

$$L = \frac{G_1\,s}{r}\,(h + h'),$$

worin n. F. 158

$$r = \frac{T_2}{G_1\,s}\,g$$

zu setzen ist.

Führen wir die beim Aufschlagen vorhandene Winkelgeschwindigkeit ω_1 ein, so ist die übertragene Arbeitgröße

$$L = \tfrac{1}{2}\,\omega_1^2\,T_2,$$

worin wir ω_1^2 annähernd aus der folgenden Gleichung finden:

$$\omega_1^2 = \frac{2\,(h + h')}{r^2}\,g.$$

b) Für Aufwurf- und Schwanzhämmer.

Diese hindert man, nachdem der Daumen das Heben vollbracht hat, ihren Lauf weiter fortzusetzen, indem man sie gegen ein Hinderniß schlagen läßt

und den dadurch verursachten Stoß so viel als möglich elastisch einrichtet. Zu dem Ende läßt man bei Aufwurfhämmern den Kopf gegen einen hölzernen Prellbalken (Reitel genannt), bei Schwanzhämmern dagegen den Schwanz gegen einen eisernen Prellpfosten schlagen. Man kann hierbei annehmen, daß dem Hammer nur die Hälfte seiner Hubgeschwindigkeit zurückgegeben wird, da der Stoß doch immer unvollkommen elastisch bleibt. Hiernach ist die von dergleichen Hämmern an den Amboß übertragene Arbeitgröße L:

$$L = \frac{G_1 s}{r}(h + h'),$$

wenn

$$h' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{c}{r_2}\right)^2 \frac{T_2 r}{G_1 s}$$

gesetzt wird, oder bei Einführung der stattfindenden Winkelgeschwindigkeit ω_1 ist die Arbeitgröße:

$$L = \frac{1}{2}\omega_1^2 T_2,$$

wobei

$$\omega_1^2 = \frac{2(h + h')}{r^2} g$$

gesetzt werden muß.

Es handelt sich bei dem Hammerbetriebe besonders um die Geschwindigkeit v im Theilrisse der Daumen. Die Hubzeit t_1 des Hammers ist $= \frac{h}{v}$. Die Fallzeit t_2 läßt sich aus der folgenden Gleichung finden, wenn man berücksichtigt, daß der Hammer bei dem Herunterfallen die Hälfte seiner Geschwindigkeit zurückerhalten soll:

$$h = \frac{1}{2} v t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$t_2 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 8hg}}{2g}.$$

Wenn der Hammer n Schläge in der Minute machen soll, so ist die Zeit t zwischen zwei auf einander folgenden Schlägen gleich $\frac{60}{n}$. Rechnen wir wieder, wie bei den Stampfen, $\frac{1}{6}$ dieser Zeit als Ruhezeit, so ist:

$$\frac{60}{n} = t_1 + t_2$$

$$\frac{50}{n} = \frac{h}{v} + \frac{-v + \sqrt{v^2 + 8hg}}{2g}.$$

Sobald n und h bestimmt sind, läßt sich hieraus die Geschwindigkeit v berechnen, oder bei Annahme von v, die möglichst klein einzurichten ist (wegen der durch den Stoß verlorengehenden Arbeitgröße), giebt die obige Gleichung die Abhängigkeit zwischen n und h.

Andererseits ist, wenn die Daumenwelle u Umdrehungen in der Minute machen und der Hammer bei einer Umdrehung a mal gehoben werden soll,

$$u a = n.$$

Hierin müssen a und n ganze Zahlen sein, was bei der Berechnung von u berücksichtigt werden muß. Nachdem u und v bekannt sind, findet sich endlich der Theilrißhalbmesser r_1 der Daumenwelle aus der Gleichung:

$$\frac{2\pi r_1 u}{60} = v.$$

37. Bei einem Hammer, der mit seinem Stiele aus einem Stücke besteht, ist der Punkt des Aufschlagens gegeben.

In welcher Entfernung r von demselben ist die Drehachse anzubringen, damit sie während des Stoßes keine Erschütterung erleide?

Es ist n. F. 158:

$$r = \frac{T_1}{M s'},$$

worin sich Zähler und Nenner auf die Drehachse beziehen, die vorläufig unbestimmt ist. Bezeichnet l die Länge des Hammers mit Stiel, T das Trägheitsmoment des Hammers für eine durch den Schwerpunkt, T_2 das Trägheitsmoment desselben für eine durch den Punkt des Aufschlages gelegte Achse, beide parallel der zu construirenden Drehachse angenommen, M_1 die an den Endpunkt des Stieles verlegte Masse des Hammers, so ist:

$$T_1 = T + M s^2$$
$$T_2 = T + M (r - s)^2$$
$$M_1 l = M (r - s).$$

Hieraus folgt:

$$T_1 = T_2 + M r s - M_1 l r.$$

Setzt man hierin für T_1 den in F. 158 angegebenen Werth $M r s$, so entsteht:

$$T_2 = M_1 r l$$

und

$$r = \frac{T_2}{M_1 l}.$$

38. Es ist das Gewicht des Schwungrades für eine Daumenwelle C (Fig. 405) zu bestimmen, die einen Hammer H zu bewegen hat.

Wir gehen von der allgemeinen Formel 160 aus und bestimmen die einzelnen Summanden den hier stattfindenden Bewegungsverhältnissen gemäß.

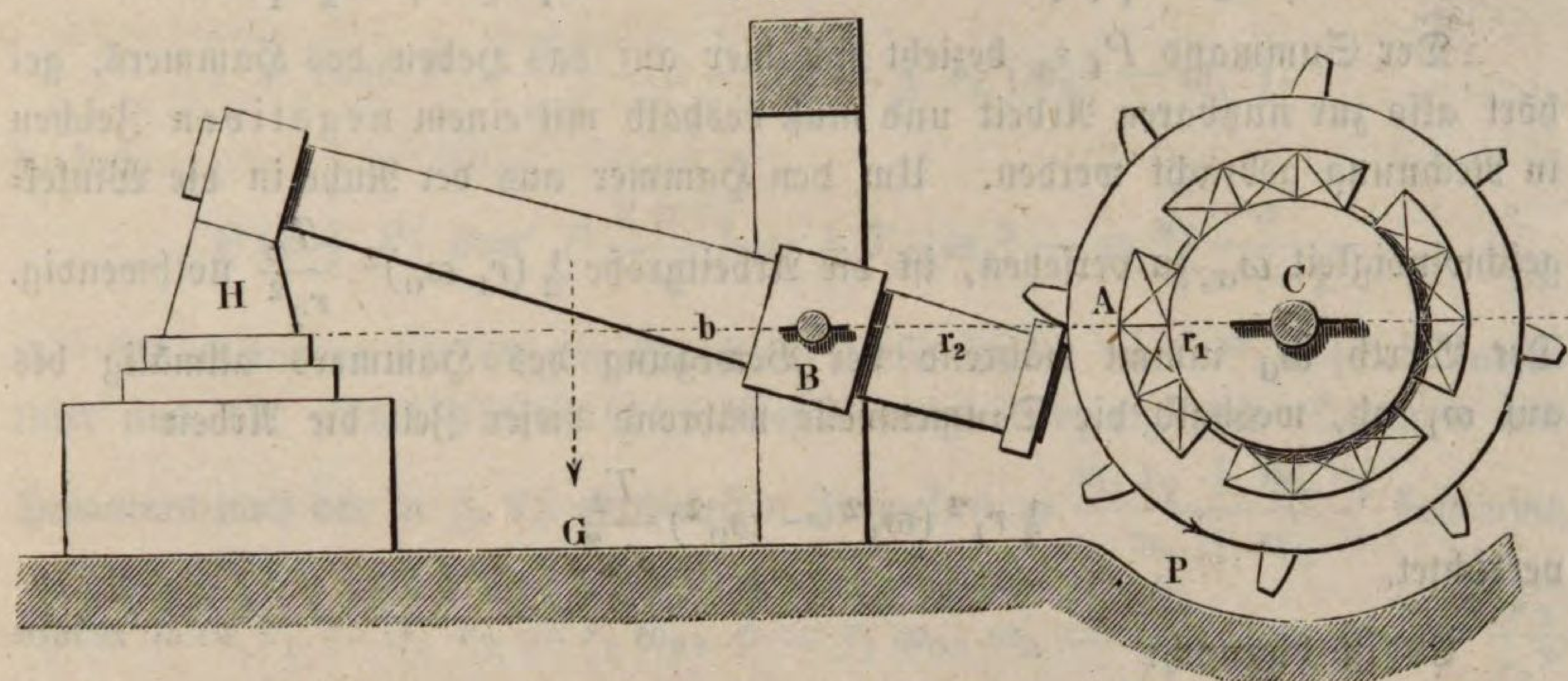
Ist der im Daumentheilriß wirksame Druck P, und der vom Hammer und Daumen gleichzeitig zurückgelegte Weg s, so ist die Arbeitgröße $P_1 s_1$ der bewegenden Kraft bei einem Hube des Hammers gleich $P s$.

Das Gewicht des Hammers mit Zubehör sei G, und das statische Moment desselben, in Bezug auf die Drehaxe B, $G b$; $B A$ sei gleich r_2, der

Halbmesser der Drehachse B sei ϱ und der Coefficient der Zapfenreibung μ_1. Der im Punkte A zu überwindende Druck ist für diese Annahmen:

$$G\,\frac{b+\mu_1\,\varrho}{r_2-\mu_1\,\varrho}.$$

Fig. 405.



Durch Ueberwindung dieses Druckes wird die nutzbare Arbeitgröße $P_2\,s_2$ verrichtet, die gleich

$$G\,\frac{b+\mu_1\,\varrho}{r_2-\mu_1\,\varrho}\,s \text{ ist.}$$

Die Arbeitgröße $P_3\,s_3$ der passiven Widerstände besteht hier aus der Arbeit der Reibung an der Daumenoberfläche und aus dem durch den Stoß zwischen Daumen und Hammer hervorgerufenen Arbeitverlust. Bezeichnet l die Länge der Daumenabrundung und μ_2 den Reibungscoefficienten, so ist die Arbeitgröße der Reibung

$$\mu_2\,\frac{b+\mu_1\,\varrho}{r_2-\mu_1\,\varrho}\,G\,l.$$

Das Trägheitsmoment der Daumenwelle mit Schwungrad sei T_1, das des Hammers sei T_2, und die Entfernung CA sei $= r_1$. Die Daumenwelle hat unmittelbar vor dem Zusammenstoße zwischen Daumen und Hammer die größte Winkelgeschwindigkeit ω_2. Während des Stoßes nennen wir die dem Hammer und der Welle gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit ω_0, und zu Ende der Bewegung des Hammers hat die Welle die kleinste Winkelgeschwindigkeit ω_1 angenommen. Unter der Voraussetzung unelastischer Körper erhalten wir den durch den Stoß entstandenen Arbeitverlust n. F. 156, wenn wir

$$q = 1,\; c_2 = r_1\,\omega_2,\; c_1 = r_1\,\omega_0,$$

$$m_1 = \frac{T_1}{r_1^{\,2}} \text{ und } m_2 = \frac{T_2}{r_2^{\,2}}$$

setzen.

Der Arbeitverlust ist hiernach:

$$\tfrac{1}{2} r_1^2 (\omega_2 - \omega_0)^2 \frac{T_1 T_2}{T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2},$$

und die Arbeitgröße $P_3 s_3$ der Widerstände ist deshalb:

$$\mu_2 G l \frac{b + \mu_1 \varrho}{r_2 - \mu_1 \varrho} + \tfrac{1}{2} r_1^2 (\omega_2 - \omega_0)^2 \frac{T_1 T_2}{T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2}.$$

Der Summand $P_4 s_4$ bezieht sich hier auf das Heben des Hammers, gehört also zur nutzbaren Arbeit und muß deshalb mit einem negativen Zeichen in Rechnung gebracht werden. Um den Hammer aus der Ruhe in die Winkelgeschwindigkeit ω_0 zu versetzen, ist die Arbeitgröße $\tfrac{1}{2} (r_1 \omega_0)^2 \frac{T_2}{r_2^2}$ nothwendig. Der Werth ω_0 nimmt während der Bewegung des Hammers allmälig bis auf ω_1 ab, weshalb die Daumenwelle während dieser Zeit die Arbeit

$$\tfrac{1}{2} r_1^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2) \frac{T_2}{r_2^2}$$

verrichtet.

Es ist hiernach:

$$P_4 s_4 = \tfrac{1}{2} r_1^2 \frac{T_2}{r_2^2} (\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega_0^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} (r_1 \omega_1)^2 \frac{T_2}{r_2^2}.$$

Durch die Bewegung des Hammers hat die Daumenwelle allmälig die kleinste Winkelgeschwindigkeit ω_1 angenommen, es ist daher statt des letzten Summands $\tfrac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$ der allgemeinen Gleichung 160:

$$\tfrac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2) T_1$$

zu setzen.

Nach Substitution dieser entwickelten Werthe erhalten wir die Gleichung:

$$P s - G (s + \mu_2 l) \frac{b + \mu_1 \varrho}{r_2 - \mu_1 \varrho} - \tfrac{1}{2} r_1^2 (\omega_2 - \omega_0)^2 \frac{T_1 T_2}{T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} (r_1 \omega_1)^2 \frac{T_2}{r_2^2} - \tfrac{1}{2} (\omega_1^2 - \omega_2^2) T_1 = 0.$$

Während des leeren Ganges der Daumenwelle wird die Arbeit des Druckes P allein darauf verwendet, die erlangte kleinste Winkelgeschwindigkeit ω_1, bis zum nächsten Zusammenstoße mit dem Hammer, in die größte ω_2 umzuändern. Nennen wir den von P in dieser Zeit zurückgelegten Weg s', so ist:

$$P s' = \tfrac{1}{2} T_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

Nach Einsetzung dieser Werthe erhalten wir:

$$P (s + s') - G (s + \mu_2 l) \frac{b + \mu_1 \varrho}{r_2 - \mu_1 \varrho} - \tfrac{1}{2} r_1^2 (\omega_2 - \omega_0)^2 \frac{T_1 T_2}{T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} (r_1 \omega_1)^2 \frac{T_2}{r_2^2} = 0.$$

Es mögen während einer Umdrehung d Daumen zur Wirkung kommen, so ist $s + s' = \frac{2\pi r_1}{d}$, und s, als ein Theil dieses Weges, ist gleich $\frac{2\pi r_1}{\alpha d}$, unter α eine ganze Zahl gedacht, für s' ist daher $\frac{2\pi r_1}{\alpha d}(\alpha - 1)$ zu setzen. Mit Benutzung dieser Werthe haben wir:

$$P s' \text{ oder } P\,\frac{2\pi r_1}{\alpha d}(\alpha - 1) = \tfrac{1}{2}\,T_1\,(\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

d. h.:

$$P(s + s') \text{ oder } P\,\frac{2\pi r_1}{d} = \tfrac{1}{2}\,T_1\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)\,\frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Es werde in der obigen Gleichung dieser Werth statt $P(s + s')$ substituirt und die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $r_1\omega_0$ des Daumen und Hammers nach der in §. 73 entwickelten Formel $v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$ bestimmt, indem man $c_1 = 0$, $c_2 = r_1\omega_2$, $v = r_1\omega_0$, $m_2 = \frac{T_1}{r_1^2}$ und $m_1 = \frac{T_2}{r_2^2}$ setzt.

Es ist hiernach

$$r_1\omega_0 = \frac{T_1 r_2^2}{T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2}\cdot r_1\omega_2,$$

und die allgemeine Gleichung erhält folgende Form:

$$\tfrac{1}{2}\,T_1\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)\,\frac{\alpha}{\alpha - 1} - G\,(s + \mu_2 l)\,\frac{b + \mu_1\varrho}{r_2 - \mu_1\varrho}$$
$$- \tfrac{1}{2}(r_1\omega_2)^2\,\frac{T_1\,T_2^3\,r_1^4}{(T_1 r_2^2 + T_2 r_1^2)^3} - \tfrac{1}{2}(r_1\omega_1)^2\,\frac{T_2}{r_2^2} = 0.$$

Die Reibung mag gegen die Massenwiderstände vernachlässigt werden; statt der Trägheitsmomente wollen wir die auf den Angriffspunkt A des Daumen reducirten Massen einführen, für T_1 ist also $m_1 r_1^2$ und für T_2, $m_2 r_2^2$ zu setzen. Die normale Winkelgeschwindigkeit der Welle sei ω und die zulässige Differenz der Grenzgeschwindigkeiten werde gleich $\frac{1}{a}$ von der normalen genommen. Es ist hiernach:

$$\omega_2 = \left(1 + \frac{1}{2a}\right)\omega,\ \omega_1 = \left(1 - \frac{1}{2a}\right)\omega,\ \omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{2}{a}\,\omega^2,$$

und wir erhalten nach Substitution dieser Werthe:

$$\frac{\alpha}{a(\alpha - 1)}\,m_1\,(r_1\omega)^2 - \frac{G b}{r_2}\,s$$
$$- \tfrac{1}{2}(r_1\omega)^2\left[\left(1 + \frac{1}{2a}\right)^2\frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} + \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^2 m_2\right] = 0,$$

oder einfacher, wenn wir $\frac{1}{2a}$ gegen 1 vernachlässigen:

$$\frac{\alpha}{a(\alpha - 1)} m_1 (r_1 \omega)^2 - \frac{G b}{r_2} \frac{2 \pi r_1}{\alpha d} - \frac{1}{2} (r_1 \omega)^2 \left[m_2 + \frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} \right] = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist die reducirte Masse m_1 der Daumenwelle mit Schwungrad genau oder annähernd zu bestimmen. Ein Näherungswerth ergiebt sich auf leichte Weise, wenn wir in der eckigen Klammer den Summand $\frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^3}$ ganz weglassen.

Es ist nämlich die Masse m_2 des Hammers gegen die der Daumenwelle so klein, daß man m_2 gegen m_1 als Summand vernachlässigen kann. Hierbei wird $\frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} = \frac{m_2^3}{m_1^2}$, was sich wenig von Eins unterscheidet, wodurch die Beseitigung des ganzen Summand gerechtfertigt erscheint.

Für diese Annahme erhalten wir die reducirte Masse m_1 der Daumenwelle mit Schwungrad:

$$m_1 = \frac{G b}{r_2} \frac{2 \pi r_1}{d} a \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 (r_1 \omega)^2} + m_2 \frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

39. Es sei nach der in voriger Aufgabe entwickelten Formel die Masse m_1 für einen Schwanzhammer zu berechnen, der 300 Schläge in der Minute macht und während einer Umdrehung der Daumenwelle zwölfmal gehoben wird. Der Halbmesser r_1 des Daumentheilrisses sei $0{,}78^m$, die Entfernung r_2 des Schwanzendes bis zur Drehachse des Hammers sei $0{,}63^m$, die Entfernung von derselben Achse bis zur Mitte des Hammers sei $1{,}57^m$, und die ganze Länge des Hammerstieles sei $2{,}35^m$. Der Hammer ist aus Gußeisen und wiegt 25 Kilogr. Der Stiel des Hammers besteht aus Eichenholz, hat rechteckigen Querschnitt mit den Seiten $0{,}157^m$ und $0{,}209^m$. Der Beschlag am Schwanze ist von der Drehachse $0{,}47^m$ entfernt und wiegt 2,5 Kilogr.

Nimmt man das specifische Gewicht des Eichenholzes zu 0,72, so erhält man:

Gewicht des vorderen Stielendes von $1{,}72^m$ Länge

$$= 1{,}57 \,.\, 2{,}09 \,.\, 17{,}2 \,.\, 0{,}72 = 41 \text{ Kilogr.}$$

Gewicht des hinteren Stielendes von $0{,}63^m$ Länge

$$= 1{,}57 \,.\, 2{,}09 \,.\, 6{,}3 \,.\, 0{,}72 = 15 \text{ Kilogr.}$$

Statisches Moment des Hammers

$$G b = 41 \,.\, 0{,}86 + 25 \,.\, 1{,}57 - 15 \,.\, 0{,}315 - 2{,}5 \,.\, 0{,}47 \text{ und } \frac{G b}{r_2} = 109 \text{ Kilogr.}$$

Zur Berechnung von m_2 bestimmen wir das Trägheitsmoment des Hammers.

Trägheitsmoment des vorderen Stielendes:

$$= \frac{1}{g}\left\{\tfrac{1}{12}\cdot 41\,(1{,}72^2 + 0{,}209^2) + 41\,.\,0{,}86^2\right\} = \frac{40{,}57}{g},$$

Trägheitsmoment des hinteren Stielendes:

$$= \frac{1}{g}\left\{\tfrac{1}{12}\cdot 15\,(0{,}63^2 + 0{,}209^2) + 15\,.\,0{,}315^2\right\} = \frac{2{,}04}{g},$$

Trägheitsmoment des Hammers annähernd:

$$= \frac{1}{g}\cdot 25\cdot 1{,}57^2 = \frac{61{,}62}{g},$$

Trägheitsmoment des Beschlags am Schwanze:

$$= \frac{1}{g}\cdot 2{,}5\cdot 0{,}47^2 = \frac{5{,}52}{g}.$$

Hiernach erhält man:

$$m_2 = \frac{T_2}{{r_2}^2} = \frac{40{,}57 + 2{,}04 + 61{,}62 + 5{,}52}{g\,.\,0{,}63^2} = \frac{276{,}5}{g}.$$

Wenn der Hammer 300 Schläge in der Minute machen soll und auf jede Umdrehung der Welle 12 Schläge kommen, so ist die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute 25 und die normale Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 0{,}1047\,.\,25 = 2{,}6175;\quad r_1 = 0{,}78^m;\quad d = 12;$$

die Differenz der Winkelgeschwindigkeit sei $\frac{1}{20}$ und die Welle möge während des Hebens und des Leergehens denselben Weg zurücklegen; es ist daher, für $a = 20$ und $\alpha = 2$:

$$\frac{G\,b}{r_2}\,\frac{2\,\pi\,r_1}{d}\cdot a\,\frac{\alpha - 1}{\alpha^2\,(r_1\,\omega)^2} = \frac{109\,.\,2\,\pi\,.\,20}{12\,.\,4\,.\,0{,}78\,.\,2{,}6175^2} = 53{,}4$$

$$m_2\,\frac{a}{2}\,\frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{276{,}5\,.\,10}{g\,.\,2} = 141,$$

daher die an den Daumenangriffspunkt reducirte Masse m_1 der Daumenwelle mit Schwungrad:

$$m_1 = 194.$$

Werden, wie es häufig der Fall ist, drei Schwanzhämmer durch dieselbe Daumenwelle getrieben und rechnen wir zu dem Betriebe eines jeden derselben eine Arbeit von 5 Pferdestärken, so hat die Welle bei 25 Umdrehungen pro Minute, 15 Pferdestärken zu übertragen. Die Welle besteht aus Eichenholz, der Durchmesser δ_0 derselben bestimmt sich nach Aufgabe 69, I, 3 des fünften Capitels:

$$\delta_0 = 2{,}15\,.\,\delta = 2{,}15\,\sqrt[3]{4000\,\frac{15}{25}} = 29^{cm}.$$

Nehmen wir die Länge der Welle zu 5^m, so läßt sich deren Trägheitsmoment gleich $\frac{1}{2}\,m\left(\frac{\delta_0}{2}\right)^2$, sowie die auf den Daumenangriffspunkt redu-

cirte Masse berechnen. Dieselbe ist $\frac{\pi \cdot 2{,}9^2 \cdot 50 \cdot 0{,}72}{2 \cdot 4 \cdot 9{,}81} \left(\frac{0{,}145}{0{,}78}\right)^2 = 0{,}42$. Auf jeden der Hämmer ist hiervon $\frac{1}{3}$, also 0,14 zu rechnen, so daß für den Schwungring eines jeden Hammers, der gleich als Daumenring benutzt wird, die reducirte Masse $194 - 0{,}14 = 193{,}86$.

Das Gewicht A des Schwungringes bestimmt sich aus der in Aufgabe 20 des vierten Capitels entwickelten Formel $T = 1{,}1 \frac{A}{g} R^2$, worin $R = r_1 = 0{,}78^m$ zu setzen ist, $\frac{T}{R^2}$ also die auf den Daumenangriffspunkt reducirte Masse 193,86 bedeutet. Es ist hiernach:

$$A = \frac{193{,}86}{1{,}1} \cdot 9{,}81 = 1729 \text{ Kilogr.}$$

40. Es ist der Nutzeffect eines Wasserrades zu bestimmen, auf welches in der Secunde 0,62 Kubikmeter Wasser fließen. Das Gefälle betrage 3^m, von dem jedoch nur $2{,}2^m$ zur Benutzung kommen. Außerdem geht eine Arbeitstärke von $125 \frac{km}{}$ durch die Reibung verloren und das Wasser besitze beim Abfließen aus dem Rade noch eine Geschwindigkeit von 3^m.

1) Rohe Arbeitstärke $P_1 s_1 = 0{,}62 \cdot 1000 \cdot 3 = 1860 \frac{km}{}$,

2) Nutzbare Arbeitstärke $P_2 s_2 = 0{,}62 \cdot 1000 \cdot 2{,}2 = 1364 \frac{km}{}$,

3) Arbeitstärke der Reibung $P_3 s_3 = 125 \frac{km}{}$,

4) Arbeitstärke des Wassers beim Ausfluß aus dem Rade, gleich der lebendigen Kraft $= \frac{1 \cdot 0{,}62 \cdot 1000}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 3^2 = 285 \frac{km}{}$.

Nutzeffect $\eta = \frac{1364 - 125 - 285}{1860} = \frac{954}{1860} = 0{,}51 = 51$ Proc.

Verbesserungen.

Seite 16 Zeile 4 von oben statt j^{t2} lies $j_t{}^2$.
» 49 » 3 » unten statt bestimmende hieraus lies hieraus bestimmende.
» 76 » 9 » oben statt Pfund lies Kilogramm.
» 95 » 15 » » statt ${}_2P$ lies P_2.
» 114 Fig. 79 statt R_1 und R_2 lies D_1 und D_2.
» 131 Zeile 2 von oben statt gefüllten lies gefällten.
» 155 » 6 » » statt M lies C.
» 246 » 4 » » $\cos\beta$ bleibt fort.
» 253 » 19 » unten statt $\frac{1}{PR - Qr - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0}$
lies $PR - Qr - F_1 f_1 - F_2 f_2 = 0$.
» 267 » 5 » » statt $P \gtreqless 0$ lies $P \lesseqgtr 0$.
» 284 » 14 » oben statt M'' lies M'.
» 397 Fig. 327 statt q_1 lies $p\,.\,l$.
» 403 Zeile 2 von oben statt $Q q \frac{1}{12} G l$ lies $Q q = \frac{1}{12} G l$.

Häusl

Wernicke, Gustav A.

Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung mit Uebungen und Anwendungen auf Maschinen- und Bau-Constructionen für den Unterricht an Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Privatstudium für angehende Maschinenbauer und Architekten
Bd.: 1

Braunschweig 1871